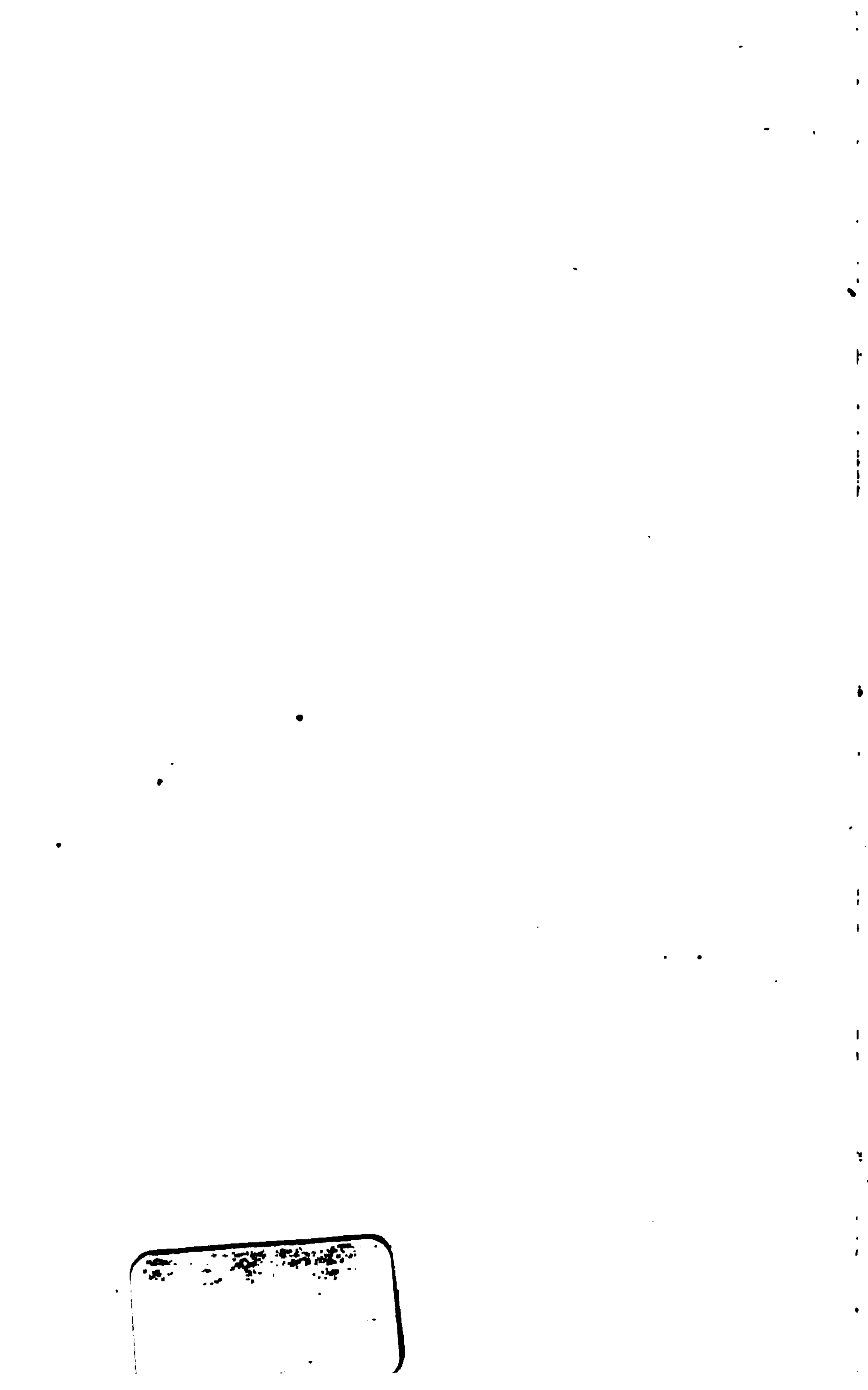
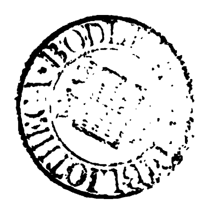


C. G. J. Jacobi

Mathematische Werke.

Band I.



Berlin,
Druck und Verlag von G. Reimer.
1846.



C. G. J. JACOBI

OPUSCULA MATHEMATICA.

VOLUMEN I.



BEROLINI,
TYPIS ET IMPENSIS G. REIMERI.
1846.

Seiner Majestät

Friedrich Wilhelm dem Vierten

seinem Allergnädigsten König und Herrn

widmet dieses Buch

in tiefster Unterthänigkeit

der Verfasser.

Allerdurchlauchtigster König,
Grofsmächtigster König und Herr!

Eurer Königlichen Majestät gefeierter Urgrofsoheim hat während seiner Regierung die Hauptstadt Preufsens zu einem Mittelpunct der mathematischen Welt gemacht. Sogleich nach seiner Thronbesteigung berief er die Heroen der Mathematik an die erneuerte Akademie der Wissenschaften; von Basel Johann Bernoulli nebst seinen drei Söhnen, Euler von Petersburg, später Lagrange von Turin. Die ersten Mathematiker ihrer Zeit müfsten auch bei dem gröfsten Könige sein, lautete der Lagrange berufende Brief des preufsischen Ministers. Jene berühmte Mathematikerfamilie hielt das hohe Alter ihres Hauptes zurück. Euler hat in den zwanzig Jahren, in denen er der mathematischen Classe der Berliner Akademie als Director vorstand, die gesammte Mathematik umgestaltet. In andern zwanzig Jahren erhob sein Nachfolger Lagrange die Wissenschaft der mathematischen Analysis durch reiche Entdeckungen und vollendete Form zur glänzendsten Höhe. Der tiefsinnige und vielseitige Lambert wurde eine Zierde unserer Akademie. Auch an der Universität in Halle folgte dem zurückgerufenen Wolff der berühmte Segner. Durch den Preufsenkönig wurde Frankreich auf D'Alembert aufmerksam.

Aber der Aufschwung der mathematischen Wissenschaft ist damals noch bei uns ein vorübergehender gewesen. Sie war noch kein Lebensbaum geworden, der in dem Boden des Preufsischen Volkes Wurzel geschlagen. Nach Friedrichs des Zweiten Tode wandte sich Lagrange nach Paris, wo er dem mit der Revolution hereinbrechenden Elend erlegen wäre, wenn nicht Eurer Königlichen Majestät Grofsvater Majestät durch edelmüthige Unter-

stützung in der Ferne den Mathematikern ihren ersten Stern erhalten hätte. Nach dem Vorübergange des Schreckens erhob die Mathematik
h rasch wieder ihr Haupt. Da es dort keine Schulen
› traten die Mathematiker des ganzen Landes, Lehrer
sechstausend an der Zahl, zusammen und beriethen,
nkunft der mathematische Unterricht einzurichten wäre. Die aus diesen Berathungen hervorgegangene Pariser polytechnische Schule hat dort wesentlich dazu beigetragen, die höheren mathematischen Kenntnisse in weiten Kreisen zu verbreiten. Napoleon stellte zuerst den Grundsatz auf, dafs dem Genie in der Wissenschaft und Kunst eben die höheren Ehren und Belohnungen des Staates gebührten, welche den bei der Verwaltung, Rechtspflege und dem Kriegswesen betheiligten Dienern zu werden pflegen. Der ehemalige Director unserer Akademie wurde von ihm in den Grafenstand und zum Senator erhoben. Seinen greisen Vater in Turin beglückwünschte eine Deputation der Regierung im Namen der französischen Nation zu dem Besitz eines solchen Sohnes. Mit diesem glänzten dort fünf andere mathematische Namen ersten Ranges, und es schien Frankreich, wie in den Waffen, so auch in der Mathematik unüberwindlich.

Nachdem es nun aber auf dem Kriegsfelde glücklich besiegt worden, haben wir, wie in der Sage von der Hunnenschlacht die Schatten in den Lüften fortkämpften, in den Regionen des Gedankens weitergekämpft, unterstützt von der heiligen Allianz mit dem Geiste, die Preufsen geschlossen, und manchen glorreichen Sieg in den Wissenschaften erstritten. Und so rühmen wir uns auch in der mathematischen Wissenschaft, nicht mehr die zweiten zu sein.

Seit dem Regierungsantritt des Zweiten Friedrichs ist das Jahrhundert abgerollt, und auf's neue sehen wir hoch auf dem Gipfel seiner Zeit, als eine Leuchte Gottes, den König, und aufs neue unter Seiner schirmenden Aegide Sein Preufsenland einen bewunderten Mittelpunct der wissenschaftlichen Welt. Aber es sind jetzt nicht mehr Fremde, welche kommen, um den Glanz ihres wissenschaftlichen Ruhmes in dem Glanze des Thrones zu spiegeln, und weiterziehen. Es sind die Kinder des eignen Volkes; aus dem Osten, dem Westen, aus den Marken, aus allen Gauen des Reiches Eurer Majestät sind sie zusammengetreten, um den Dom der Wissenschaft aufzubauen und seinen hohen Chor immer höher zu wölben. Als sichtbares Zeichen allem Volke, dafs die Ehre wissenschaftlichen Werkes solle hochgehalten werden, hat der Königliche Bauherr jene in ihrer Art einzige Ordensstiftung gestellt, welche zugleich ein Band um die Werkmeister aller Länder schlingt. In der Nähe Seines Thrones sehen wir freudig den weisen Altmeister, den vielgewunderten, in allen Zungen und Welttheilen gepriesenen, dessen Name das Symbol jeder Wissenschaftlichkeit ist.

An dem ruhmvollen Werke freute auch ich mich Theil zu haben, als mich eine unheilvolle Krankheit von der Arbeit hinwegzunehmen drohte. Eurer Königlichen Majestät fürsorgende Gnade hat zur Wiederherstellung meiner Gesundheit mir einen längeren Aufenthalt in Rom, die Zurückversetzung in meine Heimath gewährt, mir die Mittel zur Subsistenz gesichert, hat gewollt, dafs ich in Mufse die wiedergewonnenen wenn auch erschütterten Kräfte ganz meinem wissenschaftlichen Berufe zuwenden soll. Es

hat mich gedrängt, ein Buch, zu dessen Anfang und Vollendung ich die Kraft allein durch diese Gnade Eurer Majestät gefunden habe, Eurer Königlichen Majestät als ein Zeichen meines innigen Dankgefühls zu Füfsen zu legen. Aber ich habe gezweifelt, ob eine aus allen Theilen der Mathematik zusammengefügte Mosaikarbeit sich den Augen Eurer Majestät darstellen dürfte; ob ich nicht die Vollendung einer der von mir vorbereiteten, vielleicht minder unwerthen, Arbeiten abwarten sollte, welche in mehr künstlerischer Einheit einen Hauptzweig der Wissenschaft abschliefsen. Eurer Königlichen Majestät dieses mein Werk, wie es ist, als Dankesopfer darzubringen, ermuthigte mich, wie ich gestehe, der Vorgang, dafs sich auch Name und Bildnifs Friedrichs des Zweiten vor der Sammlung mathematischer Abhandlungen JOHANN BERNOULLIS findet. Und so habe ich es gewagt, mit dem erhabnen Namen Eurer Königlichen Majestät auch mein Buch zu zieren; das Bild ist dem Innersten meines Herzens eingeprägt.

In tiefster Unterwürfigkeit ersterbe ich

Grofsmächtigster König und Herr

Eurer Königlichen Majestät

unterthänigster Diener

C. G. J. Jacobi,

Professor und Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften.

Berlin,
den 30. August 1846.

Mathematische Abhandlungen.

INDEX.

(Sämmtliche Abhandlungen sind auch in Crelle's „Journal für die reine und angewandte Mathematik Band XXVI. XXVII. XXIX. XXX. XXXII." erschienen.)

Caput secundum.

De usu novi Multiplicatoris in aequationibus differentialibus integrandis. Principium ultimi Multiplicatoris.

Caput tertium.

Theoria novi Multiplicatoris ad varia exempla applicata.

1.

Ueber die Entwicklung des Ausdrucks

$[aa - 2aa'(\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\vartheta - \vartheta')) + a'a']^{-\frac{1}{2}}$.

1.

Man kann einen Ausdruck von der Form

$$V = \frac{1}{\sqrt{(AA+BB+CC)}}$$

durch das bestimmte Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\eta}{A+iB\cos\eta+iC\sin\eta},$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist, darstellen. Setzt man in dieser Formel

$$A = a\cos\omega - a'\cos\varphi,$$
$$B = a\sin\omega\cos\vartheta - a'\sin\varphi\cos\vartheta',$$
$$C = a\sin\omega\sin\vartheta - a'\sin\varphi\sin\vartheta',$$

so erhält man den zur Entwicklung vorgelegten Ausdruck durch das bestimmte Integral

$$V = \frac{1}{\sqrt{[(aa-2aa'(\cos\omega\cos\varphi+\sin\omega\sin\varphi\cos(\vartheta-\vartheta'))+a'a']}}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\eta}{a(\cos\omega+i\sin\omega\cos(\vartheta-\eta)) - a'(\cos\varphi+i\sin\varphi\cos(\vartheta'-\eta))}$$

ausgedrückt. Es wird daher, wenn man

$$V = \frac{Y_0}{a} + Y_1\frac{a'}{a^2} + Y_2\frac{a'^2}{a^3} + \text{etc.}$$

setzt, das allgemeine Glied der Entwicklung Y_n durch das bestimmte Integral

$$Y_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{[\cos\varphi+i\sin\varphi\cos(\vartheta'-\eta)]^n\,d\eta}{[\cos\omega+\sin\omega\cos(\vartheta-\eta)]^{n+1}}$$

gegeben. Setzt man

$$[\cos\varphi + i\sin\varphi\cos(\vartheta'-\eta)]^n = X_n + 2iX_n'\cos(\vartheta'-\eta) - 2X_n''\cos2(\vartheta'-\eta)\ \text{etc.}$$
$$[\cos\omega + i\sin\omega\cos(\vartheta-\eta)]^{-(n+1)} = P_n + 2iP_n'\cos(\vartheta-\eta) - 2P_n''\cos2(\vartheta-\eta)\ \text{etc.},$$

so giebt die vorstehende Formel:

$$Y_n = P_nX_n - 2P_n'X_n'\cos(\vartheta-\vartheta') + 2P_n''X_n''\cos2(\vartheta-\vartheta')\ \text{etc.}$$

Die Gröſsen P_n, P_n' etc. hängen nur von ω, die Gröſsen X_n, X_n' etc. nur

von Φ ab. Sie müssen ferner dieselben Functionen respective von ω und Φ, oder nur um einen Zahlenfactor verschieden sein, da V und also auch Y_n ungeändert bleibt, wenn man Φ und ω mit einander vertauscht.

Setzt man $\omega = 0$, so erhält man aus dem Vorigen:

$$Y_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\cos\Phi + i\sin\Phi\cos(\vartheta' - \eta)]^n \, d\eta = X_n,$$

$$\frac{1}{\sqrt{(aa - 2aa'\cos\varphi + a'a')}} = \frac{X_0}{a} + X_1\frac{a'}{a^2} + X_2\frac{a'^2}{a^3} + \text{etc.}$$

Setzt man $\Phi = 0$, so erhält man

$$Y_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\cos\omega + i\sin\omega\cos(\vartheta - \eta)]^{-(n+1)} \, d\eta = P_n,$$

$$\frac{1}{\sqrt{(aa - 2aa'\cos\omega + a'a')}} = \frac{P_0}{a} + P_1\frac{a'}{a^2} + P_2\frac{a'^2}{a^3} + \text{etc.},$$

wo die ersten Coëfficienten $X_0 = P_0 = 1$ werden, wie sich ergiebt, wenn man $a = 0$ setzt. In den beiden Integralen, durch welche X_n und P_n bestimmt werden, kann man für $\vartheta' - \eta$, $\vartheta - \eta$ blofs η schreiben. Da die beiden Radicale gleich werden, wenn man $\Phi = \omega$ setzt, so folgt, dafs P_n und X_n genau dieselben Functionen respective von ω und Φ sind.

Die im Vorhergehenden bewiesenen Formeln geben folgenden Satz:

„Wenn $\frac{1}{\sqrt{(aa - 2aa'\cos\varphi + a'a')}} = \frac{1}{a} + X_1\frac{a'}{a^2} + X_2\frac{a'^2}{a^3}$ etc., und P_n dieselbe Function von ω wie X_n von Φ ist, so hat man

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{[aa - 2aa'(\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\vartheta - \vartheta')) + a'a']}}$$
$$= \frac{1}{a} + P_1 X_1 \frac{a'}{a^2} + P_2 X_2 \frac{a'^2}{a^3} + \text{etc.}"$$

Dieses schöne, von *Legendre* gefundene Resultat und die Anwendungen, die er davon gemacht, haben den Anstofs zu *Laplace's* tiefsinnigen Untersuchungen über die Entwicklung der Functionen zweier Winkel gegeben.

2.

Die Ausdrücke von X_n, X_n' etc., P_n, P_n' etc. findet man mit Hülfe des *Taylor*schen Lehrsatzes und einer häufig anwendbaren Ausdehnung desselben auf Entwicklungen, welche nicht blofs die ganzen positiven Potenzen des Increments enthalten. Setzt man nämlich

$$\cos\Phi = x, \quad i\sin\Phi e^{i\eta} = z,$$

so hat man die merkwürdige Gleichung

$$2z[\cos\Phi + i\sin\Phi\cos\eta] = z[2\cos\Phi + i\sin\Phi e^{i\eta} + i\sin\Phi e^{-i\eta}]$$
$$= 2xz + zz - \sin^2\Phi = (x+z)^2 - 1,$$

und daher

$$[(x+z)^2-1]^n = 2^n z^n [\cos\Phi + i\sin\Phi\cos\eta]^n$$
$$= 2^n z^n [X_n + iX_n' e^{i\eta} - X_n'' e^{2i\eta} - iX_n''' e^{3i\eta} \text{ etc.}$$
$$+ iX_n' e^{-i\eta} - X_n'' e^{-2i\eta} - iX_n''' e^{-3i\eta} \text{ etc.}]$$
$$= 2^n z^n \left[X_n + X_n' \frac{z}{\sin\varphi} + X_n'' \frac{z^2}{\sin^2\varphi} + X_n''' \frac{z^3}{\sin^3\varphi} \text{ etc.}\right.$$
$$\left. - X_n' \sin\Phi . z^{-1} + X_n'' \sin^2\Phi . z^{-2} - X_n''' \sin^3\Phi . z^{-3} \text{ etc.}\right].$$

Hier ist $X_n^{(m}$ in die beiden Ausdrücke

$$\frac{2^n}{\sin^m\varphi} z^{n+m} \quad \text{und} \quad (-1)^m 2^n \sin^m\Phi\, z^{n-m}$$

multiplicirt. Nach dem *Taylor*schen Lehrsatze sind aber die Coëfficienten von z^{n+m} und z^{n-m} in der Entwicklung von $[(x+z)^2-1]^n$:

$$\frac{d^{n+m}.(x^2-1)^n}{\Pi(n+m).dx^{n+m}}, \quad \frac{d^{n-m}.(x^2-1)^n}{\Pi(n-m).dx^{n-m}};$$

wo $\Pi k = 1.2\ldots.k$. Man hat daher für $X_n^{(m)}$ die beiden Ausdrücke

$$X_n^{(m)} = \frac{\sin^m\varphi}{2^n} . \frac{d^{n+m}.(x^2-1)^n}{\Pi(n+m).dx^{n+m}} = \frac{(-1)^m}{2^n \sin^m\varphi} . \frac{d^{n-m}.(x^2-1)^n}{\Pi(n-m).dx^{n-m}}.$$

Für $m=0$ geben beide

$$X_n = \frac{d^n.(x^2-1)^n}{2^n \Pi n . dx^n}.$$

Man kann daher für den ersten der beiden Ausdrücke von $X_n^{(m)}$ setzen:

$$X_n^{(m)} = \frac{\Pi n}{\Pi(n+m)} . (1-xx)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m X_n}{dx^m}.$$

Führt man, um den Ausdruck von $P_n^{(m)}$ zu finden, die ähnlichen Bezeichnungen

$$\cos\omega = p \quad \text{und} \quad i\sin\omega e^{i\eta} = z$$

ein, so erhält man wieder

$$[(p+z)^2-1]^{-(n+1)} = (2z)^{-(n+1)} [\cos\omega + i\sin\omega\cos\eta]^{-(n+1)}$$
$$= (2z)^{-(n+1)} \left[P_n + P_n' \frac{z}{\sin\omega} + P_n'' \frac{z^2}{\sin^2\omega} + P_n''' \frac{z^3}{\sin^3\omega} \text{ etc.}\right.$$
$$\left. - P_n' \sin\omega . z^{-1} + P_n'' \sin^2\omega . z^{-2} - P_n''' \sin^3\omega . z^{-3} \text{ etc.}\right].$$

Die Coëfficienten von $z^{-(n+1-m)}$, $z^{-(n+1+m)}$ werden hier

$$\frac{2^{-(n+1)}}{\sin^m\omega} . P_n^{(m)}, \quad (-1)^m 2^{-(n+1)} \sin^m\omega . P_n^{(m)}.$$

Um die Coëfficienten derselben Potenzen von z aus der Entwicklung von $[(p+z)^2-1]^{-(n+1)}$ zu erhalten, bemerke ich, dafs man dasselbe Prinzip,

welches die *Taylor*sche Reihe giebt, dafs nämlich die nach p und z genommenen partiellen Differentialquotienten einer Function von $p+z$ einander gleich sind, auch mit Vortheil auf Entwicklungen anwenden kann, welche, wie die hier vorliegenden, positive und negative Potenzen von z in's Unendliche enthalten. Ist u_k der Coëfficient von z^k, so wird der Coëfficient von z^{k+m}, je nachdem k positiv oder negativ ist,

$$\frac{\Pi k}{\Pi(k+m)} \cdot \frac{d^m u_k}{dp^m} \text{ oder } \frac{(-1)^m \Pi(-k-m-1)}{\Pi(-k-1)} \cdot \frac{d^m u_k}{dp^m}$$

und der Coëfficient von z^{k-m}

$$\frac{\Pi k}{\Pi(k-m)} \int^m u_k \, dp^m \text{ oder } (-1)^m \frac{\Pi(-k+m-1)}{\Pi(-k-1)} \cdot \int^m u_k \, dp^m.$$

Nun kann man der Natur der Sache nach keinen Uebergang von den ganzen positiven zu den ganzen negativen Potenzen von z machen, und umgekehrt. Denn da in der Entwicklung kein Logarithmus von z vorkommt, so kann auch das nach z genommene Differential nicht den Term $\frac{1}{z}$ enthalten. Es kann daher auch das ihm gleiche partielle Differential nach p nicht den Term $\frac{1}{z}$ enthalten, oder: *der Coëfficient von* $\frac{1}{z}$ *in einer von* $\log z$ *freien Entwicklung einer Function von* $p+z$ *ist immer eine Constante.* Hieraus folgt allgemein, dafs der Coëfficient von $z^{-(1+k)}$ eine ganze rationale Function von p von der $k$ten Ordnung ist.

In dem vorliegenden Problem ist P_n und daher der Coëfficient von $z^{-(n+1)}$ gegeben. Denn da P_n dieselbe Function von p wie X_n von X ist, so hat man auch

$$P_n = \frac{d^n . (p^2-1)^n}{2^n \Pi n . dp^n}.$$

Da $2^{-(n+1)} P_n$ der Coëfficient von $z^{-(n+1)}$ ist, so wird nach dem Vorhergehenden, wenn man $k = -n-1$ setzt, der Coëfficient von $z^{-(n+1)+m}$

$$(-1)^m 2^{-(n+1)} \frac{\Pi(n-m)}{\Pi n} \cdot \frac{d^m P_n}{dp^m}$$

und der Coëfficient von $z^{-(n+1)-m}$

$$(-1)^m 2^{-(n+1)} \frac{\Pi(n+m)}{\Pi n} \int^m P_n \, dp^m,$$

wo die nach einander zu bildenden Integrale für $p = \pm 1$ verschwinden müssen, da für $p = \pm 1$ die zu entwickelnde Function $z^{-(n+1)} = (+z)^{-(n+1)}$ wird, deren Entwicklung keine höheren negativen Potenzen als die $-(n+1)$te enthält. Man hat daher für $P_n^{(m)}$ die beiden Ausdrücke

$$P_n^{(m)} = (-1)^m \frac{\Pi(n-m)}{\Pi n} \sin^m \omega \frac{d^m P_n}{dp^m}$$
$$= \frac{\Pi(n+m)}{\Pi n} \cdot \frac{1}{\sin^m \omega} \int^m P_n \, dp^m.$$

Vergleicht man die für $P_n^{(m)}$ und $X_n^{(m)}$ gefundenen Ausdrücke, so sieht man, dafs man $P_n^{(m)}$ aus $X_n^{(m)}$ erhält, wenn man p für x setzt und mit

$$(-1)^m \frac{\Pi(n+m)\Pi(n-m)}{\Pi n \Pi n}$$

multiplicirt. Man hat daher zwischen den bestimmten Integralen, durch welche man $X_n^{(m)}$ und $P_n^{(m)}$ ausdrücken kann, die Relation

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos m\eta \, d\eta}{[\cos\omega + i \sin\omega \cos\eta]^{n+1}}$$
$$= (-1)^m \frac{\Pi(n+m)\Pi(n-m)}{\Pi n \Pi n} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos\omega + i \sin\omega \cos\eta]^n \cos m\eta \, d\eta$$
$$= (-i)^m \, 2^{-(n+1)} \frac{\Pi(n-m)}{\Pi n} \sin^m \omega \frac{d^{n+m} \cdot (pp-1)^n}{dp^{n+m}},$$

wo $p = \cos\omega$ und $m \leqq n$. Einer meiner jüngeren Freunde, Herr Dr. *Heyne*, hat bemerkt, dafs die hier zwischen den bestimmten Integralen gefundene Relation in der *Euler*schen Formel

$$\int_0^\pi \frac{\cos mx \, dx}{[aa + 2ab\cos x + bb]^{n+1}}$$
$$= (-1)^m \frac{\Pi(n+m)\Pi(n-m)}{\Pi n \Pi n} \cdot \frac{1}{(aa-bb)^{2n+1}} \int_0^\pi [aa + 2ab\cos x + bb]^n \cos mx \, dx$$

enthalten ist, wenn man $a = \cos\frac{1}{2}\Phi$, $b = i \sin\frac{1}{2}\Phi$ setzt.

Substituirt man die für $X_n^{(m)}$, $P_n^{(m)}$ gefundenen Werthe

$$X_n^{(m)} = \frac{\Pi n \cdot \sin^m \varphi}{\Pi(n+m)} \cdot \frac{d^m X_n}{dx^n},$$
$$P_n^{(m)} = (-1)^m \frac{\Pi(n-m)\sin^m \omega}{\Pi n} \cdot \frac{d^m P_n}{dp^n}$$

in den für Y_n gefundenen Ausdruck

$$Y_n = P_n X_n - 2P_n' X_n' \cos(\vartheta - \vartheta') + 2P_n'' X_n'' \cos 2(\vartheta - \vartheta') - \text{etc.},$$

so erhält man

$$Y_n = P_n X_n + \frac{2\Pi(n-1)\sin\omega \sin\varphi}{\Pi(n+1)} \cdot \frac{dP_n}{dp} \cdot \frac{dX_n}{dx} \cos(\vartheta - \vartheta')$$
$$+ \frac{2\Pi(n-2)\sin^2\omega \sin^2\varphi}{\Pi(n+2)} \cdot \frac{d^2 P_n}{dp^2} \cdot \frac{d^2 X_n}{dx^2} \cos 2(\vartheta - \vartheta') + \text{etc.},$$

welches die von *Laplace* auf ganz verschiedenem Wege gefundene Reihe ist.

Wir fanden allgemein für den Coëfficienten von z^{-n-1-m} in der Entwicklung von $[(z+p)^2-1]^{-n-1}$:

$$(-1)^m\, 2^{-n-1} \sin^m\omega \,.\, P_n^{(m)} = \frac{(-1)^m\, \Pi(n+m)}{2^{n+1}\,\Pi n} \int^m P_n\, dp^n.$$

Setzt man für P_n seinen Werth, so kann man denselben, wenn $m>n$, so darstellen:

$$\frac{(-\sin\omega)^m\, P_n^{(m)}}{2^{n+1}} = \frac{(-1)^m\, \Pi(n+m)}{2^{2n+1}\,\Pi n\, \Pi n} \int^{m-n} (pp-1)^n \,.\, dp^{m-n}.$$

Der Coëfficient von z^{-n-1+m} war

$$\frac{P_n^{(m)}}{2^{n+1}\sin^m\omega};$$

er findet sich daher durch die vorstehende Gleichung:

$$\frac{(-1)^m\, \Pi(n+m)}{2^{2n+1}\,\Pi n\, \Pi n} \cdot \frac{1}{(pp-1)^m} \int^{m-n} (pp-1)^n\, dp^{m-n}.$$

Diese Formel giebt die Coëfficienten aller positiven Potenzen von z in der vorgelegten Entwicklung. Setzt man in derselben $m=n+1$, so erhält man den von z freien Term

$$\frac{P_n^{(n+1)}}{2^{n+1}\sin^{n+1}\omega} = \frac{(-1)^{n+1}\, \Pi(2n+1)}{2^{2n+1}.\,\Pi n\, \Pi n} \cdot \frac{1}{(pp-1)^{n+1}} \int (pp-1)^n\, dp.$$

Aber durch dieselbe Betrachtung, welche die *Taylor*sche Reihe giebt, findet man auch hier den Coëfficienten der positiven Potenz z^{m-n-1}, wenn man den von z freien Term $m-n-1$ mal nach p differenziirt und durch $\Pi(m-n-1)$ dividirt. Man erhält daher für diesen Coëfficienten, wenn $m>n+1$, den doppelten Ausdruck

$$\frac{P_n^{(m)}}{2^{n+1}\sin^m\omega} = \frac{(-1)^m\, \Pi(n+m)}{2^{2n+1}\,\Pi n\, \Pi n} \cdot \frac{1}{(pp-1)^m} \int^{m-n} (pp-1)^n\, dp^{m-n}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\, \Pi(2n+1)}{2^{2n+1}\,\Pi n\, \Pi n\, \Pi(m-n-1)} \cdot \frac{d^{m-n-1}.\,[(pp-1)^{-n-1}\int (pp-1)^n\, dp]}{dp^{m-n-1}}.$$

Die Vergleichung dieser beiden Formen ergiebt die Gleichung

$$\int^{m-n} (pp-1)^n\, dp^{m-n} =$$

$$(-1)^{m-n-1}\, \frac{\Pi(2n+1).\,(pp-1)^m}{\Pi(n+m)\, \Pi(n-m-1)} \cdot \frac{d^{m-n-1}.\,[(pp-1)^{-n-1}\int (pp-1)^n\, dp]}{dp^{m-n-1}}.$$

Um eine convergirende Entwicklung zu erhalten, mufs man die beiden Factoren des vorgelegten Ausdrucks

$$\frac{1}{[(z+p)^2-1]^{n+1}} = \frac{1}{(p+1+z)^{n+1}} \cdot \frac{1}{(z+p-1)^{n+1}},$$

den ersten nach aufsteigenden, den zweiten nach absteigenden Potenzen von z entwickeln, wenn p zwischen 0 und 1 liegt, und umgekehrt, wenn p sich zwischen 0 und -1 befindet. So lange p in den angegebenen Intervallen bleibt, bleibt auch die Entwicklung dieselbe. Da nun für $p = +1$ und für $p = -1$ keine höhern negativen Potenzen als die $-(n+1)$te in der Entwicklung vorkommen, so hat man in den für $P_n^{(m)}$ angegebenen Werthen die Integrale so zu nehmen, dafs sie für $p = 1$ oder für $p = -1$ verschwinden, je nachdem p positiv oder negativ ist. Wenn $m \leqq n$, werden beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt.

Königsberg am 29. Mai 1843.

2.

Zur Theorie der elliptischen Functionen.

1.

Unter den Formeln, durch welche man die vielen von mir in den *Fundam. nov.* gegebenen Entwicklungen mit leichter Mühe noch vermehren kann, scheint mir die nachfolgende, welche die Tangente der halben Differenz der Amplitude des Integrals u und der Gröfse $\frac{\pi u}{2K}$ selber ergiebt, einen eigenthümlichen Character zu haben.

Da
$$\sqrt{\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - x)}{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + x)},$$
so kann man die Formel *F. N.* S. 99 (4.) wie folgt schreiben:

$$1.\quad \sqrt{\left(\frac{1-\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1+\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}\right)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - x)(1-2q\sin x+q^2)(1-2q^2\sin x+q^4)\ldots.}{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + x)(1+2q\sin x+q^2)(1+2q^2\sin x+q^4)\ldots.}.$$

In der Formel (S. 183)
$$\sqrt[4]{q}.\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)\ldots.$$
$$= \frac{\sqrt[4]{q}.\sin x - \sqrt[4]{q^9}.\sin 3x + \sqrt[4]{q^{25}}.\sin 5x - \ldots.}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots.}$$
setze man $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - x)$ und $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + x)$ für x und gleichzeitig $\sqrt{q}$ für q, so erhält man nach Division mit $\sqrt[4]{q}$ den Zähler und Nenner in (1.), und daher

$$2.\quad \sqrt{\left(\frac{1-\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1+\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}\right)} = \operatorname{tang}\left(45^0 - \tfrac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\right)$$
$$= \frac{\sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x) - q\sin 3(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x) + q^3\sin 5(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x) - \ldots.}{\sin(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x) - q\sin 3(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x) + q^3\sin 5(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x) - \ldots.},$$
wo die Exponenten von q die dreieckigen Zahlen sind. Setzt man hierin $\frac{1}{2}\pi - x$ für x, so erhält man

$$3.\quad \operatorname{tang}\left(45^0 - \tfrac{1}{2}\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{\sin\frac{1}{2}x - q\sin\frac{3}{2}x + q^3\sin\frac{5}{2}x - q^6\sin\frac{7}{2}x + \ldots.}{\cos\frac{1}{2}x + q\cos\frac{3}{2}x + q^3\cos\frac{5}{2}x + q^6\cos\frac{7}{2}x + \ldots.}. \; ^{*)}$$

---

*) Ich bemerke bei dieser Gelegenheit die Formel
$$\sqrt{k'}\operatorname{tang}\operatorname{am}\tfrac{1}{2}u = \sqrt{(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}u.\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\operatorname{coam}u))},$$
welche etwas bequemer als die von *Legendre* für die Halbirung gegebne ist.

Nach der S. 31 gemachten Bemerkung geben am $\frac{2Kx}{\pi}$ und $\frac{1}{2}\pi$ — coam $\frac{2Kx}{\pi}$ in einander über, wenn man $-q$ für q setzt. Die vorstehende Formel giebt daher sogleich auch folgende:

$$3. \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\sin\frac{1}{2}x + q\sin\frac{3}{2}x - q^3\sin\frac{5}{2}x - q^6\sin\frac{7}{2}x + \dots}{\cos\frac{1}{2}x - q\cos\frac{3}{2}x - q^3\cos\frac{5}{2}x + q^6\cos\frac{7}{2}x + \dots},$$

wo im Zähler und Nenner immer zwei positive und zwei negative Zeichen mit einander abwechseln. Man erhält aus dieser Formel, wenn $i = \sqrt{-1}$,

$$4. \quad \frac{1 + i\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1 - i\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}} = e^{i\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}ix} - q e^{-\frac{3}{2}ix} - q^3 e^{\frac{5}{2}ix} + q^6 e^{-\frac{7}{2}ix} + q^{10} e^{\frac{9}{2}ix} - \dots}{e^{-\frac{1}{2}ix} - q e^{\frac{3}{2}ix} - q^3 e^{-\frac{5}{2}ix} + q^6 e^{\frac{7}{2}ix} + q^{10} e^{-\frac{9}{2}ix} - \dots}$$

und hieraus

$$e^{i\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} - x\right)} = \frac{1 + i\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} - x\right)}{1 - i\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} - x\right)}$$

$$= \frac{1 - q e^{-2ix} - q^3 e^{2ix} + q^6 e^{-4ix} + q^{10} e^{4ix} - \dots}{1 - q e^{2ix} - q^3 e^{-2ix} + q^6 e^{4ix} + q^{10} e^{-4ix} - \dots}$$

oder

$$5. \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} - x\right) =$$

$$\frac{(q - q^3)\sin 2x - (q^6 - q^{10})\sin 4x + (q^{15} - q^{21})\sin 6x - \dots}{1 - (q + q^3)\cos 2x + (q^6 + q^{10})\cos 4x - (q^{15} + q^{21})\cos 6x + \dots}.$$

Diese merkwürdige Formel ist zur Berechnung einzelner Werthe oder von Tafeln vorzugsweise bequem. Da $\operatorname{tang}\operatorname{am}\frac{1}{2}K = \frac{1}{\sqrt{k'}}$, also

$$\operatorname{tang}(\operatorname{am}\tfrac{1}{2}K - 45^0) = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}},$$

so erhält man aus (4.), wenn man $x = \frac{1}{4}\pi$ setzt,

$$6. \quad \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'} + \sqrt{(2(1 + k'))}} = \frac{q - q^3 - q^{15} + q^{21} + q^{45} - q^{55} - \dots}{1 - q^6 - q^{10} + q^{28} + q^{36} - q^{66} - \dots}.$$

Setzt man $q = b^8$, so erhält der Bruch rechts die Form

$$\frac{\Sigma \pm b^{(8k \pm 3)^2}}{\Sigma \pm b^{(8k \pm 1)^2}}.$$

Das Zeichen + oder — ist zu nehmen, je nachdem k gerade oder ungerade ist.

Wenn der Modul der Einheit sehr nahe kommt, mufs man sich der Entwicklungen bedienen, welche statt der Kreisfunctionen Exponential-

gröfsen enthalten. Setzt man ix für x und k' für k, so verwandelt sich

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \quad \text{in} \quad i \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi},$$

und gleichzeitig q in q', wo q und q' durch die Gleichung

$$\log q \,.\, \log q' = \pi^2$$

mit einander verbunden sind. Nennt man u das elliptische Integral erster Gattung und setzt

$$z = e^x = e^{\frac{\pi u}{2K'}}, \qquad \operatorname{am}(u, k) = \varphi,$$

so erhält man aus (4.) folgende Entwicklung von ebenfalls eigenthümlicher Form:

$$7. \quad \operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1 - q'z^2 - q'^3 z^{-2} + q'^6 z^4 + q'^{10} z^{-4} - \ldots}{1 - q'z^{-2} - q'^3 z^2 + q'^6 z^{-4} + q'^{10} z^4 - \ldots}.$$

Wenn φ sich sehr der Gränze $\frac{1}{2}\pi$ und daher z der Gränze $\frac{1}{\sqrt{q'}}$ nähert, werden je zwei aufeinander folgende Terme in Zähler und Nenner nahe gleich oder entgegengesetzt. Vereinigt man sie in ein Glied, so bleibt die Convergenz noch überaus grofs. Ist z. B. $k = \frac{19}{20}$, so wird ungefähr $q = \frac{1}{8}$, so dafs die Formel (5.) noch sehr rasch convergirt. Aber es wird dann schon q' ungefähr $\frac{1}{180}$, so dafs man für alle Amplituden mit der Formel

$$\operatorname{tang}(41^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1 - q'z^2 - q'^3 z^{-2}}{1 - q'z^{-2} - q'^3 z^2}$$

ausreicht, um φ bis auf 0″01 genau zu haben.

Ich will noch einen sehr convergirenden Ausdruck für die ganzen Integrale zweiter Gattung hinzufügen. Vergleicht man nämlich die beiden Formeln *Fund.* S. 110.

$$\tfrac{1}{2}\pi A = \left(\frac{2xK}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}\, dx = 4\pi \left[\frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q^3}{(1-q^3)^2} + \frac{q^5}{(1-q^5)^2} \text{ etc.}\right]$$

$$\tfrac{1}{2}\pi B = \left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}\, dx = 4\pi \left[\frac{q}{(1+q)^2} + \frac{q^3}{(1+q^3)^2} + \frac{q^5}{(1+q^5)^2} \text{ etc.}\right],$$

so sieht man, dafs A in $-B$, B in $-A$ übergeht, wenn man $-q$ für q setzt. Differenziirt man ferner die Formel *Fund.* S. 103 (3.), nemlich

$$\log \frac{2K}{\pi} = 4\left[\frac{q}{1+q} + \frac{q^3}{3(1+q^3)} + \frac{q^5}{5(1+q^5)} + \text{etc.}\right],$$

so erhält man

$$\frac{2q\,dK}{K\,dq} = B.$$

Hieraus folgt nach S. 184 (6.)

$$4q\frac{d}{dq}\sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)}.B = k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}.\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\frac{1}{2}\pi\Delta(\varphi)}$$
$$= 8(q+4q^4+9q^9+16q^{16} \text{ etc.}).$$

Setzt man hierin $-q$ für q, wodurch K in $k'K$, B in $-A$ übergeht, so erhält man

$$\sqrt{k'}.k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\frac{1}{2}\pi\Delta} = 8(q-4q^4+9q^9-16q^{16} \text{ etc.}),$$

und daher, durch Addition und Subtraction, zur Bestimmung der ganzen Integrale zweiter Gattung die Formeln:

$$C = k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(\cos^2\varphi+\sqrt{k'}.\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\frac{1}{2}\pi\Delta\varphi} = 16(q+9q^9+25q^{25}\ldots.)$$
$$D = k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(\cos^2\varphi-\sqrt{k'}.\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\frac{1}{2}\pi\Delta\varphi} = 64(q^4+4q^{16}+9q^{36} \text{ etc.}),$$

von denen besonders die zweite bemerkenswerth ist, indem sie zeigt, dafs der Werth des ganzen elliptischen Integrals zweiter Gattung

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(\cos^2\varphi-\sqrt{k'}.\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\Delta\varphi}$$

von der Ordnung der *sechsten* Potenz des Moduls und von

$$\frac{64q^4}{k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

nur in Gröfsen von der Ordnung der *dreifsigsten* Potenz des Moduls verschieden ist, welche aufserdem noch durch überaus grofse Zahlen dividirt wird. Man sieht auch aus der vorstehenden Formel, dafs

$$B < A \quad \text{und} \quad B > \sqrt{k'}.A.$$

Um aus D den Werth von E^I zu finden, dient die Formel

$$(1+\sqrt{k'})E^I = \sqrt{k'}(1+\sqrt{k'^3})F^I + \frac{\frac{1}{2}\pi D}{\left(\frac{2F^I}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Auch kann man die Formel

$$-(1+\sqrt{k'})\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = (1-\sqrt{k'})F^I - \frac{\pi D}{k^2\left(\frac{2F^I}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

bemerken. Da immer

$$q > \frac{k^2}{16}, \quad q < \frac{k^2}{16k'},$$

so ist in der Entwicklung von D der erste Term, welcher, extreme Fälle abgerechnet, allein einen Werth erhält, immer $< \frac{k^8}{1024k'^4}$. Man sieht,

wie genau für nicht allzugrofse Moduln die beiden Gröfsen

$$(1+\sqrt{k'})F^I \quad \text{und} \quad \sqrt{k'}(1+\sqrt{k'^3})E^I$$

mit einander übereinkommen, indem die Differenz, nach den Potenzen von k^2 entwickelt, mit dem Term $\frac{1}{2}\pi.\frac{k^8}{1024}$ beginnt.

2.

Man kann bei Berechnung der elliptischen Integrale mit Vortheil die *Gaufsischen* Tafeln anwenden, in welchen für einen unter der Columne A als Argument gegebenen $\log x$, wo $x>1$ der Werth von $\log(1+x)$ in der Columne C sich befindet. Ich will hierüber in einige nähere Erörterungen eingehen.

Es sollen im Folgenden die Werthe von A mit einem lateinischen Buchstaben und die entsprechenden von $C-\frac{1}{2}A-0.3010300$ mit dem entsprechenden griechischen bezeichnet werden, so dafs man, wenn $m>n$ und $a=\log\frac{m}{n}$,

$$\alpha = \log\frac{m+n}{2\sqrt{(mn)}}$$

oder α gleich dem Logarithmus des Verhältnisses des arithmetischen und geometrischen Mittels von m und n setzt. Ist $-a$ der Logarithmus des Complements eines gegebenen Moduls, so wird hiernach $-\alpha$ der Logarithmus des Complements des kleineren Moduls, in welchen der gegebene durch die *Landen*sche Substitution transformirt wird. Setzt man nun nacheinander

$$a=\log\frac{m}{n},\quad a'=\alpha,\quad a''=\alpha',\quad a'''=\alpha'' \text{ u. s. w.},$$

indem man immer den gefundenen Werth von $\alpha^{(i)}$ zum Argument A macht und den entsprechenden Werth von $\alpha^{(i+1)}=C-\frac{1}{2}A-0.3010300$ aufsucht, bis man auf verschwindende Gröfsen kommt, so wird, nach der S. 97 angewandten Bezeichnung,

$$a=\log\frac{m}{n},\quad a'=\alpha=\log\frac{m'}{n'},\quad a''=\alpha'=\log\frac{m''}{n''} \text{ etc.}$$

Man erhält ferner aus den Formeln

$$mn=n'n',\quad m'n'=n''n'',\quad \ldots\ldots\quad m^{(i-1)}n^{(i-1)}=n^{(i)}n^{(i)}$$

die Gleichung

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{m'}{n'}\ldots\ldots\frac{m^{(i-1)}}{n^{(i-1)}}=\frac{n^{(i)}n^{(i)}}{nn},$$

und daher, wenn durch μ die Gränze bezeichnet wird, welcher die Gröfsen

$n^{(i)}$ sehr schnell sich nähern,

$$\log\mu = \log n + \tfrac{1}{2}[a + a' + a'' + \ldots].$$

Der so für μ erhaltene Werth giebt bekanntlich das ganze elliptische Integral erster Gattung durch die Formel

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi)}} = \frac{1}{\mu}.$$

Die Gröfsen n', n'' etc. selber findet man durch successive Addition von $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a'$ etc. vermittelst der Formeln

$$\log n' = \log n + \tfrac{1}{2}a,\quad \log n'' = \log n' + \tfrac{1}{2}a' \ldots,$$

und hieraus

$$\log m' = \log n' + a',\quad \log m'' = \log n'' + a'' \ldots.$$

Gaufs hat in seiner Abhandlung „Determinatio attractionis" auch eine sehr bequeme Anordnung für die Berechnung des ganzen elliptischen Integrals zweiter Gattung mitgetheilt. Berechnet man nämlich

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{(mm - nn)},\quad \lambda' = \frac{\lambda\lambda}{m'},\quad \lambda'' = \frac{\lambda'\lambda'}{m''}, \ldots,$$

$$\nu = \frac{2\lambda'\lambda' + 4\lambda''\lambda'' + 8\lambda'''\lambda''' + \ldots}{\lambda\lambda},$$

so findet man nach einer Formel, welche im Wesentlichen mit der von *Legendre* gegebenen übereinkommt,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi)}} = -\frac{\nu}{\mu}.$$

Die Gröfsen $\frac{4\lambda}{m}$, $\frac{4\lambda'}{m'}$, $\frac{4\lambda''}{m''}$ etc. oder $\frac{4\lambda}{m}$, $\frac{4\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}$, $\frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda'\lambda'}$ etc. sind der gegebene und die nach und nach transformirten Modulu. Nach *Fund.* S. 149 (4.) findet man die Gröfse q durch die Formel

$$\log q = 2\log\lambda + a - \tfrac{3}{2}a' - \tfrac{3}{4}a'' - \tfrac{3}{8}a''' \text{ etc.}$$

Um das unbestimmte Integral erster Gattung zu finden, hat man nach *Fund.* S. 97 die Gröfsen Δ' aus den vorhergehenden Δ durch die Formel

$$\Delta' = \sqrt{\left(\frac{mm'(\Delta + n)}{m + \Delta}\right)}$$

zu berechnen, woraus folgt:

$$\frac{m'}{\Delta'} = \sqrt{\frac{m'}{n'}}\cdot\sqrt{\frac{1 + \frac{m}{\Delta}}{2\sqrt{\frac{m}{\Delta}}}}\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{\frac{\Delta}{n}}}{1 + \frac{\Delta}{n}}},$$

$$\frac{\Delta'}{n'} = \sqrt{\frac{m'}{n'}}\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{\frac{m}{\Delta}}}{1 + \frac{m}{\Delta}}}\cdot\sqrt{\frac{1 + \frac{\Delta}{n}}{2\sqrt{\frac{\Delta}{n}}}}.$$

Setzt man daher

$$a = \log\frac{m}{n},\qquad b = \log\frac{m}{\Delta},\qquad c = \log\frac{\Delta}{n},$$
$$a' = a,\qquad b' = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma),\qquad c' = \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma),$$
$$a'' = \alpha',\qquad b'' = \tfrac{1}{2}(\alpha'+\beta'-\gamma'),\qquad c'' = \tfrac{1}{2}(\alpha'-\beta'+\gamma'),$$
$$\text{etc.}\qquad \text{etc.},$$

wo man immer, wenn man in den *Gaufsischen* Tafeln $A = a^{(i)}$, $b^{(i)}$ oder $c^{(i)}$ nimmt, die Gröfsen $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ oder $\gamma^{(i)}$ durch die Formel

$$C - \tfrac{1}{2}A - 0.3010300$$

erhält, so wird

$$\log\frac{m^{(i)}}{\Delta^{(i)}} = b^{(i)},\qquad \log\frac{\Delta^{(i)}}{n^{(i)}} = c^{(i)}.$$

Für das Integral

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi+nn\sin^2\varphi)}} = \Phi$$

findet man hiernach durch die Formel S. 98

$$\log\operatorname{tang}\mu\Phi = \log\operatorname{tang}\Phi + \log\frac{\Delta'\Delta''\Delta'''\ldots\ldots}{mm'm''\ldots\ldots}$$
$$= \log\operatorname{tang}\Phi + \log\frac{\mu}{m} - b' - b'' - b''' - \text{ etc.}$$

Man kann auch die ersten Gröfsen $\frac{m}{\Delta}$ und $\frac{\Delta}{n}$ auf analoge Art durch $\operatorname{tang}\Phi$ finden. Sind nämlich b^0, c^0 positive Gröfsen, welche durch die Gleichungen

$$\pm\log\operatorname{tang}^2\Phi = b^0,\qquad \pm\log\frac{n^2}{m^2}\operatorname{tang}^2\Phi = c^0$$

bestimmt werden, so wird

$$\log\frac{m}{\Delta} = b = \tfrac{1}{2}(\alpha^0+\beta^0-\gamma^0),\qquad \log\frac{\Delta}{n} = c = \tfrac{1}{2}(\alpha^0-\beta^0+\gamma^0),$$

wo $\alpha^0 = a$. Die Gröfse $\mu\Phi$ ist der in den Reihen-Entwicklungen mit x bezeichnete Winkel.

Aus der von *Gaufs* angewandten Substitution

$$\sin\Phi = \frac{2m\sin\varphi'}{(m+n)\cos^2\varphi'+2m\sin^2\varphi'}$$

findet man

$$\frac{\sin\varphi'}{m'} = \frac{2\sin\varphi}{m+\Delta},\qquad \operatorname{tang}\Phi' = \frac{\Delta'}{m}\operatorname{tang}\Phi,$$

wo, wie im Vorhergehenden,

$$\Delta = \sqrt{(mm\cos^2\Phi+nn\sin^2\Phi)},\qquad \Delta' = \sqrt{(m'm'\cos^2\Phi'+n'n'\sin^2\Phi')}.$$

Hieraus folgt:

$$\log\frac{\sin\varphi'}{m'}=\log\frac{\sin\varphi}{m}+\tfrac{1}{2}b-\beta,\quad \log\frac{\sin\varphi''}{m''}=\log\frac{\sin\varphi'}{m'}+\tfrac{1}{2}b'-\beta',\ \text{etc.},$$

$$\log\cos\Phi'=\log\cos\Phi+b'+\tfrac{1}{2}b-\beta,\ \log\cos\Phi''=\log\cos\Phi'+b''+\tfrac{1}{2}b'-\beta',\ \text{etc.}$$

Man hat so durch die bereits berechneten Werthe von $b^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ und durch $\log\sin\Phi$, $\log\cos\Phi$ nacheinander durch bloſse Addition die Werthe von $\log\sin\Phi'$, $\log\cos\Phi'$, $\log\sin\Phi''$, $\log\cos\Phi''$ etc. Diese Gröſsen dienen dazu, die von *Gauſs* für das *unbestimmte* Integral zweiter Gattung gegebne Formel zu berechnen, welche man, mit einer kleinen Veränderung, so darstellen kann:

$$\int_0^\varphi\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi+nn\sin^2\varphi)}}=-\nu\Phi+\frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'}+\frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'\sin\varphi''}{m''}$$
$$+\frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi''\sin\varphi'''}{m''}+\text{etc.}$$

Bezeichnet man das vorstehende Integral mit P und, wie *Legendre*, mit F^I, E^I die ganzen, mit $F(\Phi)$, $E(\Phi)$ die unbestimmten elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, so daſs $F(\Phi)=\Phi$, so wird, für $m=1$,

$$E(\Phi)=\tfrac{1}{2}(\Phi+P)+\tfrac{1}{2}(k'k')(\Phi-P),$$
$$\frac{E^I}{F^I}=\tfrac{1}{2}(1-\nu)+\tfrac{1}{2}(k'k')(1+\nu),$$

und daher

$$\frac{F^I E(\varphi)-E^I F(\varphi)}{F^I}=\tfrac{1}{2}k^2(P+\nu\Phi)$$
$$=\frac{mm-nn}{2mm}\left[\frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'}+\frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'\sin\varphi''}{m''}+\frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi''\sin\varphi'''}{m'''}+\dots\right].$$

Zufolge des oben für $\frac{\sin\varphi'}{m'}$ gegebenen Werthes wird

$$\int\frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}=\int\frac{2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{\Delta(m+\Delta)}$$

und daher

$$\tfrac{1}{2}(mm-nn)\int_0^\varphi\frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}=\log\frac{2m}{m+\Delta}.$$

Setzt man daher, wie in den *Fundam.*,

$$e^{\int_0^\varphi\frac{F^I E(\varphi)-E^I F(\varphi)}{F^I}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}}=\frac{\Theta(u)}{\Theta(o)},$$

und bemerkt die Formeln

$$(mm-nn)\frac{\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}=m'm'-n'n',\quad (mm-nn)\frac{\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda}=m''m''-n''n'',\ \text{etc.},$$

$$\frac{d\varphi}{\Delta}=\frac{d\varphi'}{\Delta'}=\frac{d\varphi''}{\Delta''}\ \text{etc.},$$

so erhält man einen neuen zur Berechnung bequemen Ausdruck für die Function $\Theta(u)$:

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(o)} = \frac{2m}{m+\Delta}\cdot\left(\frac{2m'}{m'+\Delta'}\right)^2\cdot\left(\frac{2m''}{m''+\Delta''}\right)^4\cdot\left(\frac{2m'''}{m'''+\Delta'''}\right)^8\cdots\cdot$$

Da $\log\frac{2m}{m+\Delta} = \frac{1}{2}b-\beta$, so giebt diese Formel die folgende:

$$\log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \tfrac{1}{2}b-\beta+b'-2\beta'+2b''-4\beta''+4b'''-8\beta''' \text{ etc.},$$

welcher man noch verschiedne andre Formen geben kann.

3.

Setzt man $k = \frac{\sqrt{(mm-nn)}}{m}$, $k^{(2)} = \frac{\sqrt{(m'm'-n'n')}}{m'}$, ferner

$$K^{(2)} = \tfrac{1}{2}(1+k').K, \qquad \Phi = \operatorname{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}, k\right),$$

so wird

$$\Phi' = \operatorname{am}\left(\frac{2K^{(2)}x}{\pi}, k^{(2)}\right).$$

Zufolge der S. 92 gemachten Bemerkung verwandelt sich daher k, K, Φ in $k^{(2)}$, $K^{(2)}$, Φ', wenn man q^2 für q setzt. Dies erhält eine Bestätigung durch die Formel

$$\operatorname{tang}\Phi = \frac{m\operatorname{tang}\varphi'}{\Delta'} = \frac{2}{1+k'}\cdot\frac{\operatorname{tang}\varphi'}{\sqrt{(1-k^{(2)2}\sin^2\varphi')}}.$$

Wenn man nämlich aus den S. 88 für $\sin\Phi$, $\cos\Phi$, $\Delta\Phi$ gegebnen Zerfällungen in unendliche Producte den Werth von $\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\Delta\varphi}$ entnimmt und in demselben q^2 für q setzt, so erhält man sogleich den Ausdruck für $\frac{1}{2}(1+k')\operatorname{tang}\Phi$. Umgekehrt kann man auf diese Art die vorstehende Formel, durch welche Φ aus Φ' bestimmt wird, unmittelbar aus jenen Factorenzerfällungen von $\sin\Phi$, $\cos\Phi$, $\Delta\Phi$ ableiten.

Für $m=1$ hat man die Formel S. 101 (16.):

$$\frac{2k'k'K}{\pi}\cdot\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{\cos\operatorname{coam}u}{\cos\operatorname{am}u} = \operatorname{tang}x - \frac{4q\sin 2x}{1+q} + \frac{4q^2\sin 4x}{1+q^2} - \text{etc.}$$

Setzt man hierin q^2 für q, so verwandelt sich der Ausdruck links in

$$\frac{2k'}{1+k'}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\operatorname{tang}\varphi'}{\sqrt{(1-k^{(2)2}\sin^2\varphi')}} = \frac{2k'K}{\pi}\operatorname{tang}\Phi.$$

Man kann daher zu den in den *Fundam.* mitgetheilten Reihen noch die folgende fügen:

$$\frac{2k'K}{\pi}\operatorname{tang}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \operatorname{tang}x - \frac{4q^2\sin 2x}{1+q^2} + \frac{4q^4\sin 4x}{1+q^4} - \frac{4q^6\sin 6x}{1+q^6} + \text{etc.}$$

Ueberhaupt bietet die Betrachtung, durch welche diese Formel abgeleitet ist, ein wichtiges Mittel dar, aus den gefundnen Resultaten mit Leichtigkeit neue abzuleiten. Man bemerke z. B., dafs, wenn man in dem für $\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)}}$ oben gefundnen Ausdruck $k^{(2)}$ für k oder q^2 für q setzt und ihn dann in's Quadrat erhebt, dasselbe Resultat sich ergiebt, als wenn man den Ausdruck mit $\frac{m+\Delta}{2m}$ multiplicirt. Da sich nach S. 52. $k'K$ dadurch, dafs man q^2 für q setzt, in $\sqrt{k'}.K$ verwandelt und nach S. 165.

$$\frac{\Delta}{m}.\Theta(u) = \sqrt{k'}.\Theta(u+K)$$

ist, so erhält man hieraus die Gleichung

$$2\Theta^2(\tfrac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)}) = \sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)}\Theta u + \sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)}\Theta(u+K).$$

Die oben gegebne Gleichung

$$\frac{\sin\varphi'}{m'} = \frac{2\sin\varphi}{m+\Delta}$$

kann man auch so darstellen:

$$k^{(2)}\sin^2\Phi' = \frac{1-k'}{1+k'}.\sin^2\Phi' = \frac{m-\Delta}{m+\Delta}.$$

Aus der Formel S. 173. (1.) folgt aber, wenn man $k^{(2)}$ für k setzt,

$$k^{(2)}\sin^2\Phi' = \frac{1-k'}{1+k'}\sin^2\Phi' = \frac{H^2(\frac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})}{\Theta^2(\frac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})}$$

und daher

$$\frac{H^2(\frac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})}{\Theta^2(\frac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})} = \frac{m-\Delta}{m+\Delta} = \frac{\Theta u - \sqrt{k'}.\Theta(u+K)}{\Theta u + \sqrt{k'}.\Theta(u+K)},$$

woraus

$$2H^2(\tfrac{1}{2}(1+k').u, k^{(2)}) = \sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)}\Theta u - \sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)}\Theta(u+K)$$

folgt. Ersetzt man die Formel

$$\sqrt{k^{(2)}}\sin\Phi' = \sqrt{\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)}\sin\Phi' = \frac{k\sin\varphi}{1+\frac{\Delta}{m}}$$

durch die folgende:

$$\frac{H(\frac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})}{\Theta(\frac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})} = \sqrt{k}.\frac{Hu}{\Theta u + \sqrt{k'}.\Theta(u+K)},$$

so erhält man

$$2H(\tfrac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)}).\Theta(\tfrac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)}) = \sqrt{\left(\frac{2kK}{\pi}\right)}H(u):$$

eine Formel, welche sich unmittelbar aus der Darstellung von Θu und $H u$ als unendliche Producte ergiebt. Die drei gefundenen Formeln geben die Gleichungen

$$2[1-2q^2\cos 2x+2q^8\cos 4x-2q^{18}\cos 6x+\ldots.]^2$$
$$=(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots.)(1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\ldots.)$$
$$+(1-2q+2q^4-2q^9+\ldots.)(1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\ldots.),$$

$$8[\sqrt[4]{q}.\sin x-\sqrt[4]{q^9}.\sin 3x+\sqrt[4]{q^{25}}.\sin 5x-\ldots.]^2$$
$$=(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots.)(1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\ldots.)$$
$$-(1-2q+2q^4-2q^9+\ldots.)(1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\ldots.),$$

$$[1-2q^2\cos 2x+2q^8\cos 4x-2q^{18}\cos 6x+\ldots.](\sqrt[4]{q}.\sin x-\sqrt[4]{q^9}.\sin 3x+\sqrt[4]{q^{25}}.\sin 5x\ldots.)$$
$$=(\sqrt[4]{q}+\sqrt[4]{q^9}+\sqrt[4]{q^{25}}+\ldots.)(\sqrt[4]{q}.\sin x-\sqrt[4]{q^9}.\sin 3x+\sqrt[4]{q^{25}}.\sin 5x-\ldots.).$$

Dies sind die einfachsten Fälle sehr wichtiger und sehr allgemeiner Formeln für die Verwandlung der Potenzen und Producte der Functionen Θu und $H u$ in ein Aggregat linearer Ausdrücke.

Die Rechnungsvorschriften, welche auf der von *Legendre* hauptsächlich untersuchten *Landen*schen Transformation beruhen, erfordern zur Auffindung der Werthe der unbestimmten Integrale erster Gattung den Gebrauch trigonometrischer Tafeln. Man berechnet φ_1, φ_2 etc. durch die Formel

$$\log\operatorname{tang}(\varphi_1-\varphi)=\log\operatorname{tang}\varphi-a, \quad \text{etc.}$$

Die Winkel $\frac{1}{2}\varphi_1$, $\frac{1}{4}\varphi_2$ etc. nähern sich sehr bald der Gränze

$$\mu\Phi=\mu\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi+nn\sin^2\varphi)}}.$$

Um die unbestimmten Integrale zweiter Gattung zu finden, setze man

$$\frac{Z}{m}=\frac{F^I E(\varphi)-E^I F(\varphi)}{F^I}=\frac{mm-nn}{2m}\left[\int_0^\varphi\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta}+\nu\Phi\right]$$

und bezeichne mit $\frac{Z_i}{m^{(i)}}$ die analogen Gröfsen, welche man erhält, wenn man $m^{(i)}$, $n^{(i)}$, φ_i für m, n, φ setzt. Die *Legendre*schen Formeln geben dann

$$Z_1=Z-4\lambda'\sin\varphi_1, \qquad Z_2=Z_1-4\lambda''\sin\varphi_2, \quad \text{etc.}$$

und daher

$$Z=4[\lambda'\sin\varphi_1+\lambda''\sin\varphi_2+\lambda'''\sin\varphi_3+\text{etc.}].$$

Multiplicirt man diese Formel mit

$$\frac{d\varphi}{\Delta}=\frac{1}{2}\frac{d\varphi_1}{\Delta_1}=\frac{1}{4}\frac{d\varphi_2}{\Delta_2}\ \text{etc.},$$

und bemerkt, dafs

$$\frac{4\lambda'\sin\varphi_1\, d\varphi}{\Delta}=\frac{1}{2}(mm-nn).\frac{\sin 2\varphi\, d\varphi}{mm\cos^2\varphi+nn\sin^2\varphi}=-\frac{1}{2}d\log\frac{\Delta}{m},$$

so erhält man durch Integration

$$e^{\int_0^\varphi \frac{z\,d\varphi}{\Delta}} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \sqrt{\frac{m}{\Delta}} \cdot \sqrt[4]{\frac{m'}{\Delta_1}} \cdot \sqrt[8]{\frac{m''}{\Delta_2}} \cdots,$$

welches der in den *Fundam.* S. 151. durch Betrachtung der unendlichen Producte gefundne Ausdruck ist. Es steht aber dort aus Versehen der inverse Werth. Eben so müssen S. 150. für $\frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\,\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}$, $\frac{1}{\sqrt{k^{(p)\prime}}}\Delta\,\mathrm{am}\frac{2K^{(p)}x}{\pi}$, $\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{(2)\frac{1}{4}}\cdots$, $\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)}$ die inversen Werthe gesetzt werden. Die Gröfsen Δ, Δ_1 etc. kann man durch die Formeln

$$\cos(2\varphi - \varphi_1) = \frac{\Delta}{m}, \qquad \cos(2\varphi_1 - \varphi_1) = \frac{\Delta_1}{m'} \quad \text{etc.}$$

berechnen. Diese geben den Ausdruck

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \frac{1}{\sqrt{(\cos(2\varphi-\varphi_1))}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(\cos(2\varphi_1-\varphi_2))}} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{(\cos(2\varphi_2-\varphi_3))}} \cdots,$$

welcher blofs von den Amplituden abhängt. Will man die in den *Fundam.* mitgetheilte Berechnungsweise der Gröfsen Δ_1, Δ_2 etc. anwenden, so gebraucht man wieder mit Vortheil die *Gaufsischen* Tafeln.

4.

Ich will die hauptsächlichsten der im Vorigen mitgetheilten Formeln durch ein von *Legendre* ebenfalls behandeltes numerisches Beispiel erläutern, welches sich auf einen schon ziemlich grofsen Modul $k = \sin 75°$ bezieht.

Es sei

$$m = 1, \quad \log n = \log \sin 15° = 9.4129962,$$
$$\varphi = 47°\,3'\,30''95,$$

wo $\tan\varphi = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$. Die benutzten Tafeln sind die auf 7 Stellen berechneten *Matthiessischen* (Altona 1817). Bei den Interpolationen ist noch immer die 8te Stelle mitgenommen worden, um den Fehler in der 7ten zu verringern.

Setzt man $a = \log\frac{1}{n} = 0.5870038$, ferner

$$\log \tan\varphi^2 = b^0 = 0.0624693.6,$$
$$\log\frac{n^2}{m^2}\tan\varphi^2 = c^0 = 8.8884617.6,$$

und sucht nach der in der Abhandlung angegebnen Regel aus den *Matthiessischen* Tafeln die Werthe

$$\beta^0 = 0.0011222.3,$$
$$\gamma^0 = 0.2870960.3,$$

so findet man nach und nach:

$$\log\frac{m}{\Delta} = b = \tfrac{1}{2}(a+\beta^0-\gamma^0) = 0.1505150, \qquad \beta = 0.0064882.3,$$

$$\log\frac{\Delta}{n} = c = a - b = 0.43648880, \qquad \gamma = 0.0526732.3,$$

$$a' = 0.0924352.2, \quad b' = 0.0231251.1, \quad c' = 0.0693101.1,$$
$$\beta' = 0.0001539.7, \quad \gamma' = 0.0013812.0,$$
$$a'' = 0.0024545.8, \quad b'' = 0.0006136.7, \quad c'' = 0.0018409.1,$$
$$\beta'' = 0.0000001.0, \quad \gamma'' = 0.0000909.0,$$
$$a''' = 0.0000018.0, \quad b''' = 0.0000005.0, \quad c''' = 0.0000013.0.$$

Hat man hier aus a^i, b^i, c^i die Gröfsen α^i, β^i, γ^i gefunden, indem man nach der allgemeinen Regel

$$a^i,\ b^i \text{ oder } c^i = A \quad \text{und} \quad \alpha^i,\ \beta^i,\ \gamma^i = C - \tfrac{1}{2}A - 0.300103000$$

setzt, wo C aus A durch die *Matth.* Tafeln gegeben ist, so wird

$$a^{i+1} = \alpha^i, \qquad b^{i+1} = \tfrac{1}{2}(\alpha^i+\beta^i-\gamma), \qquad c^{i+1} = \tfrac{1}{2}(\alpha^i-\beta^i+\gamma^i),$$

und daher immer $a^i = b^i + c^i$. Wenn daher $\log\frac{1}{n}$, $\log\operatorname{tang}\varphi$ gegeben ist, so hat man zur Berechnung aller vorstehenden Gröfsen nur *achtmal* in die Tafeln zu gehen. Hiermit ist aber schon fast alles gegeben, was zur Berechnung der ganzen und unbestimmten Integrale erster und zweiter Gattung und der Gröfsen $\log q$ und $\log\Theta$ erforderlich ist. Denn man hat zunächst

$$\log\mu = \log\frac{\pi}{2F^I} = \log n + \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{4}a' + \tfrac{1}{8}a'' + \tfrac{1}{16}a''' = 9.75394390.$$

Um $\log q$ zu finden, braucht man noch den log. des vierten Theils des Moduls

$$\log\lambda = \log\tfrac{1}{4}\sqrt{(mm-nn)} = 9.3828837.7;$$

dann wird

$$\log q = 2\log\lambda + a - 3[\tfrac{1}{2}a' + \tfrac{1}{4}a'' + \tfrac{1}{8}a'''] = 9.2122768.7.$$

Setzt man ferner $\Phi = F(\varphi)$, so wird

$$\log\operatorname{tang}\mu\Phi = \log\operatorname{tang}\varphi + \log\frac{\mu}{m} - [b' + b'' + b'''] = 9.7614393.0.$$

Der genaue Werth von $x = \mu\Phi$ ist 30° und man hat nach den Tafeln $\log\operatorname{tang} 30^0 = 9.7614393.7$. Man findet ferner

$$\log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \int_0^\varphi \left[E(\varphi) - \frac{E^I}{F^I}F(\varphi)\right]\frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$= \tfrac{1}{2}b + b' + 2b'' + 4b''' - [\beta + 2\beta' + 4\beta''] = 0.0928153.9.$$

Um die Integrale zweiter Gattung zu erhalten, mufs man zuvor durch Addition und Subtraction die Logarithmen der Gröfsen m^i, n^i, λ^i bilden:

$\log n' = 9.7064981$, $\log m' = 9.7989333.2$, $\log\lambda' = 8.9668342$,
$\log n'' = 9.7527157.1$, $\log m'' = 9.7551702.9$, $\log\lambda'' = 8.1784981$,
$\log n''' = 9.7539430.0$, $\log m''' = 9.7539448.0$, $\log\lambda''' = 6.60305$,
$\log n^{\text{IV}} = 9.7539439.0$, $\log m^{\text{IV}} = 9.7539439.0$, $\log\lambda^{\text{IV}} = 3.452$.

Hier ist

$$\log n^{i+1} = \log n^i + \tfrac{1}{2}a^i, \quad \log m^i = \log n^i + a^i, \quad \log\lambda^{i+1} = 2\log\lambda^i - \log m^{i+1}.$$

Hiernach findet man

$$\log\frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} = 9.4689309, \qquad \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} = 0.2943952.7,$$

$$\log\frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda} = 8.1932888, \qquad \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda} = 0.01560519.0,$$

$$\log\frac{8\lambda'''\lambda'''}{\lambda\lambda} = 5.34343, \qquad \frac{8\lambda'''\lambda'''}{\lambda\lambda} = 0.0000220.5,$$

$$\nu = 0.3100232.2.$$

Der gefundene Werth von ν, welcher das Aufschlagen *dreier* Zahlen erforderte, giebt

$$\nu = \frac{-1}{F^I}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi}, \qquad \frac{E^I}{F^I} = \frac{mm+nn}{2mm} - \frac{mm-nn}{2mm}\,\nu.$$

Zur Berechnung des unbestimmten Integrals zweiter Gattung geht man von den Werthen von $\log\sin\Phi$, $\log\cos\Phi$ aus und findet dann durch successives Addiren:

$\log\frac{\sin\varphi}{m}$	$= 9.8645412.7$	$\log\cos\Phi$	$= 9.8333065.7$
$\frac{1}{2}b-\beta$	$= 0.0687692.8$	$b'+\frac{1}{2}b-\beta$	$= 0.0918943.9$
$\log\frac{\sin\varphi'}{m'}$	$= 9.9333105.5$	$\log\cos\Phi'$	$= 9.9252009.6$
$\frac{1}{2}b'-\beta'$	$= 0.0114085.9$	$b''+\frac{1}{2}b'-\beta'$	$= 0.0120222.6$
$\log\frac{\sin\varphi''}{m''}$	$= 9.9447191.4$	$\log\cos\Phi''$	$= 9.9372232.2$
$\frac{1}{2}b''-\beta''$	$= 0.0003067.4$	$b'''+\frac{1}{2}b''-\beta''$	$= 0.0003072.4$
$\log\frac{\sin\varphi'''}{m'''}$	$= 9.9450258.8$	$\log\cos\Phi'''$	$= 9.9375304.6$
$\frac{1}{2}b'''$	$= 2.5$		
$\log\frac{\sin\varphi^{\text{IV}}}{m^{\text{IV}}}$	$= 9.9450261.3$		

$$\log \frac{\cos\varphi \sin\varphi'}{m'} = 9.7666171.2 \qquad \frac{\cos\varphi \sin\varphi'}{m'} = 0.5842747.0$$

$$\log \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} \cdot \frac{\cos\varphi' \sin\varphi''}{m''} = 9.3388510.0 \qquad \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} \cdot \frac{\cos\varphi' \sin\varphi''}{m''} = 0.2181981.5$$

$$\log \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda} \cdot \frac{\cos\varphi'' \sin\varphi'''}{m'''} = 8.0755378.6 \qquad \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda} \cdot \frac{\cos\varphi'' \sin\varphi'''}{m'''} = 0.0118997.5$$

$$\log \frac{8\lambda'''\lambda'''}{\lambda\lambda} \cdot \frac{\cos\varphi''' \sin\varphi^{\text{IV}}}{m^{\text{IV}}} = 5.22599 \qquad \frac{8\lambda'''\lambda'''}{\lambda\lambda} \cdot \frac{\cos\varphi''' \sin\varphi^{\text{IV}}}{m^{\text{IV}}} = 0.0000168.3$$

$$\log \nu = 9.4913942.9 \qquad 0.8143894.3$$

$$\log \nu\Phi = \log \frac{\nu}{\mu} 30^0 = 9.4564490.9 \qquad \nu\Phi = 0.2860547.2$$

$$\int_0^\varphi \frac{\cos 2\varphi \, d\varphi}{\Delta\varphi} = 0.5283347.1.$$

Man hat zur Berechnung des vorstehenden Integrals zwar nur *fünf* Zahlen aufzuschlagen, aber sehr viele Additionen zu machen. Es wird daher eben so vortheilhaft die Gröfse $\frac{\cos\varphi \sin\varphi'}{m'} +$ etc. auch durch die Formel

$$\frac{\cos\varphi \sin\varphi'}{m'} + \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} \cdot \frac{\cos\varphi' \sin\varphi''}{m''} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{8\lambda\lambda}\left[E(\Phi) - \frac{E'}{F'} F(\Phi)\right] = \frac{1}{2\lambda\lambda\mu} \cdot \frac{q\sin 2x - 2q^4 \sin 4x + 3q^9 \sin 6x \text{ etc.}}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x \text{ etc.}}$$

berechnet werden können. Da hier $x = 30^0$ und $\log q = 9.2122768.7$ ist, so findet man, wenn man den Bruch mit $\frac{Z}{N}$ bezeichnet,

$$q\sin 2x = 0.1411911.5 \qquad q\cos 2x = 0.0815167.5$$
$$2q^4 \sin 4x = 0.0012236.8 \qquad -q^4 \cos 4x = 0.0003532.4$$
$$Z = 0.1399674.7 \qquad -q^9 \cos 6x = \quad 0.8$$
$$\log Z = 9.1460271.7 \qquad N = 9.8362601.8$$
$$\log N = 9.9223413.9 \qquad = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x$$
$$\log \frac{Z}{2\lambda\lambda\mu N} = 9.9108321.4; \quad \frac{1}{2\lambda\lambda\mu} \cdot \frac{Z}{N} = 0.8143894.4.$$

Die frühere Rechnung gab dieselbe Gröfse 0.8143894.3. Den Werth von $\log N$ kann man auch aus der Formel

$$\log N = \log \frac{\Theta u}{\Theta 0} + \tfrac{1}{2} \log \frac{n}{\mu}$$

erhalten. Wir fanden aber oben

$$\log \frac{\Theta u}{\Theta 0} = 0.0928153.9,$$

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{n}{\mu} = 9.8295261.5,$$

und hieraus wird

$$\log N = 9.9223415.4,$$

welches nur um 1.5 in der 7ten Stelle von dem durch die Reihen-Entwicklung gefundnen Werthe abweicht.

Sehr leicht wird die Berechnung von ν durch die Formel

$$-(1+\sqrt{k'})\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = (1-\sqrt{k'})F^1 - \frac{\pi D}{k^2\left(\frac{2F^1}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

oder

$$\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\cdot\frac{\nu}{\mu} = \frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\cdot\frac{1}{\mu} - \frac{\mu^{\frac{3}{2}}D}{8\lambda\lambda}.$$

Es ist

$$\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} = \frac{m-n}{2(m'+n')} = \frac{mm-nn}{2(m'+n')(m+n)} = \frac{2\lambda\lambda}{m'm''},$$

$$\sqrt{m}+\sqrt{n} = \sqrt{(2(m'+n'))} = 2\sqrt{m''},$$

und daher, wenn man q^{16}, als unmerklich, wegläfst,

$$\nu = \frac{2\lambda\lambda}{m'm''} - \frac{\sqrt{m}.\mu^{\frac{5}{2}}D}{16\lambda\lambda\sqrt{m''}} = \frac{2\lambda\lambda}{m'm''} - \frac{4\sqrt{m}.\mu^{\frac{5}{2}}q^4}{\sqrt{m''}.\lambda\lambda}.$$

Es ist

$$\log\frac{2\lambda\lambda}{m'm''} = 9.5126939.3; \qquad \frac{2\lambda\lambda}{m'm''} = 0.3256071.8,$$

$$\log\frac{4\sqrt{m}.\mu^{\frac{5}{2}}q^4}{\sqrt{m''}.\lambda\lambda} = 8.1926745.4; \qquad \frac{4\sqrt{m}.\mu^{\frac{5}{2}}q^4}{\sqrt{m''}.\lambda\lambda} = 0.0155838.4,$$

$$\nu = 0.3100233.4,$$

welches nur um 1.2 in der 7ten Stelle vom oben gefundnen Werthe abweicht.

Königsberg, den 12. Juni 1843.

Ich füge die folgende Tabelle hinzu, welche für die Werthe des Argumentes $\vartheta = \arcsin k$ von Zehntel zu Zehntel Grad die Werthe von $\log q$ bis auf 5 Decimalstellen nebst den ersten Differenzen giebt.

ϑ	log. q	Diff. L	ϑ	log. q	Diff. L	ϑ	log. q	Diff. L
0.0	Infinitum.		5.0	6.67813	1722	10.0	7.28185	869
0.1	3.27964	0.60206	5.1	6.69535	1689	10.1	7.29054	860
0.2	3.88170	35218	5.2	6.71224	1657	10.2	7.29914	852
0.3	4.23388	24988	5.3	6.72881	1626	10.3	7.30766	844
0.4	4.48376	19382	5.4	6.74507	1596	10.4	7.31610	836
0.5	4.67758	15836	5.5	6.76103	1567	10.5	7.32446	828
0.6	4.83594	13390	5.6	6.77670	1540	10.6	7.33274	820
0.7	4.96984	11599	5.7	6.79210	1513	10.7	7.34094	813
0.8	5.08583	10231	5.8	6.80723	1488	10.8	7.34907	805
0.9	5.18814	9152	5.9	6.82211	1462	10.9	7.35712	798
1.0	5.27966	8279	6.0	6.83673	1439	11.0	7.36510	791
1.1	5.36245	7457	6.1	6.85112	1415	11.1	7.37301	784
1.2	5.43702	7054	6.2	6.86527	1392	11.2	7.38085	777
1.3	5.50756	6437	6.3	6.87919	1371	11.3	7.38862	771
1.4	5.57193	5994	6.4	6.89290	1349	11.4	7.39633	763
1.5	5.63187	5606	6.5	6.90639	1329	11.5	7.40396	758
1.6	5.68793	5267	6.6	6.91968	1310	11.6	7.41154	750
1.7	5.74060	4965	6.7	6.93278	1289	11.7	7.41904	745
1.8	5.79025	4697	6.8	6.94567	1272	11.8	7.42649	738
1.9	5.83722	4456	6.9	6.95839	1252	11.9	7.43387	732
2.0	5.88178	4239	7.0	6.97091	1236	12.0	7.44119	727
2.1	5.92417	4042	7.1	6.98327	1218	12.1	7.44846	720
2.2	5.96459	3862	7.2	6.99545	1201	12.2	7.45566	714
2.3	6.00321	3697	7.3	7.00746	1185	12.3	7.46280	709
2.4	6.04018	3547	7.4	7.01931	1169	12.4	7.46989	703
2.5	6.07565	3408	7.5	7.03100	1154	12.5	7.47692	698
2.6	6.10973	3279	7.6	7.04254	1139	12.6	7.48390	693
2.7	6.14252	3160	7.7	7.05393	1124	12.7	7.49083	686
2.8	6.17412	3050	7.8	7.06517	1110	12.8	7.49769	682
2.9	6.20462	2946	7.9	7.07627	1096	12.9	7.50451	677
3.0	6.23408	2849	8.0	7.08723	1083	13.0	7.51128	671
3.1	6.26257	2759	8.1	7.09806	1069	13.1	7.51799	667
3.2	6.29016	2674	8.2	7.10875	1056	13.2	7.52466	661
3.3	6.31690	2595	8.3	7.11931	1044	13.3	7.53127	657
3.4	6.34285	2519	8.4	7.12975	1032	13.4	7.53784	651
3.5	6.36804	2449	8.5	7.14007	1020	13.5	7.54435	648
3.6	6.39253	2381	8.6	7.15027	1008	13.6	7.55083	642
3.7	6.41634	2318	8.7	7.16035	996	13.7	7.55725	638
3.8	6.43952	2258	8.8	7.17031	986	13.8	7.56363	633
3.9	6.46210	2201	8.9	7.18017	974	13.9	7.56996	629
4.0	6.48411	2146	9.0	7.18991	964	14.0	7.57625	625
4.1	6.50557	2095	9.1	7.19955	953	14.1	7.58250	620
4.2	6.52652	2046	9.2	7.20908	944	14.2	7.58870	616
4.3	6.54698	1999	9.3	7.21852	933	14.3	7.59486	612
4.4	6.56697	1954	9.4	7.22785	923	14.4	7.60098	607
4.5	6.58651	1911	9.5	7.23708	914	14.5	7.60705	604
4.6	6.60562	1870	9.6	7.24622	904	14.6	7.61309	599
4.7	6.62432	1831	9.7	7.25526	895	14.7	7.61908	596
4.8	6.64263	1793	9.8	7.26421	887	14.8	7.62504	591
4.9	6.66056	1757	9.9	7.27308	877	14.9	7.63095	588
5.0	6.67813	1722	10.0	7.28185	869	15.0	7.63683	584

ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.
15.0	7.63683	584	20.0	7.89068	443	25.0	8.08971	359
15.1	7.64267	580	20.1	7.89511	440	25.1	8.09330	357
15.2	7.64847	577	20.2	7.89951	438	25.2	8.09687	356
15.3	7.65424	572	20.3	7.90389	436	25.3	8.10043	354
15.4	7.65996	570	20.4	7.90825	434	25.4	8.10397	354
15.5	7.66566	565	20.5	7.91259	433	25.5	8.10751	351
15.6	7.67131	562	20.6	7.91692	430	25.6	8.11102	351
15.7	7.67693	559	20.7	7.92122	428	25.7	8.11453	350
15.8	7.68252	555	20.8	7.92550	426	25.8	8.11803	348
15.9	7.68807	552	20.9	7.92976	424	25.9	8.12151	347
16.0	7.69359	548	21.0	7.93400	423	26.0	8.12498	345
16.1	7.69907	545	21.1	7.93823	420	26.1	8.12843	345
16.2	7.70452	542	21.2	7.94243	418	26.2	8.13188	343
16.3	7.70994	539	21.3	7.94661	417	26.3	8.13531	342
16.4	7.71533	535	21.4	7.95078	415	26.4	8.13873	341
16.5	7.72068	533	21.5	7.95493	413	26.5	8.14214	340
16.6	7.72601	529	21.6	7.95906	411	26.6	8.14554	338
16.7	7.73130	526	21.7	7.96317	409	26.7	8.14892	338
16.8	7.73656	523	21.8	7.96726	408	26.8	8.15230	336
16.9	7.74179	520	21.9	7.97134	406	26.9	8.15566	335
17.0	7.74699	517	22.0	7.97540	404	27.0	8.15901	334
17.1	7.75216	515	22.1	7.97944	402	27.1	8.16235	333
17.2	7.75731	511	22.2	7.98346	401	27.2	8.16568	331
17.3	7.76242	508	22.3	7.98747	399	27.3	8.16899	331
17.4	7.76750	507	22.4	7.99146	397	27.4	8.17230	329
17.5	7.77257	502	22.5	7.99543	396	27.5	8.17559	329
17.6	7.77759	500	22.6	7.99939	394	27.6	8.17888	327
17.7	7.78259	498	22.7	8.00333	392	27.7	8.18215	326
17.8	7.78757	494	22.8	8.00725	391	27.8	8.18541	325
17.9	7.79251	492	22.9	8.01116	389	27.9	8.18866	324
18.0	7.79743	490	23.0	8.01505	388	28.0	8.19190	323
18.1	7.80233	487	23.1	8.01893	386	28.1	8.19513	322
18.2	7.80720	484	23.2	8.02279	384	28.2	8.19835	321
18.3	7.81204	482	23.3	8.02663	383	28.3	8.20156	320
18.4	7.81686	479	23.4	8.03046	381	28.4	8.20476	319
18.5	7.82165	476	23.5	8.03427	380	28.5	8.20795	318
18.6	7.82641	475	23.6	8.03807	378	28.6	8.21113	317
18.7	7.83116	471	23.7	8.04185	377	28.7	8.21430	315
18.8	7.83587	470	23.8	8.04562	375	28.8	8.21745	315
18.9	7.84057	467	23.9	8.04937	374	28.9	8.22060	314
19.0	7.84524	464	24.0	8.05311	372	29.0	8.22374	313
19.1	7.84988	463	24.1	8.05683	371	29.1	8.22687	312
19.2	7.85451	460	24.2	8.06054	370	29.2	8.22999	311
19.3	7.85911	457	24.3	8.06424	368	29.3	8.23310	310
19.4	7.86368	456	24.4	8.06792	367	29.4	8.23620	309
19.5	7.86824	453	24.5	8.07159	365	29.5	8.23929	308
19.6	7.87277	451	24.6	8.07524	364	29.6	8.24237	307
19.7	7.87728	449	24.7	8.07888	362	29.7	8.24544	306
19.8	7.88177	447	24.8	8.08250	361	29.8	8.24850	306
19.9	7.88624	444	24.9	8.08611	360	29.9	8.25156	305
20.0	7.89068	443	25.0	8.08971	359	30.0	8.25461	303

ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.
30.0	8.25461	303	35.0	8.39646	265	40.0	8.52199	238
30.1	8.25764	303	35.1	8.39911	265	40.1	8.52437	237
30.2	8.26067	301	35.2	8.40176	264	40.2	8.52674	237
30.3	8.26368	301	35.3	8.40440	264	40.3	8.52911	236
30.4	8.26669	301	35.4	8.40704	262	40.4	8.53147	236
30.5	8.26970	301	35.5	8.40966	262	40.5	8.53383	235
30.6	8.27268	298	35.6	8.41228	262	40.6	8.53618	235
30.7	8.27567	297	35.7	8.41490	261	40.7	8.53853	235
30.8	8.27864	296	35.8	8.41751	260	40.8	8.54088	234
30.9	8.28160	296	35.9	8.42011	260	40.9	8.54322	233
31.0	8.28456	295	36.0	8.42271	259	41.0	8.54555	233
31.1	8.28751	294	36.1	8.42530	258	41.1	8.54788	233
31.2	8.29045	293	36.2	8.42788	258	41.2	8.55021	233
31.3	8.29338	292	36.3	8.43046	257	41.3	8.55254	232
31.4	8.29630	292	36.4	8.43303	257	41.4	8.55486	231
31.5	8.29922	290	36.5	8.43560	256	41.5	8.55717	231
31.6	8.30212	290	36.6	8.43816	256	41.6	8.55948	230
31.7	8.30502	289	36.7	8.44072	255	41.7	8.56178	230
31.8	8.30791	288	36.8	8.44327	254	41.8	8.56408	230
31.9	8.31079	288	36.9	8.44581	254	41.9	8.56638	229
32.0	8.31367	287	37.0	8.44835	253	42.0	8.56867	229
32.1	8.31654	286	37.1	8.45088	253	42.1	8.57096	229
32.2	8.31940	285	37.2	8.45341	252	42.2	8.57325	228
32.3	8.32225	284	37.3	8.45593	251	42.3	8.57553	227
32.4	8.32509	283	37.4	8.45844	251	42.4	8.57780	227
32.5	8.32792	283	37.5	8.46095	251	42.5	8.58007	227
32.6	8.33075	282	37.6	8.46346	250	42.6	8.58234	227
32.7	8.33357	281	37.7	8.46596	249	42.7	8.58461	226
32.8	8.33638	281	37.8	8.46845	249	42.8	8.58687	225
32.9	8.33919	280	37.9	8.47094	248	42.9	8.58912	225
33.0	8.34199	279	38.0	8.47342	248	43.0	8.59137	225
33.1	8.34478	278	38.1	8.47590	247	43.1	8.59362	225
33.2	8.34756	278	38.2	8.47837	247	43.2	8.59587	224
33.3	8.35034	277	38.3	8.48084	246	43.3	8.59811	224
33.4	8.35311	276	38.4	8.48330	245	43.4	8.60035	223
33.5	8.35587	275	38.5	8.48575	245	43.5	8.60258	223
33.6	8.35862	275	38.6	8.48820	245	43.6	8.60481	222
33.7	8.36137	274	38.7	8.49065	244	43.7	8.60703	222
33.8	8.36411	273	38.8	8.49309	244	43.8	8.60925	222
33.9	8.36684	273	38.9	8.49553	243	43.9	8.61147	221
34.0	8.36957	272	39.0	8.49796	242	44.0	8.61368	221
34.1	8.37229	271	39.1	8.50038	242	44.1	8.61589	221
34.2	8.37500	271	39.2	8.50280	242	44.2	8.61810	221
34.3	8.37771	270	39.3	8.50522	241	44.3	8.62031	220
34.4	8.38041	269	39.4	8.50763	240	44.4	8.62251	219
34.5	8.38310	269	39.5	8.51003	240	44.5	8.62470	219
34.6	8.38579	268	39.6	8.51243	240	44.6	8.62689	219
34.7	8.38847	267	39.7	8.51483	239	44.7	8.62908	219
34.8	8.39114	266	39.8	8.51722	239	44.8	8.63127	218
34.9	8.39380	266	39.9	8.51961	238	44.9	8.63345	218
35.0	8.39646	265	40.0	8.52199	238	45.0	8.63563	217

ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.
45.0	8.63563	217	50.0	8.74052	203	55.0	8.83912	192
45.1	8.63780	217	50.1	8.74255	202	55.1	8.84104	192
45.2	8.63997	217	50.2	8.74457	202	55.2	8.84296	192
45.3	8.64214	216	50.3	8.74659	202	55.3	8.84488	191
45.4	8.64430	216	50.4	8.74861	202	55.4	8.84679	192
45.5	8.64646	216	50.5	8.75063	201	55.5	8.84871	191
45.6	8.64862	215	50.6	8.75264	201	55.6	8.85062	192
45.7	8.65077	215	50.7	8.75465	201	55.7	8.85254	191
45.8	8.65292	215	50.8	8.75666	201	55.8	8.85445	190
45.9	8.65507	215	50.9	8.75867	201	55.9	8.85635	191
46.0	8.65722	214	51.0	8.76068	200	56.0	8.85826	191
46.1	8.65936	214	51.1	8.76268	200	56.1	8.86017	190
46.2	8.66150	213	51.2	8.76468	199	56.2	8.86207	191
46.3	8.66363	213	51.3	8.76667	200	56.3	8.86398	190
46.4	8.66576	213	51.4	8.76867	199	56.4	8.86588	190
46.5	8.66789	212	51.5	8.77066	199	56.5	8.86778	190
46.6	8.67001	212	51.6	8.77265	199	56.6	8.86968	189
46.7	8.67213	212	51.7	8.77464	199	56.7	8.87157	190
46.8	8.67425	212	51.8	8.77663	198	56.8	8.87347	189
46.9	8.67637	211	51.9	8.77861	198	56.9	8.87536	190
47.0	8.67848	211	52.0	8.78059	198	57.0	8.87726	189
47.1	8.68059	211	52.1	8.78257	198	57.1	8.87915	189
47.2	8.68270	210	52.2	8.78455	198	57.2	8.88104	189
47.3	8.68480	210	52.3	8.78653	197	57.3	8.88293	188
47.4	8.68690	210	52.4	8.78850	197	57.4	8.88481	189
47.5	8.68900	209	52.5	8.79047	197	57.5	8.88670	188
47.6	8.69109	209	52.6	8.79244	197	57.6	8.88858	189
47.7	8.69318	209	52.7	8.79441	196	57.7	8.89047	188
47.8	8.69527	209	52.8	8.79637	197	57.8	8.89235	188
47.9	8.69736	208	52.9	8.79834	196	57.9	8.89423	188
48.0	8.69944	208	53.0	8.80030	196	58.0	8.89611	188
48.1	8.70152	208	53.1	8.80226	195	58.1	8.89799	188
48.2	8.70360	207	53.2	8.80421	196	58.2	8.89987	187
48.3	8.70567	207	53.3	8.80617	195	58.3	8.90174	188
48.4	8.70774	207	53.4	8.80812	195	58.4	8.90362	187
48.5	8.70981	207	53.5	8.81007	195	58.5	8.90549	187
48.6	8.71188	206	53.6	8.81202	195	58.6	8.90736	187
48.7	8.71394	207	53.7	8.81397	194	58.7	8.90923	187
48.8	8.71601	205	53.8	8.81591	194	58.8	8.91110	187
48.9	8.71806	205	53.9	8.81785	194	58.9	8.91297	187
49.0	8.72011	206	54.0	8.81979	195	59.0	8.91484	187
49.1	8.72217	205	54.1	8.82174	194	59.1	8.91671	186
49.2	8.72422	204	54.2	8.82368	193	59.2	8.91857	187
49.3	8.72626	205	54.3	8.82561	194	59.3	8.92044	186
49.4	8.72831	204	54.4	8.82755	193	59.4	8.92230	186
49.5	8.73035	204	54.5	8.82948	193	59.5	8.92416	187
49.6	8.73239	204	54.6	8.83141	193	59.6	8.92603	186
49.7	8.73443	203	54.7	8.83334	193	59.7	8.92789	186
49.8	8.73646	203	54.8	8.83527	192	59.8	8.92975	186
49.9	8.73849	203	54.9	8.83719	193	59.9	8.93161	186
50.0	8.74052	203	55.0	8.83912	192	60.0	8.93347	185

ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.
60.0	8.93347	185	65.0	9.02553	183	70.0	9.11748	185
60.1	8.93532	186	65.1	9.02736	183	70.1	9.11933	186
60.2	8.93718	185	65.2	9.02919	183	70.2	9.12119	186
60.3	8.93903	186	65.3	9.03102	183	70.3	9.12305	186
60.4	8.94089	185	65.4	9.03285	184	70.4	9.12491	186
60.5	8.94274	185	65.5	9.03469	183	70.5	9.12677	186
60.6	8.94459	186	65.6	9.03652	183	70.6	9.12863	186
60.7	8.94645	185	65.7	9.03835	183	70.7	9.13049	187
60.8	8.94830	185	65.8	9.04018	184	70.8	9.13236	186
60.9	8.95015	185	65.9	9.04202	183	70.9	9.13422	187
61.0	8.95200	185	66.0	9.04385	183	71.0	9.13609	187
61.1	8.95385	184	66.1	9.04568	183	71.1	9.13796	187
61.2	8.95569	185	66.2	9.04751	183	71.2	9.13983	187
61.3	8.95754	185	66.3	9.04934	184	71.3	9.14170	187
61.4	8.95939	184	66.4	9.05118	183	71.4	9.14357	187
61.5	8.96123	185	66.5	9.05301	183	71.5	9.14544	188
61.6	8.96308	184	66.6	9.05484	184	71.6	9.14732	188
61.7	8.96492	185	66.7	9.05668	183	71.7	9.14920	188
61.8	8.96677	184	66.8	9.05851	184	71.8	9.15108	188
61.9	8.96861	184	66.9	9.06035	183	71.9	9.15296	188
62.0	8.97045	184	67.0	9.06218	184	72.0	9.15484	188
62.1	8.97229	185	67.1	9.06402	183	72.1	9.15672	189
62.2	8.97414	184	67.2	9.06585	184	72.2	9.15861	189
62.3	8.97598	184	67.3	9.06769	183	72.3	9.16050	189
62.4	8.97782	184	67.4	9.06952	184	72.4	9.16239	189
62.5	8.97966	184	67.5	9.07136	184	72.5	9.16428	189
62.6	8.98150	183	67.6	9.07320	183	72.6	9.16617	189
62.7	8.98333	184	67.7	9.07503	184	72.7	9.16806	190
62.8	8.98517	184	67.8	9.07687	184	72.8	9.16996	190
62.9	8.98701	184	67.9	9.07871	184	72.9	9.17186	190
63.0	8.98885	184	68.0	9.08055	184	73.0	9.17376	190
63.1	8.99069	183	68.1	9.08239	184	73.1	9.17566	191
63.2	8.99252	184	68.2	9.08423	184	73.2	9.17757	191
63.3	8.99436	183	68.3	9.08607	184	73.3	9.17948	191
63.4	8.99619	184	68.4	9.08791	184	73.4	9.18139	191
63.5	8.99803	183	68.5	9.08975	184	73.5	9.18330	191
63.6	8.99986	184	68.6	9.09159	185	73.6	9.18521	192
63.7	9.00170	183	68.7	9.09344	184	73.7	9.18713	192
63.8	9.00353	184	68.8	9.09528	185	73.8	9.18905	192
63.9	9.00537	183	68.9	9.09713	184	73.9	9.19097	192
64.0	9.00720	183	69.0	9.09897	185	74.0	9.19289	193
64.1	9.00903	184	69.1	9.10082	185	74.1	9.19482	193
64.2	9.01087	183	69.2	9.10267	184	74.2	9.19675	193
64.3	9.01270	183	69.3	9.10451	185	74.3	9.19868	193
64.4	9.01453	184	69.4	9.10636	185	74.4	9.20061	194
64.5	9.01637	183	69.5	9.10821	185	74.5	9.20255	194
64.6	9.01820	183	69.6	9.11006	185	74.6	9.20449	194
64.7	9.02003	183	69.7	9.11191	186	74.7	9.20643	195
64.8	9.02186	183	69.8	9.11377	185	74.8	9.20838	195
64.9	9.02369	184	69.9	9.11562	186	74.9	9.21033	195
65.0	9.02553	183	70.0	9.11748	185	75.0	9.21228	195

ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.
75.0	9.21228	195	80.0	9.31515	220	85.0	9.43962	296
75.1	9.21423	196	80.1	9.31735	222	85.1	9.44256	298
75.2	9.21619	196	80.2	9.31957	222	85.2	9.44554	301
75.3	9.21815	196	80.3	9.32179	222	85.3	9.44855	304
75.4	9.22011	197	80.4	9.32401	224	85.4	9.45159	307
75.5	9.22208	197	80.5	9.32625	224	85.5	9.45466	310
75.6	9.22405	197	80.6	9.32849	225	85.6	9.45776	314
75.7	9.22602	198	80.7	9.33074	227	85.7	9.46090	318
75.8	9.22800	198	80.8	9.33301	227	85.8	9.46408	321
75.9	9.22998	198	80.9	9.33528	228	85.9	9.46729	325
76.0	9.23196	199	81.0	9.33756	229	86.0	9.47054	329
76.1	9.23395	199	81.1	9.33985	230	86.1	9.47383	334
76.2	9.23594	200	81.2	9.34215	230	86.2	9.47717	338
75.3	9.23794	200	81.3	9.34445	232	86.3	9.48055	343
76.4	9.23994	200	81.4	9.34677	233	86.4	9.48398	348
76.5	9.24194	201	81.5	9.34910	234	86.5	9.48746	353
76.6	9.24395	201	81.6	9.35144	235	86.6	9.49099	359
76.7	9.24596	201	81.7	9.35379	236	86.7	9.49458	364
76.8	9.24797	202	81.8	9.35615	238	86.8	9.49822	370
76.9	9.24999	203	81.9	9.35853	238	86.9	9.50192	377
77.0	9.25202	202	82.0	9.36091	240	87.0	9.50569	384
77.1	9.25404	204	82.1	9.36331	240	87.1	9.50953	391
77.2	9.25608	203	82.2	9.36571	242	87.2	9.51344	398
77.3	9.25811	204	82.3	9.36813	244	87.3	9.51742	407
77.4	9.26015	205	82.4	9.37057	244	87.4	9.52149	416
77.5	9.26220	205	82.5	9.37301	246	87.5	9.52565	425
77.6	9.26425	206	82.6	9.37547	247	87.6	9.52990	435
77.7	9.26631	206	82.7	9.37794	249	87.7	9.53425	445
77.8	9.26837	206	82.8	9.38043	250	87.8	9.53870	458
77.9	9.27043	207	82.9	9.38293	252	87.9	9.54328	470
78.0	9.27250	208	83.0	9.38545	253	88.0	9.54798	484
78.1	9.27458	208	83.1	9.38798	255	88.1	9.55282	499
78.2	9.27666	209	83.2	9.39053	256	88.2	9.55781	515
78.3	9.27875	209	83.3	9.39309	258	88.3	9.56296	534
78.4	9.28084	210	83.4	9.39567	260	88.4	9.56830	554
78.5	9.28294	210	83.5	9.39827	261	88.5	9.57384	577
78.6	9.28504	211	83.6	9.40088	263	88.6	9.57961	602
78.7	9.28715	211	83.7	9.40351	265	88.7	9.58563	632
78.8	9.28926	212	83.8	9.40616	267	88.8	9.59195	665
78.9	9.29138	213	83.9	9.40883	269	88.9	9.59860	704
79.0	9.29351	214	84.0	9.41152	271	89.0	9.60564	750
79.1	9.29565	214	84.1	9.41423	273	89.1	9.61314	805
79.2	9.29779	214	84.2	9.41696	275	89.2	9.62119	874
79.3	9.29993	215	84.3	9.41971	277	89.3	9.62993	959
79.4	9.30208	216	84.4	9.42248	279	89.4	9.63952	1073
79.5	9.30424	217	84.5	9.42527	282	89.5	9.65025	1229
79.6	9.30641	218	84.6	9.42809	284	89.6	9.66254	1462
79.7	9.30859	218	84.7	9.43093	287	89.7	9.67716	1859
79.8	9.31077	219	84.8	9.43380	290	89.8	9.69575	2725
79.9	9.31296	219	84.9	9.43670	292	89.9	9.72300	27700
80.0	9.31515	220	85.0	9.43962	294	90.0	10.00000	

3.

Sur l'elimination des noeuds dans le problème des trois corps.

(Extrait du compte rendu des séances de l'académie des sciences de Paris, séance du lundi 8. Août 1842.)

Les illustres géomètres du siècle passé, en traitant le problème des trois corps, ont cherché le mouvement de deux d'entre eux autour du troisième ou autour du centre de gravité de tous les trois. Mais, en réduisant de cette manière le problème de trois corps qui s'attirent mutuellement à un problème de deux corps qui se meuvent autour d'un point fixe, on fait perdre aux équations différentielles du problème cette forme précieuse dont elles jouissent dans leur état primitif, savoir, que les secondes différentielles des coordonnées soient égalées aux dérivées d'une même fonction. C'est par cette raison que les principes de la conservation des forces vives et des aires cessent d'avoir lieu par rapport aux deux corps. On pourra cependant éviter cet inconvénient en agissant de la manière suivante:

Supposons, pour plus de généralité, que le système se compose de n corps, du soleil et de $n-1$ planètes. Comme il est permis de supposer que son centre de gravité reste en repos, on aura une équation linéaire entre chacun des trois systèmes de coordonnées du même nom. Donc les n coordonnées parallèles à un même axe pourront être exprimées linéairement par $n-1$ autres quantités, en établissant $n-1$ équations de condition entre les $n(n-1)$ constantes qui entrent dans ces n expressions linéaires. Comme on peut disposer encore d'un nombre $(n-1)^2$ de constantes, on les déterminera de manière que, dans l'expression de la force vive du système, s'évanouissent les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ produits des différentielles premières des nouvelles variables. En se servant de formules parfaitement semblables pour chaque système de coordonnées du même nom, et en considérant les nouvelles variables comme les coordonnées de $n-1$ autres corps, *on aura réduit de cette manière la force vive du système des n corps proposés à celle d'un système de $n-1$ corps,* des masses convenables étant attribuées à ces derniers. Il y aura même dans les formules de ré-

duction un nombre $\frac{1}{2}n(n-1)$ de constantes arbitraires et dont on pourra profiter de différentes manières.

D'après ce qu'on vient de dire, le principe de la conservation des forces vives donnera une équation dans laquelle la somme des forces vives des $n-1$ corps fictifs sera égalée à une fonction de leurs coordonnées. En se servant des règles générales de *Lagrange*, on en déduira, par de simples différentiations partielles, les équations différentielles du problème réduit, et l'on reconnaîtra aisément que la conservation des aires a lieu dans le mouvement des $n-1$ corps par lesquels on a remplacé le système proposé. Ces $n-1$ corps ne s'écartent d'ailleurs de $n-1$ planètes que de petites quantités de l'ordre des forces perturbatrices, de manière que la première approximation peut être la même pour les uns et pour les autres. Le changement que, dans cette analyse, doit subir l'expression de la force perturbatrice n'augmente pas la difficulté de son développement.

En appliquant la méthode que je viens d'exposer au problème des trois corps, on réduit celui-ci à un problème du mouvement de deux corps qui jouit de propriétés remarquables. En effet, les trois équations fournies par la conservation des aires font voir:

1°. Que l'intersection commune des plans des orbites des deux corps reste constamment dans un plan fixe: c'est le plan invariable du système;

2°. Que les inclinaisons des plans des deux orbites à ce plan fixe et les paramètres de ces orbites regardés comme des ellipses variables, sont quatre éléments, dont deux quelconques déterminent rigoureusement les deux autres.

Choisissons pour variables du problème les inclinaisons des deux orbites au plan invariable, les deux rayons vecteurs, les angles qu'ils forment avec l'intersection commune des plans des deux orbites, enfin l'angle que forme cette intersection située, comme on a vu, dans le plan invariable, avec une droite fixe de ce plan. On trouvera *que ce dernier angle disparaît entièrement du système des équations différentielles et se détermine après leur intégration par une quadrature.* Donc, dans cette nouvelle forme des équations différentielles n'entre aucune trace des noeuds. Les six équations différentielles du second ordre, qui expriment le mouvement relatif des trois corps, s'y trouvent réduites à cinq équations du premier ordre et une seule du second. Par suite, l'on a fait cinq intégrations. Les intégrales connues n'étant qu'au nombre de quatre, on pourra donc dire

que l'on a fait une intégration de plus dans le système du monde. Je dis dans le système du monde, puisque la même méthode s'applique à un nombre quelconque de corps.

ANALYSE.

1. Soient m la masse du Soleil, m_1 et m_2 celles des deux planètes; soient ξ, v, ζ; ξ_1, v_1, ζ_1; ξ_2, v_2, ζ_2 les coordonnées rectangulaires des trois corps m, m_1, m_2, rapportées à leur centre de gravité. Comme on a les trois équations

$$1.\quad \begin{cases} m\xi+m_1\xi_1+m_2\xi_2=0, \\ mv+m_1v_1+m_2v_2=0, \\ m\zeta+m_1\zeta_1+m_2\zeta_2=0, \end{cases}$$

il sera permis de faire

$$2.\quad \begin{cases} \xi=\alpha x+\beta x_1, & v=\alpha y+\beta y_1, & \zeta=\alpha z+\beta z_1, \\ \xi_1=\alpha_1 x+\beta_1 x_1, & v_1=\alpha_1 y+\beta_1 y_1, & \zeta_1=\alpha_1 z+\beta_1 z_1, \\ \xi_2=\alpha_2 x+\beta_2 x_1, & v_2=\alpha_2 y+\beta_2 y_2, & \zeta_2=\alpha_2 z+\beta_2 z_1, \end{cases}$$

les six constantes α, β, etc., devant satisfaire aux deux conditions

$$3.\quad \begin{cases} m\alpha+m_1\alpha_1+m_2\alpha_2=0, \\ m\beta+m_1\beta_1+m_2\beta_2=0. \end{cases}$$

Supposons de plus que, par les substitutions (2.), la somme des forces vives du système $2T$ se change en cette expression

$$4.\quad \begin{cases} 2T=\mu\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \\ \qquad +\mu_1\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right], \end{cases}$$

on aura les trois équations

$$5.\quad \begin{cases} \mu=m\alpha\alpha+m_1\alpha_1\alpha_1+m_2\alpha_2\alpha_2, \\ \mu_1=m\beta\beta+m_1\beta_1\beta_1+m_2\beta_2\beta_2, \\ 0=m\alpha\beta+m_1\alpha_1\beta_1+m_2\alpha_2\beta_2. \end{cases}$$

J'observe qu'en vertu des formules (3.) on peut faire

$$6.\quad \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=\varepsilon.m,\quad \alpha_2\beta-\alpha\beta_2=\varepsilon.m_1,\quad \alpha\beta_1-\alpha_1\beta=\varepsilon.m_2,$$

ε étant un facteur indéterminé. Des formules (5.) et (6.) on tire aussi celle-ci:

$$7.\quad \mu\mu_1=mm_1m_2(m+m_1+m_2)\varepsilon\varepsilon.$$

Si l'on fait

$$8.\quad \begin{cases} xx+yy+zz=rr,\quad x_1x_1+y_1y_1+z_1z_1=r_1r_1, \\ xx_1+yy_1+zz_1=rr_1\cos U, \end{cases}$$

on aura

$$
9. \quad \begin{cases} \varrho\varrho = (\xi_1-\xi_2)^2+(v_1-v_2)^2+(\zeta_1-\zeta_2)^2 \\ \quad = \gamma^2 rr + 2\gamma\delta r r_1 \cos U + \delta^2 r_1 r_1, \\ \varrho_1\varrho_1 = (\xi_2-\xi)^2+(v_2-v)^2+(\xi_2-\zeta)^2 \\ \quad = \gamma_1^2 rr + 2\gamma_1\delta_1 r r_1 \cos U + \delta_1^2 r_1 r_1, \\ \varrho_2\varrho_2 = (\xi-\xi_1)^2+(v-v_1)^2+(\zeta-\zeta_1)^2 \\ \quad = \gamma_2^2 rr + 2\gamma_2\delta_2 r r_1 \cos U + \delta_2^2 r_1 r_1, \end{cases}
$$

où l'on a mis, pour plus de simplicité,

$$
10. \quad \begin{cases} \gamma = \alpha_1-\alpha_2, & \delta = \beta_1-\beta_2, \\ \gamma_1 = \alpha_2-\alpha, & \delta_1 = \beta_2-\beta, \\ \gamma_2 = \alpha-\alpha_1, & \delta_2 = \beta-\beta_1, \end{cases}
$$

ce qui donne

$$
11. \quad \gamma+\gamma_1+\gamma_2 = 0, \quad \delta+\delta_1+\delta_2 = 0.
$$

Si l'on met

$$
U = \frac{mm_1}{\varrho_2}+\frac{mm_2}{\varrho_1}+\frac{m_1m_2}{\varrho} = \Sigma\frac{m_1m_2}{\varrho},
$$

le principe des forces vives fournit léquation

$$
12. \quad T = U-h = \Sigma\frac{m_1m_2}{\varrho}-h,
$$

h étant une constante arbitraire. Or, si dans cette équation l'on substitue les valeurs des quantités T, ϱ, ϱ_1, ϱ_2 tirées des formules (4.) et (9.), on aura tout de suite, par les règles générales données par *Lagrange* dans sa *Mécanique analytique,*

$$
13. \quad \begin{cases} \mu\frac{d^2x}{dt^2} = -\Sigma\frac{m_1m_2\gamma(\gamma x+\delta x_1)}{\varrho^3} = \frac{dU}{dx}, \\ \mu\frac{d^2y}{dt^2} = -\Sigma\frac{m_1m_2\gamma(\gamma y+\delta y_1)}{\varrho^3} = \frac{dU}{dy}, \\ \mu\frac{d^2z}{dt^2} = -\Sigma\frac{m_1m_2\gamma(\gamma z+\delta z_1)}{\varrho^3} = \frac{dU}{dz}, \\ \mu_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\Sigma\frac{m_1m_2\delta(\gamma x+\delta x_1)}{\varrho^3} = \frac{dU}{dx_1}, \\ \mu_1\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\Sigma\frac{m_1m_2\delta(\gamma y+\delta y_1)}{\varrho^3} = \frac{dU}{dy_1}, \\ \mu_1\frac{d^2z_1}{dt^2} = -\Sigma\frac{m_1m_2\delta(\gamma z+\delta z_1)}{\varrho^3} = \frac{dU}{dz_1}. \end{cases}
$$

On tire de ces formules les suivantes:

$$14.\quad \begin{cases} \mu\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=-\mu_1\left(y_1\frac{d^2z_1}{dt^2}-z_1\frac{d^2y_1}{dt^2}\right) \\ \qquad =-(yz_1-zy_1)\Sigma\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\varrho^3}, \\ \mu\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=-\mu_1\left(z_1\frac{d^2x_1}{dt^2}-x_1\frac{d^2z_1}{dt^2}\right) \\ \qquad =-(zx_1-xz_1)\Sigma\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\varrho^3}, \\ \mu\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=-\mu_1\left(x_1\frac{d^2y_1}{dt^2}-y_1\frac{d^2x_1}{dt^2}\right) \\ \qquad =-(xy_1-yx_1)\Sigma\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\varrho^3}. \end{cases}$$

Ces équations donnent les trois intégrales

$$15.\quad \begin{cases} \mu\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+\mu_1\left(y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt}\right)=c, \\ \mu\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+\mu_1\left(z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt}\right)=c_1, \\ \mu\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+\mu_1\left(x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt}\right)=c_2, \end{cases}$$

c, c_1, c_2, étant des constantes arbitraires. Je remarque à cette occasion les formules

$$16.\quad \begin{cases} \mu\left(y_1\frac{d^2z}{dt^2}-z_1\frac{d^2y}{dt^2}\right)=+(yz-zy_1)\Sigma\frac{mm_1\gamma\gamma}{\varrho^3}, \\ \mu_1\left(y\frac{d^2z_1}{dt^2}-z\frac{d^2y_1}{dt}\right)=-(yz_1-zy_1)\Sigma\frac{mm_1\delta\delta}{\varrho^3}, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$17.\quad \begin{cases} \mu\mu_1\frac{d\left(y_1\frac{dz}{dt}-z\frac{dy_1}{dt}+y\frac{dz_1}{dt}-z\frac{dy_1}{dt}\right)}{dt} \\ =(yz_1-zy_1)\Sigma\frac{m_1m_2(\mu_1\gamma\gamma-\mu\delta\delta)}{\varrho^3}. \end{cases}$$

On a deux autres systèmes de formules semblables à celui des formules (16.) et (17.), et qui se rapportent aux coordonnées z et x et aux coordonnées x et y.

D'après une propriété connue des fonctions homogènes, il suit des formules (13.)

$$18.\quad \left\{\begin{matrix} \mu\left(x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}\right) \\ +\mu_1\left(x_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+y_1\frac{d^2y_1}{dt^2}+z_1\frac{d^2z_1}{dt^2}\right) \end{matrix}\right\}=-U.$$

Donc, en faisant usage des formules (4.) et (12.), on obtient la suivante:

$$19. \quad \frac{d^2(\mu rr + \mu_1 r_1 r_1)}{dt^2} = 2(U + 2h).$$

Les six équations (13.) pourront servir à déterminer les six quantités x, y, etc., en fonction du temps. Mais on pourra aussi choisir pour cet effet six autres équations indépendantes entre elles et qui se déduisent des équations (13.) par des combinaisons différentes, par exemple, les quatre équations (12.) et (15.), une des équations (14.) et l'équation (19.). En effet, on reviendra sans peine de ces dernières aux équations (13.).

On déterminera α, β, etc., par les quantités γ, δ, etc., au moyen des formules

$$20. \quad \begin{cases} M\alpha = m_1\gamma_2 - m_2\gamma_1, & M\beta = m_1\delta_2 - m_2\delta_1, \\ M\alpha_1 = m_2\gamma - m\gamma_2, & M\beta_1 = m_2\delta - m\delta_2, \\ M\alpha_2 = m\gamma_1 - m_1\gamma, & M\beta_2 = m\delta_1 - m_1\delta, \end{cases}$$

où $M = m + m_1 + m_2$. Ces formules étant substituées dans (5.), on aura

$$21. \quad \begin{cases} M\mu = m_1 m_2 \gamma\gamma + m_2 m \gamma_1\gamma_1 + m m_1 \gamma_2\gamma_2, \\ M\mu_1 = m_1 m_2 \delta\delta + m_2 m \delta_1\delta_1 + m m_1 \delta_2\delta_2, \\ 0 = m_1 m_2 \gamma\delta + m_2 m \gamma_1\delta_1 + m m_1 \gamma_2\delta_2, \end{cases}$$

formules analogues aux équations (5.).

2. Je veux discuter à présent la grandeur des différentes constantes qui entrent dans les formules précédentes. Ces constantes n'étant pas entièrement déterminées, il s'agira de faire telles suppositions sur leur grandeur respective qui pourront subsister avec les équations de condition établies entre ces constantes et qui permettront en même temps de faire usage des méthodes d'approximation connues.

Les équations de condition que l'on a établies entre les constantes α, β, etc., sont les suivantes:

$$1. \quad \begin{cases} m\alpha + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = 0, \\ m\beta + m_1\beta_1 + m_2\beta_2 = 0, \\ m\alpha\beta + m_1\alpha_1\beta_1 + m_2\alpha_2\beta_2 = 0, \end{cases}$$

celles que l'on a entre les six constantes γ, δ, etc., seront

$$2. \quad \begin{cases} \gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ \delta + \delta_1 + \delta_1 = 0, \\ m_1 m_2 \gamma\delta + m_2 m \gamma_1\delta_1 + m m_1 \gamma_2\delta_2 = 0. \end{cases}$$

Les masses des planètes étant très-petites par rapport au Soleil, les frac-

tions $\frac{m_1}{m}$, $\frac{m_2}{m}$ seront des quantités très-petites du premier ordre. Cela posé, les équations (1.) font voir qu'il est permis de supposer α_1 et β_2 très-proches de l'unité, pendant que les constantes α, α_1, β, β_1 seront des quantités du premier ordre. En effet, si l'on fait

$$3.\qquad \alpha_2 = \frac{m_1 \zeta}{m}, \qquad \beta_1 = \frac{m_2 \eta}{m},$$

on tirera des équations (1.) les formules approchées,

$$4.\qquad \begin{cases} \alpha = -\frac{m_1}{m}, & \alpha_1 = 1, \quad 1+\eta+\zeta = 0, \\ \beta = -\frac{m_2}{m}, & \beta_2 = 1, \end{cases}$$

d'où l'on tire les valeurs approchées correspondantes des quantités γ, δ, etc.,

$$5.\qquad \begin{cases} \gamma = 1, & \gamma_1 = -\frac{m_1}{m}\eta, \quad \gamma_2 = -1, \\ \delta = -1, & \delta_1 = 1, \qquad \delta_2 = \frac{m_2}{m}\zeta. \end{cases}$$

Enfin les quantités μ et μ_1 s'écarteront peu des masses m_1 et m_2. Tous les écarts de ces valeurs approchées avec les véritables valeurs pourront être supposés de l'ordre des forces perturbatrices.

Il suit des considérations précédentes, que les quantités x, y, z ne s'écarteront de ξ_1, v_1, ζ_1, et que les quantités x_1, y_1, z_1 ne s'écarteront de ξ_2, v_2, ζ_2 que de quantités de l'ordre des forces perturbatrices. Donc, si l'on imagine deux corps dont les coordonnées respectives sont x, y, z, et x_1, y_1, z_1, leur mouvement autour du centre de gravité du système des trois corps pourra, en première approximation, être regardé comme elliptique. La même chose aura lieu si le mouvement est rapporté à tout autre point qui ne s'écarte de ce centre que de quantités de l'ordre des forces perturbatrices. En négligeant ces quantités, on déduit des formules (3.) et (13.) du n 1. les équations différentielles qui servent à la première approximation, et que l'on intégrera par les formules elliptiques connues,

$$6.\qquad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{m m_1}{\gamma_2 \mu}\cdot\frac{x}{r^3}, & \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{m m_2}{\delta_1 \mu_1}\cdot\frac{x_1}{r_1^3}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{m m_1}{\gamma_2 \mu}\cdot\frac{y}{r^3}, & \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{m m_2}{\delta_1 \mu_1}\cdot\frac{y_1}{r_1^3}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{m m_1}{\gamma_2 \mu}\cdot\frac{z}{r^3}, & \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -\frac{m m_2}{\delta_1 \mu_1}\cdot\frac{z_1}{r_1^3}, \end{cases}$$

où les facteurs $-\frac{m_1}{\gamma_2 \mu}$, $\frac{m^2}{\delta_1 \mu_1}$ ne s'écartent de l'unité que de quantités du

premier ordre par rapport aux forces pertubatrices. Si l'une des deux planètes, par exemple la seconde, est beaucoup plus éloignée du Soleil que l'autre, il conviendra de substituer aux trois dernières de ces équations celles-ci:

$$7.\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = -\dfrac{m_2}{\mu_1}\left(\dfrac{m}{\delta_1} - \dfrac{m_1}{\delta}\right)\dfrac{x_1}{r_1^3}, \\ \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = -\dfrac{m_2}{\mu_1}\left(\dfrac{m}{\delta_1} - \dfrac{m_1}{\delta}\right)\dfrac{y_1}{r_1^3}, \\ \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} = -\dfrac{m_2}{\mu_1}\left(\dfrac{m}{\delta_1} - \dfrac{m_1}{\delta}\right)\dfrac{z_1}{r_1^3}, \end{cases}$$

Dans les approximations successives l'on pourra laisser indéterminées les quantités μ, μ_1, γ, δ, etc.; seulement il sera bon de fixer la valeur de la quantité $\frac{\delta}{\gamma}$. Si l'on fait exactement $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2 = 1$, $\delta = \beta_1 - \beta_2 = -1$, on aura

$$8.\quad \xi_1 - \xi_2 = x - x_1, \quad v_1 - v_2 = y - y_1, \quad \zeta_1 - \zeta_2 = z - z_1.$$

Dans ce cas, on peut envisager les quantités x, y, z et x_1, y_1, z_1 comme les coordonnées des deux planètes elles-mêmes, mais rapportées à un autre point que le centre de gravité du système. En effet, on pourra faire, en même temps,

$$9.\quad \begin{cases} \xi_1 = x + a, \quad v_1 = y + b, \quad \zeta_1 = z + c, \\ \xi_2 = x_1 + a, \quad v_2 = y_1 + b, \quad \zeta_2 = z_1 + c, \end{cases}$$

a, b, c étant déterminées par les équations

$$10.\quad a = \alpha_2 x + \beta_1 x_1, \quad b = \alpha_2 y + \beta_1 y_1, \quad c = \alpha_2 z + \beta_1 z_1.$$

Or des équations

$$\xi_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x_1, \quad \xi_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x_1,$$

on tire

$$\alpha_2 \xi_1 + \beta_1 \xi_2 = (\alpha_1 + \beta_1)\alpha_2 x + (\alpha_2 + \beta_2)\beta_1 x_1;$$

et comme on a $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$, on aura aussi

$$a = \frac{\alpha_2 \xi_1 + \beta_1 \xi_2}{\alpha_1 + \beta_1}.$$

On trouve de la même manière

$$b = \frac{\alpha_2 v_1 + \beta_1 v_2}{\alpha_1 + \beta_1}, \qquad c = \frac{\alpha_2 \zeta_1 + \beta_1 \zeta_2}{\alpha_1 + \beta_1}.$$

Si l'on retranche des coordonnées a, ξ_1 et ξ_2 la même quantité

$$\frac{m\xi + m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2}{M},$$

M étant la somme des masses, on trouvera, après quelques réductions, la

valeur suivante de a, et de la même manière les valeurs ci-jointes de b et de c,

$$11. \quad \begin{cases} a = \dfrac{\xi+\gamma_1\xi_1-\delta_2\xi_2}{1+\gamma_1-\delta_2}, \\ b = \dfrac{v+\gamma_1 v_1-\delta_2 v_2}{1+\gamma_1-\delta_2}, \\ c = \dfrac{\zeta+\gamma_1\zeta_1-\delta_2\zeta_2}{1+\gamma_1-\delta_2}. \end{cases}$$

Les constantes γ_1 et δ_2 qui entrent dans ces formules pourront être des quantités quelconques remplissant l'équation de condition

$$12. \quad \left(\gamma_1-\frac{m_1}{m}\right)\left(\delta_2+\frac{m_2}{m}\right) = \frac{M}{m}\gamma_1\delta_2;$$

il sera donc, entre autres, permis de mettre

$$13. \quad \delta_2 = 0, \quad \gamma_1 = \frac{m_1}{m}, \quad \text{ou} \quad \gamma_1 = 0, \quad \delta_2 = -\frac{m_2}{m}.$$

En supposant toujours

$$\gamma = -\delta = 1,$$

on aura encore

$$14. \quad \begin{cases} M\alpha = -[(m_1+m_2)\gamma_1+m_1], & M\beta = (m_1+m_2)\delta_2-m_1, \\ M\alpha_1 = m\gamma_1+m+m_2, & M\beta_1 = -[m\delta_2+m_2], \\ M\alpha_2 = m\gamma_1-m_1, & M\beta_2 = -m\delta_2+m+m_1, \\ \gamma_2 = -(1+\gamma_1), \quad \delta_1 = 1-\delta_2, & \\ \mu = mm_2\gamma_1\dfrac{1+\gamma_1-\delta_2}{m\delta_2+m_2} = \dfrac{m_2(m\gamma_1-m_1)}{M\delta_2}(1+\gamma_1-\delta_2), & \\ \mu_1 = mm_1\delta_2\dfrac{1+\gamma_1-\delta_2}{m\gamma_1-m_1} = \dfrac{m_1(m\delta_2+m_2)}{M\gamma_1}(1+\gamma_1-\delta_2). & \end{cases}$$

Les formules (11.) sont indépendantes de l'origine des coordonnées; elles font voir que le point autour duquel on suppose les deux planètes décrire des orbites elliptiques variables est le centre de gravité des trois corps, si l'on donne respectivement au Soleil, à la première et à la deuxième planète, les masses 1, γ_1, $-\delta_2$. Si l'on fait $\delta_2=0$, ce point deviendra le centre de gravité du Soleil et de la première planète, en leur attribuant leurs masses effectives m et m_1. On aura dans ce cas

$$15. \quad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{m_1}{m}, & \alpha_1 = 1, & \alpha_2 = 0, \\ \beta = -\dfrac{m_1}{M}, & \beta_1 = -\dfrac{m_2}{M}, & \beta_2 = \dfrac{m+m_1}{M}, \\ \gamma = 1, & \gamma_1 = \dfrac{m_1}{m}, & \gamma_2 = -\left(1+\dfrac{m_1}{m}\right), \\ \delta = -1, & \delta_1 = 1, & \delta_2 = 0, \\ \mu = m_1\left(1+\dfrac{m_1}{m}\right), & & \mu_1 = m_2\dfrac{m+m_1}{M}. \end{cases}$$

On voit donc qu'il faudra attribuer aux planètes des masses un peu différentes dont la raison n'est plus $\frac{m_1}{m_2}$, mais $\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{M}{m}$.

3. Ayant établi entre les quantités x, y, etc., les équations (6.) du nº 2., les corps dont les coordonnées sont x, y, z et x_1, y_1, z_1, décriront autour de l'origine des coordonnées comme foyer des orbites elliptiques. Nommons, par rapport au premier de ces corps,

$2a$ le grand axe de son orbite,

$2p$ le paramètre,

i l'inclinaison du plan de l'orbite à un plan fixe,

Ω la longitude du noeud ascendant du plan de l'orbite sur le plan fixe,

et notons d'un trait les mêmes quantités rapportées au deuxième corps; cela posé, on aura par les formules connues pour le mouvement elliptique d'une planète autour du Soleil,

$$1.\quad \begin{cases} x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt} = k\sqrt{p}.\cos i, \\ y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt} = k\sqrt{p}.\sin i\sin\Omega, \\ z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt} = -k\sqrt{p}.\sin i\cos\Omega, \\ x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt} = k_1\sqrt{p_1}.\cos i_1, \\ y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt} = k_1\sqrt{p_1}.\sin i_1\sin\Omega_1, \\ z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt} = -k_1\sqrt{p_1}.\sin i_1\cos\Omega_1, \end{cases}$$

où l'on a

$$2.\quad kk = -\frac{1}{\gamma_2}\cdot\frac{mm_1}{\mu},\qquad k_1k_1 = \frac{1}{\delta_1}\cdot\frac{mm_2}{\mu_1},$$

et où pour le plan des x et y est pris le plan fixe, et pour l'axe des x la droite fixe de laquelle les noeuds ascendants sont comptés.

Pour le véritable mouvement donné par les équations (13.) du nº 1., on laisse subsister la forme des expressions elliptiques, en en faisant varier les éléments. Dans cette supposition, *l'on a entre les six éléments troublés* p, i, Ω, p_1, i_1, Ω_1, *trois équations au moyen desquelles on exprime immédiatement les trois quantités* $\sqrt{p_1}.\cos i_1$, $\sqrt{p_1}.\sin i_1\sin\Omega_1$, $\sqrt{p_1}.\sin i_1\cos\Omega_1$, *par les trois autres* $\sqrt{p}.\cos i$, $\sqrt{p}.\sin i\sin\Omega$, $\sqrt{p}.\sin i\cos\Omega$. En effet, en substituant les formules (1.) dans les formules (15.) du nº 1., l'on trouve

entre ces quantités les simples relations suivantes:

$$3.\quad \begin{cases} \mu k\sqrt{p}.\cos i + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}.\cos i_1 = c_2, \\ \mu k\sqrt{p}.\sin i\sin\Omega + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}.\sin i_1\sin\Omega_1 = c, \\ \mu k\sqrt{p}.\sin i\cos\Omega + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}.\sin i_1\cos_1\Omega = c_1, \end{cases}$$

c, c_1, c_2 étant des constantes arbitraires.

On sait que l'on peut disposer de la direction des axes des coordonnées de manière à faire évanouir deux des trois constantes c, c_1, c_2. Supposons donc

$$c = 0, \quad c_1 = 0,$$

le plan des x et y sera celui auquel *Laplace* a donné le nom de *plan invariable*. En faisant $c = c_1 = 0$, les équations (3.) se changent dans les suivantes,

$$4.\quad \begin{cases} \mu k\sqrt{p}.\cos i + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}.\cos i_1 = c_2, \\ \mu k\sqrt{p}.\sin i + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}.\sin i_1 = 0, \\ \Omega = \Omega_1. \end{cases}$$

Les deux premières de ces formules font voir *que les inclinaisons des plans des deux orbites au plan invariable sont parfaitement déterminées par les deux paramètres,* et *vice versa.* Nommant $I = i_1 - i$ l'inclinaison mutuelle des deux plans, on déterminera I par la formule

$$5.\quad 4\mu\mu_1 kk_1\sqrt{pp_1}.\sin I^2 = \{\mu k\sqrt{p} + \mu_1 k_1\sqrt{p_1}\}^2 - c,$$

et ensuite on aura i et i_1 eux-mêmes par les formules

$$6.\quad \begin{cases} c_2\sin i_1 = \mu k\sqrt{p}.\sin I, \\ c_2\sin i = -\mu_1 k_1\sqrt{p_1}.\sin I. \end{cases}$$

Il suit de ces formules *que le plan invariable passera constamment entre les plans des deux orbites.* On voit par la troisième des formules (4.), que *l'intersection commune des plans des deux orbites se meut dans le plan invariable.* Je remarque que la position du plan d'une orbite, est indépendante de la forme que l'on suppose à cet orbite, et qu'elle est entièrement déterminée dès que le centre du mouvement ou l'origine des coordonnées est fixé. En effet, ce plan est celui qui passe, dans chaque moment du temps, par l'origine des coordonnées et par deux positions consécutives de la planète.

4. L'intersection commune des plans des deux orbites tournant autour du centre des coordonnées dans un plan fixe dans l'espace, et que l'on prendra pour celui des x et y, il paraît naturel de prendre pour variables,

Les deux rayons vecteurs . . . . r et r_1,
Leurs distances au noeud ascendant commun des plan des deux orbites . . . . v et v_1,
Les inclinaisons des ces plans au plan invariable . . . . i et i_1,
La longitude du noeud ascendant commun des deux plans ou sa distance à l'axe des x . . . . Ω.

Par les formules connues de la trigonométrie sphérique, on aura

$$1.\quad \begin{cases} x = r(\cos\Omega\cos v - \sin\Omega\cos i\sin v), \\ y = r(\sin\Omega\cos v + \cos\Omega\cos i\sin v), \\ z = r\sin i\sin v, \\ x_1 = r_1(\cos\Omega\cos v_1 - \sin\Omega\cos i_1\sin v_1), \\ y_1 = r_1(\sin\Omega\cos v_1 + \cos\Omega\cos i_1\sin v_1), \\ z_1 = r_1\sin i_1\sin v_1. \end{cases}$$

Nommons δv l'angle de deux rayons vecteurs consécutifs de la première planète fictive; comme dans le plan de l'orbite d'une planète se trouve aussi sa position consécutive, on tirera des formules (1.) les deux systèmes de formules

$$2.\quad \begin{cases} d\frac{x}{r} = -(\cos\Omega\sin v + \sin\Omega\cos i\cos v)\,\delta v = A\,\delta v, \\ d\frac{y}{r} = -(\sin\Omega\sin v - \cos\Omega\cos i\cos v)\,\delta v = B\,\delta v, \\ d\frac{z}{r} = \sin i\cos v\,\delta v = C\,\delta v; \end{cases}$$

$$3.\quad \begin{cases} d\frac{x}{r} = A\,dv + A'\,di - \frac{y}{r}\,d\Omega, \\ d\frac{y}{r} = B\,dv + B'\,di + \frac{x}{r}\,d\Omega, \\ d\frac{z}{r} = C\,dv + C'\,di, \end{cases}$$

en faisant

$$4.\quad \begin{cases} A' = \sin\Omega\sin i\sin v, \\ B' = -\cos\Omega\sin i\sin v, \\ C' = \cos i\sin v. \end{cases}$$

Il suit des formules (2.) et (3.),

$$5.\quad \begin{cases} 0 = A(dv - \delta v) + A'di - \frac{y}{r}\,d\Omega, \\ 0 = B(dv - \delta v) + B'di + \frac{x}{r}\,d\Omega, \\ 0 = C(dv - \delta v) + C'di. \end{cases}$$

On tire des formules (1.), (2.) et (4.)

$$6.\quad\begin{cases}\cos\Omega.A+\sin\Omega.B=-\sin v,\\ \cos\Omega.A'+\sin\Omega.B'=0,\\ -\cos\Omega.y+\sin\Omega.x=-r\cos i\sin v.\end{cases}$$

On aura donc, d'après les formules (5.),

$$7.\quad\begin{cases}\delta v-dv=\cos i d\Omega=\operatorname{tang}v.\dfrac{di}{\operatorname{tang}i},\\ d\Omega=\operatorname{tang}v.\dfrac{di}{\sin i}.\end{cases}$$

La formule

$$\delta v-dv=\cos i d\Omega$$

peut être déduite aisément de la considération d'un triangle sphérique formé par les côtés

$$d\Omega,\quad v+\delta v,\quad v+dv.$$

Soient

$$8.\quad\begin{cases}\cos\Omega=n\cos p, & \sin\Omega=n'\cos p',\\ \cos i\sin\Omega=n\sin p, & \cos i\sin\Omega=n'\sin p',\end{cases}$$

on aura

$$9.\quad\begin{cases}x=r.n\cos(v+p), & y=r.n'\cos(v-p'),\\ d.\dfrac{x}{r}=-n\sin(v+p)\delta v, & d.\dfrac{y}{r}=-n'\sin(v-p')\delta v.\end{cases}$$

Il s'ensuit de ces formules,

$$xd.\frac{y}{r}-yd.\frac{x}{r}=rnn'\sin(p+p')\delta v,$$

$$yd.\frac{z}{r}-zd.\frac{y}{r}=r\sin i.n'\cos p'.\delta v,$$

$$zd.\frac{x}{r}-xd.\frac{z}{r}=-r\sin i.n\cos p.\delta v,$$

ou, en substituant les formules (8.),

$$10.\quad\begin{cases}xdy-ydx=rr\cos i.\delta v,\\ ydz-zdy=rr\sin\Omega\sin i.\delta v,\\ zdx-xdz=-rr\cos\Omega\sin i.\delta v.\end{cases}$$

Ajoutant les carrés de ces équations, on a, d'après des formules connues,

$$rr(dx^2+dy^2+dz^2-dr^2)=r^4\delta v^2,$$

ou

$$11.\quad dxdx+dydy+dzdz=drdr+rr\delta v\delta v.$$

Pour avoir des formules semblables par rapport à la deuxième des planètes fictives, on n'a qu'à ajouter un trait à chaque lettre dans les formules (2.),

(10.) et (11.), pourvu qu'on nomme dv_1 l'angle que forment ses deux rayons vecteurs consécutifs. Donc, puisqu'on a $\Omega_1 = \Omega$, il viendra, d'après la seconde des formules (7.),

$$12.\qquad \operatorname{tang} v . \frac{di}{\sin i} = \operatorname{tang} v_1 . \frac{di}{\sin i}.$$

Mettant $c = c_1 = 0$ dans les formules (15.), n° 1, et substituant les formules (10.), ainsi que leurs semblables relatives à la deuxième planète, on a

$$13.\qquad \begin{cases} \mu rr \cos i . \delta v + \mu_1 r_1 r_1 \cos i_1 . \delta v_1 = c_2 dt, \\ \mu rr \sin i . \delta v + \mu_1 r_1 r_1 \sin i_1 . \delta v_1 = 0. \end{cases}$$

De ces formules on tire les valeurs suivantes de δv et de δv_1,

$$14.\qquad \begin{cases} \delta v = dv + \operatorname{tang} v \dfrac{di}{\operatorname{tang} i} = -\dfrac{c_2 \sin i}{\mu rr \sin I} dt, \\ \delta v_1 = dv_1 + \operatorname{tang} v_1 \dfrac{di_1}{\operatorname{tang} i_1} = -\dfrac{c_2 \sin i}{\mu_1 r_1 r_1 \sin I} dt, \end{cases}$$

où, comme ci-dessus, on a fait $I = i_1 - i$. Substituant la première de ces formules dans la première des formules (10.), il vient

$$15.\qquad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = -\frac{c_2 \sin i_1 \cos i}{\mu \sin I}.$$

La différentielle de cette quantité sera égale à

$$-\frac{c_2}{\mu} . \frac{\sin i_1^2 \cos i^2}{\sin I^2} d . \frac{\sin I}{\sin i_1 \cos i} = \frac{c_2}{\mu} . \frac{\sin i_1^2 \cos i^2}{\sin I^2} d . \operatorname{tang} i \text{ c.} \operatorname{tang} i_1;$$

on aura donc

$$16.\qquad x \frac{d^2 y}{dt} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{c_2}{\mu \sin I^2} \left(\sin i_1 \cos i_1 \frac{di}{dt} - \sin i \cos i \frac{di_1}{dt} \right).$$

On tire encore des formules (11.) et (14.) la suivante

$$17.\qquad \cos i_1 dv - \cos i dv_1 = \frac{c_2}{\sin I} \left(\frac{\sin i_1 \cos i_1}{\mu rr} + \frac{\sin i \cos i}{\mu_1 r_1 r_1} \right) dt.$$

L'expression de la force vive du système est fournie par la formule (4.), n° 1., et par les formules (11.) et (14.) données ci-dessus,

$$18.\qquad \begin{cases} 2T = \mu \left[rr \left(\dfrac{\delta v}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta r}{dt}\right)^2 \right] + \mu_1 \left[r_1 r_1 \left(\dfrac{\delta v_1}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta r_1}{dt}\right)^2 \right] \\ \quad = \dfrac{c_2^2}{\sin I^2} \left(\dfrac{\sin i_1^2}{\mu rr} + \dfrac{\sin i^2}{\mu_1 r_1 r_1} \right) + \mu \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + \mu_1 \left(\dfrac{dr_1}{dt}\right)^2. \end{cases}$$

Les formules (12.) et (19.), n° 1., donnent

$$19.\qquad \begin{cases} 2T = 2U - 2h, \\ \mu r \dfrac{d^2 r}{dt^2} + \mu_1 r_1 \dfrac{d^2 r_1}{dt^2} + \mu \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + \mu_1 \left(\dfrac{dr_1}{dt}\right)^2 = U - 2h, \end{cases}$$

d'où vient

$$20.\quad \begin{cases} \mu\left[2r\frac{d^2r}{dt^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]+\mu_1\left[2r_1\frac{d^2r_1}{dt^2}+\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2\right] \\ \qquad\qquad -\frac{c_2^2}{\sin I^2}\left[\frac{\sin i_1^2}{\mu rr}+\frac{\sin i^2}{\mu_1 r_1 r_1}\right]+2h=0. \end{cases}$$

Remarquons encore la formule qui dérive des formules (1.),

$$21.\quad xy_1-yx_1=rr_1(\cos i_1\sin v_1\cos v-\cos i\sin v\cos v_1).$$

Des formules (12.) et (16.) on tire

$$22.\quad \begin{cases} x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{c_2\sin i_1}{\mu\cos v\sin v_1\sin I^2}(\cos i_1\sin v_1\cos v-\cos i\sin v\cos v_1)\frac{di}{dt} \\ \qquad =\frac{c_2\sin i_1(xy_1-yx_1)}{\mu\cos v\sin v_1\sin I^2 rr_1}\cdot\frac{di}{dt}. \end{cases}$$

Substituant cette formule dans la dernière des formules (14.), n° 1., il vient

$$23.\quad \frac{c_2\sin i_1}{\cos v\sin v_1\sin I^2 rr_1}\cdot\frac{di}{dt}=-\left(\frac{mm_1\gamma_2\delta_2}{\varrho_2^3}+\frac{mm_2\gamma_1\delta_1}{\varrho_1^3}+\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\varrho^3}\right).$$

Comme on a, d'après les formules (11.) et (14.),

$$24.\quad x\,d^2x+y\,d^2y+z\,d^2z=\tfrac{1}{2}d^2.rr-(dr\,dr+rr\,\delta v^2)=r\,d^2r-c_2^2\frac{\sin i_1^2}{\mu^2r^2\sin I^2}dt^2,$$

il suit des formules (13.), n° 1.,

$$25.\quad \begin{cases} \mu\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{c_2c_2}{\mu}\cdot\frac{\sin i_1^2}{\sin I^2 r^3}-\frac{mm_1\gamma_2(\gamma_2r+\delta_2r_1\cos U)}{\varrho_2^3} \\ \qquad -\frac{mm_2\gamma_1(\gamma_1r+\delta_1r_1\cos U)}{\varrho_1^3}-\frac{m_1m_2\gamma(\gamma r+\delta r_1\cos U)}{\varrho^3}. \end{cases}$$

Des formules (18.) et (25.) on peut déduire la suivante

$$26.\quad \frac{c_2^2}{\mu rr}d.\frac{\sin i_1^2}{\sin I^2}+\frac{c_2^2}{\mu_1r_1r_1}d.\frac{\sin^2 i^2}{\sin I^2}$$

$$=4rr_1\sin U\,dU\left(\frac{mm_1\gamma_2\delta_2}{\varrho_2^3}+\frac{mm_2\gamma_1\delta_1}{\varrho_1^3}+\frac{m_1m_2\gamma\delta}{\varrho^3}\right).$$

On obtient aussi la valeur de dU en observant que, dans l'équation

$$\cos U=\cos v\cos v_1+\cos I\sin v\sin v_1,$$

on peut mettre en même temps $U+dU$, $v+\delta v$, $v_1+\delta v_1$ au lieu de U, v, v_1, ce qui donne

$$27.\quad \begin{cases} \sin U\,dU=(\sin v\cos v_1-\cos I\cos v\sin v_1)\delta v \\ \qquad\qquad +(\cos v\sin v_1-\cos I\sin v\cos v_1)\delta v_1. \end{cases}$$

Si, dans le triangle sphérique formé par les côtés U, v, v_1, on nomme φ et φ_1 les angles opposés aux côtés v et v_1, on a

28. $$dU = \cos\varphi\,\delta v + \cos\varphi_1\,\delta v_1,$$

formule qui fournit l'interprétation géométrique de la formule (27.)

Les formules (14.), (23.) et (27.) pourront servir à vérifier la formule (26.)

5. Entre les six quantités

$$r,\ r_1;\quad v,\ v_1;\quad i,\ i_1$$

et le temps t, on a, d'après les formules (12.), (14.), (19.), (23.) du précédent article, les équations suivantes qui pourront servir à développer ces quantités en fonctions du temps.

Équations différentielles du problème des trois corps.

I. $$\operatorname{tang} v \frac{di}{\sin i} = \operatorname{tang} v_1 . \frac{di_1}{\sin i_1},$$

II. $$\operatorname{tang} v \frac{di}{\operatorname{tang} i} + dv = \frac{c_2}{\mu} . \frac{\sin i_1}{\sin I} . \frac{dt}{rr},$$

III. $$\operatorname{tang} v \frac{di_1}{\operatorname{tang} i_1} + dv_1 = \frac{c_2}{\mu_1} . \frac{\sin i}{\sin I} . \frac{dt}{r_1 r_1},$$

IV. $$\frac{c_2 \sin i_1}{\cos v \sin v_1 \sin I^2\, r r_1}\, di = -\left(\frac{mm_1\gamma_2\delta_2}{\varrho_2^3} + \frac{mm_2\gamma_1\delta_1}{\varrho_1^3} + \frac{m_1m_2\gamma\delta}{\delta^3}\right) dt,$$

V. $$\frac{c_2^2}{\sin I^2}\left(\frac{\sin i_1^2}{\mu rr} + \frac{\sin i^2}{\mu_1 r_1 r_1}\right) + \mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \mu_1\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 = 2U - 2h,$$

VI. $$\frac{d^2(\mu rr + \mu_1 r_1 r_1)}{dt^2} = 2U - 4h.$$

On a mis dans ces formules

1. $$\begin{cases} U = \dfrac{mm_1}{\varrho_2} + \dfrac{mm_2}{\varrho_1} + \dfrac{m_1m_2}{\varrho} \\ \varrho\varrho = \gamma\gamma rr + 2\gamma\delta rr_1 \cos U + \delta\delta r_1 r_1, \\ \varrho_1\varrho_1 = \gamma_1\gamma_1 rr + 2\gamma_1\delta_1 rr_1 \cos U + \delta_1\delta_1 r_1 r_1, \\ \varrho_2\varrho_2 = \gamma_2\gamma_2 rr + 2\gamma_2\delta_2 rr_1 \cos U + \delta_2\delta_2 r_1 r_1, \\ \cos U = \cos v \cos v_1 + \cos I \sin v \sin v_1 . \end{cases}$$

Entre les six constantes γ, δ, etc., on a les équations de condition

2. $$\begin{cases} \gamma + \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \\ \delta + \delta_1 + \delta_2 = 0, \\ m_1m_2\gamma\delta + m_2m\gamma_1\delta_1 + mm_1\gamma_2\delta_2 = 0, \end{cases}$$

où m, m_1, m_2 sont les masses du Soleil et des deux planètes. Donc trois des constantes γ, δ, etc., pourront être prises à l'arbitraire. Les quantités u et μ_1 sont déterminées par les formules

$$3.\quad \begin{cases} M\mu = m_1 m_2 \gamma\gamma + m_2 m \gamma_1 \gamma_1 + m m_1 \gamma_2 \gamma_2, \\ M\mu_1 = m_1 m_2 \delta\delta + m_2 m \delta_1 \delta_1 + m m_1 \delta_2 \delta_2, \end{cases}$$

M étant la somme des trois masses.

Après avoir intégré complétement le système des six équations (I. à VI.), on a encore à déterminer l'angle Ω au moyen de la formule

$$\text{VII.}\quad d\Omega = \operatorname{tang} v \,.\, \frac{di}{\sin i},$$

ce qui se fait par une simple quadrature. On formera ensuite les six quantités

$$4.\quad \begin{cases} x = r(\cos\Omega\cos v - \sin\Omega\cos i\sin v), & x_1 = r_1(\cos\Omega\cos v_1 - \sin\Omega\cos i_1\sin v_1), \\ y = r(\sin\Omega\cos v + \cos\Omega\cos i\sin v), & y_1 = r_1(\sin\Omega\cos v_1 + \cos\Omega\cos i_1\sin v_1), \\ z = r\sin i\sin v, & z_1 = r_1\sin i_1\sin v_1, \end{cases}$$

et les six constantes

$$5.\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{m_1\gamma_2 - m_2\gamma_1}{M}, & \beta = \dfrac{m_1\delta_2 - m_2\delta_1}{M}, \\ \alpha_1 = \dfrac{m_2\gamma - m\gamma_2}{M}, & \beta_1 = \dfrac{m_2\delta - m\delta_2}{M}, \\ \alpha_2 = \dfrac{m\gamma_1 - m_1\gamma}{M}, & \beta_2 = \dfrac{m\delta_1 - m_1\delta}{M}, \end{cases}$$

après quoi on aura les coordonnées rectangulaires du Soleil et des deux planètes, rapportées à leur centre de gravité, le plan invariable étant pris pour celui des x et y,

$$6.\quad \begin{cases} \xi = \alpha x + \beta x_1, & \xi_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x_1, & \xi_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x_1, \\ v = \alpha y + \beta y_1, & v_1 = \alpha_1 y + \beta_1 y_1, & v_2 = \alpha_2 y + \beta_2 y_1, \\ \zeta = \alpha z + \beta z_1, & \zeta_1 = \alpha_1 z + \beta_1 z_1, & \zeta_2 = \alpha_2 z + \beta_2 z_1. \end{cases}$$

Voilà donc le problème des trois corps réduit à l'intégration des six équations (I. à VI.) et à une quadrature. *Les six équations différentielles* (I. à VI.) *sont toutes du premier degré, hors une seule qui est du second, et il n'y entre aucune trace des noeuds.*

4.

Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi.

Argumentum.

§. 1.

Propositurus sum sequentibus *Euleriani* Multiplicatoris extensionem, per totum calculum integralem uberrimi usus et frequentissimae applicationis, eamque ab amplificationibus ab ipso *Eulero* et *Lagrange* factis diversissimam. Quae amplificatio maxime nititur analogia, quam in alia Commentatione pluribus prosecutus sum, inter quotientes differentiales et Determinantia functionalia. Efficit *Eulerianus* Multiplicator ut duae *duarum* variabilium functiones datae producant eiusdem functionis differentialia partialia. Respondent autem differentialibus partialibus Determinantia functionalia partialia, quae formari possunt quoties variabilium numerus numerum functionum superat, variis eligendo modis variabiles quarum respectu Determinans formetur Ita datis n functionibus $n+1$ variabilium earum functionum dabuntur $n+1$ Determinantia partialia; veluti si f et φ trium variabilium x, y, z functiones sunt, tria earum functionum Determinantia partialia erunt

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z},\quad \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Quibus considerationibus motus, ut *Eulerianam* theoriam amplificarem, generaliter Multiplicatorem examinavi, in quem ducendae essent $n+1$ functiones $n+1$ variabilium ut producta haberi possent pro earundem n functionum Determinantibus functionalibus partialibus. Quemadmodum autem, proposita functione duarum variabilium, inter bina eius differentialia partialia intercedit aliqua conditio ex elementis nota, scilicet ut alterius differentiale secundum alteram variabilem sumtum alterius differentiali secundum alteram variabilem sumto aequale sit: ita inter illa $n+1$ Determinantia functionalia partialia inveni locum habere conditionem analogam. Singulis enim Determinantibus functionalibus partialibus respective secundum singulas variabiles differentiatis, aggregatum $n+1$ quantitatium provenientium videbimus identice evanescere. Quod suppe-

ditat aequationem differentialem partialem, cui Multiplicator ille satisfacere debeat, ei analogam qua *Eulerianus* Multiplicator definitur. Et vice versa, siculi in theoria *Euleriana*, quamcunque quantitatem, aequationi illi differentiali partiali satisfacientem, videbimus pro Multiplicatore haberi posse. Unde ad Multiplicatorem aliquem obtinendum non necessarium erit ut illae n functiones ipsae innotescant.

Investigatio ipsius functionis duarum variabilium, cuius differentialia partialia datis functionibus proportionalia sint, pendet ab integratione completa aequationis differentialis vulgaris primi ordinis inter duas variabiles; quippe quae ea erit functio, quae Constanti Arbitrariae aequalis evadit. Multiplicator autem, qui functiones datas *aequales* efficit binis differentialibus eius functionis partialibus, ipsius *aequationis differentialis* Multiplicator appellatur. Qui aequationis differentialis integratione completa sponte suppeditatur, et vice versa eius cognitione ipsa integratio maxime expeditur, videlicet ad solas revocatur Quadraturas. Similiter datis $n+1$ variabilium $n+1$ functionibus, ut obtineantur n functiones quarum Determinantia partialia rationes easdem atque illae inter se habeant: facile patebit, integrandum esse systema n aequationum differentialium vulgarium primi ordinis, quo scilicet statuitur illarum $n+1$ variabilium differentialia esse in ratione ipsarum $n+1$ quantitatum propositarum. Quo complete integrato functiones, quae Constantibus Arbitrariis a se independentibus aequales evadunt, ipsae erunt n functiones quaesitae. Atque Multiplicatorem, qui $n+1$ quantitates datas Determinantibus earum functionum partialibus aequales efficit, per analogiam illius *systematis aequationum differentialium vulgarium Multiplicatorem* appello. Iam quidem complete integrato systemate aequationum differentialium vulgarium, eius facile innotescit Multiplicator; quippe ad quem inveniendum tantum opus est ut functionum Constantibus Arbitrariis aequalium, quae per integrationem completam constant, unum aliquod formetur Determinans partiale. At vice versa, cognito aliquo systematis aequationum differentialium Multiplicatore, sive quod idem est, cognita aliqua solutione aequationis differentialis partialis qua Multiplicator definitur, non ita patebat, utrum et quodnam inde commodum vel auxilium ad integrandum systema peti posset, ita ut nostri Multiplicatoris analogia cum *Euleriano* videretur in ea ipsa re deficere, qua propter olim *Eulerus* sui Multiplicatoris theoriam condidit. Contigit tandem usum introspicere plane singularem quem in integrando aequationum differentialium systemate e Multiplicatoris cognitione percipere liceat, quod scilicet eius ope non prima aliqua, sed omnium ultima integratio ad Quadraturas revocetur.

Hinc in theoria integrationis aequationum differentialium vulgarium novus disquisitionum aperitur campus, videlicet ultimas investigandi integrationes, dum primae non innotescunt. Quippe in vastis et luculentissimis problematis per theoriam hic propositam fit ut ultima generaliter absolvatur integratio, dum in casibus tantum particularibus Integralia prima invenire licet.

Capite primo examinabo Multiplicatoris nostri varias formas insignioresque proprietates. In altero Capite eius monstrabo usum in integrando aequationum differentialium vulgarium systemate. In Capite tertio theoriam Multiplicatoris extendam ad systemata aequationum differentialium vulgarium cuiuslibet ordinis. In Commentationibus deinde subsequentibus mihi propositum est praecepta hic tradita variis illustrare applicationibus; e quibus est principium novum mechanicum latissime patens, nuper a me sine demonstratione divulgatum.

Caput primum.

Novi Multiplicatoris definitio et varii proprietates.

Lemma Fundamentale eiusque varii usus; de Determinantibus functionalibus partialibus.

§. 2.

Aequatione inter variabiles x et y proposita,

$$f(x, y) = \text{const.},$$

obtinetur differentialium dx et dy ratio,

$$dx : dy = \frac{\partial f}{\partial y} : -\frac{\partial f}{\partial x} \text{ *)}.$$

Si de hac ratione differentialium dx et dy sola agitur, in dextra parte aequationis antecedentis omittere licet differentialium partialium $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ factorem vel denominatorem, si quo afficiuntur communem. Ubi vero pro quantitatibus, quae differentialibus dx et dy proportionales evadunt ipsa sumere placet $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $-\frac{\partial f}{\partial x}$ vel $-\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$, qualia differentiatione partiali prodeunt, nullo

*) Differentialia vulgaria ut in aliis Commentationibus charactere — d —, partialia charactere — ∂ — denoto.

factore aut denominatore communi rejecto, eam conditionem formula analytica exprimi posse constat.

Videlicet si quantitas ipsi dx proportionalis differentiatur ipsius x respectu, quantitas ipsi dy proportionalis differentiatur ipsius y respectu, quantitatum differentiatione provenientium summa identice evanescere debet. Theorema simile ad plures variabiles valet.

Aequationibus enim inter x, y, z propositis,

$$f(x, y, z) = \text{Const.}, \quad \varphi(x, y, z) = \text{Const.},$$

obtinetur differentiando,

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0.$$

E quibus aequationibus eruuntur differentialium dx, dy, dz rationes,

$$dx : dy : dz = A : B : C,$$

siquidem ponitur

$$A = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$
$$B = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$
$$C = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Si tantum de rationibus differentialium dx, dy, dz agitur, factorem vel denominatorem communem quantitatum A, B, C, si quo afficiuntur, omittere licet. Ubi vero pro quantitatibus, quae differentialibus dx, dy, dz proportionales evadunt, ipsa sumere placet A, B, C, nullo factore vel denominatore communi rejecto, eam conditionem aliqua formula analytica exprimi posse videbimus. Fit enim

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x},$$
$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y},$$
$$\frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}.$$

Quae expressiones additae sese mutuo destruunt, unde eruitur,

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

hoc est, si quantitatem ipsi dx proportionalem ipsius x respectu, quantitatem

ipsi dy porportionalem ipsius y respectu, quantitatem ipsi dz proportionalem ipsius z respectu differentiamus, trium quantitatum differentiatione provenientium summa identice evanescere debet. Quae conditio prorsus analoga est ei, quae antecedentibus de duabus variabilibus tradita est atque e primis elementis constat. Antecedentia ad numerum variabilium quemcunque extendere licet, siquidem advocantur propositiones quas in *Diario Crell. Vol. XXIII.* de Determinantibus algebraicis et functionalibus tradidi et quarum per totam hanc Commentationem usum frequentissimum faciam. Habetur enim sequens

Lemma fundamentale.

„*Sint* $A, A_1, A_2, \ldots A_n$ *quantites quae in Determinante Functionali*

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

respective per $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ *multiplicatae reprehenduntur, erit*

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = 0."$$

Demonstratio.

Secundum definitionem quantitatum A, A_1 etc. fit

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x} A + \frac{\partial f}{\partial x_1} A_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} A_2 \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} A_n.$$

Unde Lemma demonstratu propositum sic quoque exhibere licet:

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\partial . fA}{\partial x} + \frac{\partial . fA_1}{\partial x_1} + \frac{\partial . fA_2}{\partial x_2} \cdots + \frac{\partial . fA_n}{\partial x_n}.$$

Facio hanc formulam iam demonstratam esse pro $n-1$ functionibus n variabilium, probabo Lemma ad n functiones $n+1$ variabilium valere.

Designo per (i, k) quantitatem quae in Determinante Functionali $\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$ multiplicata reprehenditur per factorem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_k}.$$

Constat autem per Determinantium proprietates iam olim ab ill. *Laplace* adnotatas, *bina Aggregata, in Determinante functionali proposito resp. per* $\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_k}$ *et per* $\frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_i}$ *multiplicata, valoribus oppositis gaudere.* Unde sequitur

$$(i, k) = -(k, i) \quad \text{sive} \quad (i, k) + (k, i) = 0.$$

Est A_i complexus terminorum eius Determinantis qui per $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ multiplicantur, unde fit

$$A_i = \frac{\partial f_1}{\partial x}(i, 0) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(i, 1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(i, 2) \ldots\ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(i, n),$$

qua in formula ipsum (i, i) aut omittendum aut $= 0$ ponendum est. Est porro A_i Determinans functionum $f_1, f_2, \ldots\ldots f_n$ formatum respectu variabilium $x, x_1, x_2, \ldots\ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots\ldots x_n$ atque sunt $(i, 0)$, $(i, 1)$ etc. quantitates quae in Determinante Functionali A_i multiplicatae reprehenduntur per $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ etc. Unde si Lemma propositum ad $n-1$ functiones n variabilium valet, erit pro indicis i valoribus $0, 1, 2, \ldots\ldots n$,

$$\frac{\partial(i, 0)}{\partial x} + \frac{\partial(i, 1)}{\partial x_1} \ldots\ldots + \frac{\partial(i, n)}{\partial x_n} = 0,$$

ideoque etiam

$$A_1 = \frac{\partial . f_1(i, 0)}{\partial x} + \frac{\partial . f_1(i, 1)}{\partial x_1} \ldots\ldots + \frac{\partial . f_1(i, n)}{\partial x_n}.$$

Quae formula pro quolibet ipsius i valore $0, 1, 2, \ldots\ldots n$ valet. Iam generaliter observo, *quoties ponatur*

$$H_i = \frac{\partial . a_{i,0}}{\partial x} + \frac{\partial . a_{i,1}}{\partial x_1} \ldots\ldots + \frac{\partial . a_{i,n}}{\partial x_n},$$

designantibus $a_{i,k}$ *quantitates quascunque pro quibus sit*

$$a_{i,k} + a_{k,i} = 0, \quad a_{i,i} = 0,$$

fieri

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \ldots\ldots + \frac{\partial H_n}{\partial x_n} = 0.$$

Bina enim differentialia inter se juncta,

$$\frac{\partial . \frac{\partial . a_{i,k}}{\partial x_k}}{\partial x_i} + \frac{\partial . \frac{\partial . a_{k,i}}{\partial x_i}}{\partial x_k},$$

mutuo destruuntur, unde totam expressionem $\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \ldots\ldots + \frac{\partial H_n}{\partial x_n}$ identice evanescere invenis. Ponendo autem $f_1 . (i, k) = a_{i,k}$, satisfit conditioni $a_{i,k} = -a_{k,i}$, porro fit $H_i = A_i$; ideoque

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \ldots\ldots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = 0,$$

sive Lemma de n functionibus $n+1$ variabilium justum erit, dummodo de $n-1$ functionibus n variabilium locum habet. Unde tantum necesse est ut Lemma pro una functione duarum variabilium constet. Pro una autem functione f_1

duarum variabilium x et y abeunt quantitates A etc. in differentialia partialia $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ et $-\frac{\partial f_1}{\partial x}$, ideoque Lemma redit in formulam

$$\frac{\partial . \frac{\partial f_1}{\partial x}}{\partial y} - \frac{\partial . \frac{\partial f_1}{\partial y}}{\partial x} = 0,$$

quae est differentialium partialium proprietas fundamentalis supra commemorata.

Lemma generale etiam directe demonstrari potest absque illa reductione numeri n ad numerum $n-1$. Nam cum A_i vacet differentialibus, ipsius x_i respectu sumtis, e quantitatibus $\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$, nulla implicare potest differentialia bis secundum eandem variabilem sumta. Differentialia autem secunda, secundum variabiles diversas x_i et x_k sumta, non provenire possunt nisi e solis duobus terminis

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{\partial A_k}{\partial x_k}.$$

Unde ad probandum Lemma propositum sufficit ut demonstretur, in Aggregato $\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{\partial A_k}{\partial x_k}$ se mutuo destruere terminos per quantitates $\frac{\partial^2 f_m}{\partial x_i \partial x_k}$ multiplicatos. Quod facile patet. Ponamus enim

$$A_i = \alpha_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \alpha_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \dots + \alpha_n \frac{\partial f_n}{\partial x_k},$$

fit secundum Determinantium proprietatem, in priore demonstratione in usum vocatam,

$$A_k = -\left\{\alpha_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \alpha_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \dots + \alpha_n \frac{\partial f_n}{\partial x_i}\right\}.$$

Quantitates α_1, α_2 etc. neque differentialibus secundum x_i sumtis, neque differentialibus secundum x_k sumtis afficiuntur. Unde substituendo ipsarum A_i et A_k expressiones antecedentes, de Aggregato

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{\partial A_k}{\partial x_k}.$$

prorsus exulant differentialia secunda, secundum variabiles x_i et x_k sumta, terminis binis

$$+ \alpha_m \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_k \partial x_i} - \alpha_m \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_i \partial x_k}.$$

se mutuo destruentibus. Erant autem inter omnes terminos Aggregati propositi

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \dots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$$

soli termini $\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{\partial A_k}{\partial x_k}$ qui affici possint differentialibus $\frac{\partial^2 f_m}{\partial x_i \partial x_k}$, unde in Aggregato proposito termini differentialibus secundis secundum x_i et x_k sumtis affecti se mutuo destruunt. Unde cum x_i et x_k binae quaecunque variabiles esse possint a se diversae, illud Aggregatum totum evanescit. Q. d. e.

Quoties numerus variabilium, quas datae functiones $f_1, f_2, \ldots. f_n$ implicant, ipsum functionum numerum n superat, proponi potest, earum functionum Determinantia respectu quarumque n variabilium formare. Quae vocabo functionum $f_1, f_2, \ldots. f_n$ ***Determinantia Partialia*** secundum analogiam denominationis de differentialibus usitatae.

Si numerus variabilium est $n+1$ sicuti antecedentibus, erit numerus Determinantium Functionalium Partialium $n+1$; si numerus variabilium est $n+2$, dabuntur $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ Determinantia Functionalia Partialia, et ita porro. Eorum Determinantium Functionalium Partialium signa cum in arbitrio posita sint, casu quo variabilium numerus numerum functionum tantum unitate superat, supponam, signa omnium Determinantium ab eorum uno ita pendere, ut binorum Determinantium partialium alterum de altero deducatur, in signis differentialibus binarum variabilium independentium commutatione facta, omnium simul terminorum mutatis signis. Quem invenis esse habitum quantitatum A, $A_1, \ldots$ $\ldots A_n$, quae sunt functionum $f_1, f_2, \ldots. f_n$ Determinantia partialia. Videlicet de uno

$$A = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

deducitur $-A_i$, loco ipsorum

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, \quad \ldots. \quad \frac{\partial f_n}{\partial x_i}$$

respective scribendo

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad \ldots. \quad \frac{\partial f_n}{\partial x}.$$

Pro una duarum variabilium x et y functione f_1 abibunt Determinantia partialia in differentialia partialia functionis f_1, alterum positivo alterum negativo signo sumtum,

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}, \; -\frac{\partial f_1}{\partial x} \quad \text{vel} \quad -\frac{\partial f_1}{\partial y}, \; \frac{\partial f_1}{\partial x}.$$

Et quemadmodum inter differentialia partialia $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial f_1}{\partial y}$, locum habet formula fundamentalis,

$$\frac{\partial . \frac{\partial f_1}{\partial y}}{\partial x} - \frac{\partial . \frac{\partial f_1}{\partial x}}{\partial y} = 0,$$

ita $n+1$ variabilium $x, x_1, x_2, \dots x_n$ propositis n functionibus $f_1, f_2, \dots f_n$ Lemmate antecedente constituitur inter Determinantia Partialia $A, A_1, A_2, \dots \dots A_n$ aequatio conditionalis fundamentalis,

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \dots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = 0.$$

Quod igitur Lemma gravissimam manifestat analogiam Determinantium Functionalium et quotientium differentialium partialium.

Lemma traditum dedi olim in Commentatione, *Vol. VI. Diar. Crell. pg. 263 sqq. inserta, „De resolutione aequationum per series infinitas."* Quod eo loco adhibui ad demonstrandam Propositionem quae et ipsa luculentam analogiam Determinantium Functionalium cum differentialibus constituit. Nam cum pateat seriei e solis variabilis x potestatibus conflatae quotientem differentialem vacare termino $\frac{1}{x}$, demonstravi, *serierum $f, f_1, \dots f_n$, conflatarum e solis variabilium $x, x_1, \dots x_n$ potestatibus, Determinans Functionale*

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

vacare termino $\frac{1}{x x_1 x_2 \dots x_n}$. Quippe Determinans antecedens per Lemma nostrum aequatur quantitati

$$\frac{\partial . fA}{\partial x} + \frac{\partial . fA_1}{\partial x_1} \dots + \frac{\partial . fA_n}{\partial x_n},$$

cuius terminus primus evolutus vacare debet termino in $\frac{1}{x}$ ducto, secundus termino in $\frac{1}{x_1}$ ducto, et ita porro, ita ut in tota quantitate evoluta non obvenire possit terminus $\frac{1}{x x_1 x_2 \dots x_n}$.

Quae propositio adhiberi potest ad amplificandum theoriam *Cauchyanam* residuorum dictam, eiusque ope radices systematis simultanei aequationum in series infinitas evolvi, quod in Commentatione citata videas.

Data occasione breviter adhuc innuam usum Lemmatis propositi in integralibus multiplicibus inter datos limites determinandis. Proponatur integrale multiplex,

$$\int U df\, df_1 \dots df_n,$$

ponamusque limites, inter quos integratio afficienda sit, eo definiri, quod introducendo certas alias variabiles $x, x_1, \dots x_n$ pro variabilibus independentibus, harum novarum variabilium limites a se invicem independentes sive constantes sint. Constat, novis variabilibus exhibitum integrale propositum fore,

$$\int U df\, df_1 \ldots\ldots df_n = \int U \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx\, dx_1 \ldots\ldots dx_n.$$

Variabilibus propositis $f, f_1, \ldots\ldots f_n$ expressa U integrataque ipsius f respectu, prodeat Π ita ut sit

$$\Pi = \int U \partial f, \quad U = \frac{\partial \Pi}{\partial f},$$

erit

$$U \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Quod patet substituendo valores

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = \frac{\partial \Pi}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \ldots\ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial f_n} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_i},$$

et observando, post substitutionem factam evanescere quantitates omnes in

$$\frac{\partial \Pi}{\partial f_1}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial f_2}, \ldots\ldots \frac{\partial \Pi}{\partial f_n}$$

ductas. Fit autem e Lemmate proposito

$$\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots\ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\partial . \Pi A}{\partial x} + \frac{\partial . \Pi A_1}{\partial x_1} \ldots\ldots + \frac{\partial . \Pi A_n}{\partial x_n}.$$

Unde eruitur formula reductionis

$$\int U df\, df_1 \ldots\ldots df_n =$$

$$\int (\Pi A) dx_1 dx_2 \ldots\ldots dx_n + \int (\Pi A_1) dx\, dx_2 \ldots\ldots dx_n \ldots\ldots + \int (\Pi A_n) dx\, dx_1 \ldots\ldots dx_n.$$

Hic signo (ΠA_i) denoto, in functionibus $f, f_1, \ldots\ldots f_n$ ipsi x substituendos esse binos eius limites constantes, binasque expressiones ipsius ΠA_i provenientes alteram de altera detrahendas esse. Hinc integrale $n+1$tuplex propositum videmus revocari ad $2n+2$ integralia $n$tuplicia. Quae singula eadem quidem formula exhiberi possunt

$$\int \Pi df_1 df_2 \ldots\ldots df_n \; {}^{*}),$$

sed pro singulis erit Π diversa ipsarum $f_1, f_2, \ldots\ldots f_n$ functio, limitesque ipsarum $f_1, f_2, \ldots\ldots f_n$ diversi erunt. Singula deinde integralia $n$tuplicia eadem methodo ad $2n$ integralia $(n-1)$tuplicia revocari possunt, eaque ratione pergere licet, usque dum tota integratio inter limites propositos perfecta sit.

---

*) Habendo enim x pro Constante, fit

$$\int \Pi A dx_1 dx_2 \ldots\ldots d_n = \int \Pi df_1 df_2 \ldots\ldots df_n,$$

cum sit

$$A = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots\ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

et similis formula pro reliquis integralibus valet.

Lemma traditum sub alia quoque forma proponi potest memoratu digna. Habeamus enim $x, x_1, \ldots x_n$ pro ipsarum $f, f_1, \ldots f_n$ functionibus, earumque quaeramus differentialia partialia, ipsius f respectu sumta. Quae per regulas notas inveniuntur,

$$\frac{\partial x}{\partial f} = \frac{A}{R}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial f} = \frac{A_1}{R}, \quad \ldots \quad \frac{\partial x_n}{\partial f} = \frac{A_n}{R},$$

siquidem R est Determinans propositum,

$$R = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Hinc formula nostra

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = 0,$$

si reputamus esse

$$\frac{\partial R}{\partial f} = \frac{\partial R}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial f} + \frac{\partial R}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial f} \cdots + \frac{\partial R}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial f},$$

formam induit sequentem,

$$0 = \frac{\partial R}{\partial f} + R \left\{ \frac{\partial \cdot \frac{\partial x}{\partial f}}{\partial x} + \frac{\partial \cdot \frac{\partial x_1}{\partial f}}{\partial x_1} \cdots + \frac{\partial \cdot \frac{\partial x_n}{\partial f}}{\partial x_n} \right\}$$

sive

$$0 = \frac{\partial \log R}{\partial f} + \frac{\partial \cdot \frac{\partial x}{\partial f}}{\partial x} + \frac{\partial \cdot \frac{\partial x_1}{\partial f}}{\partial x_1} \cdots + \frac{\partial \cdot \frac{\partial x_n}{\partial f}}{\partial x_n}.$$

In his formulis supponitur, ipsas $R, x, x_1, \ldots x_n$ primum pro quantitatum $f, f_1, \ldots f_n$ functionibus haberi omnesque secundum f differentiari; deinde differentialia partialia $\frac{\partial x}{\partial f}$, $\frac{\partial x_1}{\partial f}$ etc. rursus per ipsas $x, x_1, \ldots x_n$ exprimi, et respective secundum $x, x_1, \ldots x_n$ differentiari. Commutando quantitates x, x_1 etc. cum quantitatibus f, f_1 etc. formula antecedens in aliam abit, quam in *Diar. Crell.* Vol. XXII. pag. 336 demonstravi.

Novi Multiplicatoris definitio. Aequatio differentialis partialis cui satisfacit. Variae formae quas Multiplicatoris valor induere potest.

§. 3.

Sint $X, X_1, \ldots X_n$ variabilium $x, x_1, \ldots x_n$ functiones quaecunque non simul omnes identice evanescentes; proposita aequatione differentiali partiali lineari primi ordinis,

$$0 = X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

solutiones ejus exstant n a se invicem independentes. Quarum Determinantia partialia erunt inter se ut Coëfficientes aequationis differentialis partialis propositae $X, X_1, \ldots\ldots X_n$. Solutionibus enim illis a se independentibus vocatis

$$f_1, f_2, \ldots\ldots f_n,$$

habentur aequationes identicae,

$$0 = X\frac{\partial f_1}{\partial x} + X_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots\ldots + X_n\frac{\partial f_1}{\partial f_n},$$

$$0 = X\frac{\partial f_2}{\partial x} + X_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \ldots\ldots + X_n\frac{\partial f_2}{\partial x_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = X\frac{\partial f_n}{\partial x} + X_1\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \ldots\ldots + X_n\frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

quae sunt n aequationes lineares inter $n+1$ quantitates $X, X_1, \ldots\ldots X_n$, terminis carentes constantibus. Quibus aequationibus determinantur rationes quas ipsae X, X_1, etc. inter se tenent. Videlicet per regulas notas algebraicas invenitur, ipsas $X, X_1, \ldots\ldots X_n$ esse inter se ut quantitates $A, A_1, \ldots\ldots A_n$, §. pr. consideratas, quae erant complexus terminorum, in Determinante functionali

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

respective per $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots\ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ multiplicatorum, sive functionum $f_1, f_2, \ldots$ $\ldots f_n$ Determinantia partialia. Sit M factor per quem Coëfficientes $X, X_1, \ldots X_n$ multiplicati ipsa producant Determinantia partialia $A, A_1, \ldots\ldots A_n$, ita ut fiat:

$$1.\quad MX = A,\quad MX_1 = A_1,\quad \ldots\ldots\quad MX_n = A_n.$$

Posito

$$R = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdots\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

cum habeatur

$$R = A\frac{\partial f}{\partial x} + A_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots\ldots + A_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

sequitur

$$2.\quad R = M\left(X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots\ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Iisdem substitutis formulis (1.) Lemma §. pr. demonstratum in hanc formulam abit:

$$3.\quad 0 = \frac{\partial . MX}{\partial x} + \frac{\partial . MX_1}{\partial x_1} \ldots\ldots + \frac{\partial . MX_n}{\partial x_n}.$$

Habemus igitur Propositionem sequentem, qua Multiplicatoris M continetur definitio.

Propositio.

„Proponatur expressio

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\dots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

in qua sint X, X_1, ... X_n datae variabilium x, x_1, ... x_n functiones: functionibus f_1, f_2, ... f_n rite determinatis, ipsa f autem indeterminata manente, semper exstabit factor M, per quem multiplicata expressio proposita formam induat Determinantis functionalis

$$M\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\dots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=\Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\dots\frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

isque Multiplicator satisfaciet aequationi differentiali partiali,

$$0=\frac{\partial.MX}{\partial x}+\frac{\partial.MX_1}{\partial x_1}\dots+\frac{\partial.MX_n}{\partial x_n}."$$

E valoribus ipsius M in sequentibus perpetuo excludo valorem $M=0$. Quem patet satisfacere aequationi (2.), qua Multiplicator definitur, dummodo statuatur functionum f_1, f_2, ... f_n unam reliquarum functionem esse; constat enim Determinans Functionale evanescere si functiones propositae non a se invicem sint independentes. Illo autem ipsius M valore excluso, Propositio antecedens inverti potest. Videlicet *si Multiplicator M definitur conditione ut pro functione indefinita f expressio,*

$$M\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\dots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

evadat Determinans functionale,

$$R=\Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial f}{\partial x_1}\dots\frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

functiones f_1, f_2, ... f_n necessario erunt solutiones a se independentes aequationis differentialis partialis linearis,

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\dots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0.$$

Nam pro ipsa f, quae erat functio indefinita, sumendo aliquam functionum f_1, f_2, ... f_n, identice evanescit Determinans R. Quod cum supponatur aequale expressioni,

$$M\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\dots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

atque factor M a nihilo diversus statuatur, fieri debet ut substituendo ipsi f functiones f_1, f_2, ... f_n identice habeatur,

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\dots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0,$$

sive ut $f_1, f_2, \ldots. f_n$ ipsae sint aequationis differentialis partialis propositae solutiones. Eruntque solutiones illae $f_1, f_2, \ldots. f_n$ a se invicem independentes; si enim una reliquarum functio esset, Determinans R identice evanesceret pro functione f indefinita; unde etiam pro functione indefinita f evanescere deberet expressio

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\ldots.+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

quod fieri non potest nisi omnes X, X_1 etc. simul identice evanescunt.

Datis functionibus $f_1, f_2, \ldots. f_n$ una quaelibet ex aequationum (1.) numero ad definiendum Multiplicatorem sufficit, veluti aequatio,

$$MX = A = \Sigma\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_1}.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\ldots.\frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

e qua sequitur

$$4.\quad M = \frac{1}{X}\Sigma\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_1}.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\ldots.\frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Qua tamen formula ut definiatur Multiplicator aequationis differentialis partialis propositae, addenda conditio est ut X et A non evanescant.

Pro duabus variabilibus x et x_1 Multiplicator antecedentibus definitus cum *Euleriano* convenit. Sint enim X, X_1 datae variabilium x et x_1 functiones, atque proponatur aequatio differentialis primi ordinis inter x et x_1,

$$Xdx_1-X_1dx = 0.$$

Est Multiplicator *Eulerianus* eiusmodi factor M per quem multiplicata pars laeva aequationis antecedentis abit in differentiale completum functionis alicuius f_1, ita ut sit

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}dx+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 = M(Xdx_1-X_1dx),$$

sive,

$$MX = \frac{\partial f_1}{\partial x_1},\qquad MX_1 = -\frac{\partial f_1}{\partial x}.$$

E quibus formulis sequitur, pro functione indefinita f induere expressionem,

$$M\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\right),$$

formam Determinantis functionalis

$$\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_1}.\frac{\partial f_1}{\partial x},$$

et Multiplicatorem M satisfacere aequationi differentiali partiali,

$$\frac{\partial.MX}{\partial x}+\frac{\partial.MX_1}{\partial x_1} = 0.$$

Quae pro duobus variabilibus independentibus sunt eaedem proprietates characteristicae, quae Multiplicatori generali assignavi.

Problema solvendi aequationem differentialem partialem propositam,

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\dots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0,$$

cum duobus aliis problematis arctissime coniunctum est. Designante enim Π quamcunque aequationis praecedentis solutionem, ex aequatione

$$\Pi=0,$$

petatur ipsius x expressio per reliquas variabiles x_1, x_2, ... x_n: notum est eam fieri solutionem alterius aequationis differentialis partialis,

$$X=X_1\frac{\partial x}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial x}{\partial x_2}\dots+X_n\frac{\partial x}{\partial x_n}.$$

Unde haec aequatio differentialis partialis ad aequationem differentialem partialem propositam revocari potest. Porro ad aequationis differentialis partialis propositae solutionem constat revocari posse integrationem completam systematis aequationum differentialium vulgarium primi ordinis inter $n+1$ variabiles x, x_1, ... x_n, quod repraesentemus proportionibus,

$$dx:dx_1\dots:dx_n=X:X_1:\dots:X_n.$$

Videlicet si aequationis differentialis partialis propositae solutiones, a se independentes, sunt f_1, f_2, ... f_n, obtinentur aequationes, quibus illud aequationum differentialium vulgarium systema complete integratur, aequando solutiones illas Constantibus Arbitrariis. Et vice versa, si ex aequationibus integralibus completis petuntur variabilium functiones Constantibus Arbitrariis a se independentibus aequales, ab iisdemque Constantibus Arbitrariis ipsae vacuae: hae functiones erunt aequationis differentialis partialis propositae solutiones a se independentes. Propter hunc trium problematum consensum Multiplicatorem M ad tria illa problemata perinde refero. Qua de re *ipsum M perinde appellabo Multiplicatorem huius aequationis differentialis partialis,*

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\dots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0,$$

vel huius,

$$0=X-X_1\frac{\partial x}{\partial x_1}-X_2\frac{\partial x}{\partial x_2}\dots-X_n\frac{\partial x}{\partial x_n},$$

vel etiam systematis aequationum differentialium vulgarium,

$$dx:dx_1:dx_2\dots:dx_n=X:X_1:X_2\dots:X_n.$$

Ubi ad has refertur Multiplicator, quod plerumque usu venit, pro variis formis, quibus earum aequationes integrales completae proponuntur, variae obtinentur Multiplicatoris repraesentationes. Quas sequentibus exponam.

Si aequationes integrales proponuntur ipsa forma cuius modo mentionem iniecimus,

$$5.\quad f_1 = \alpha_1,\ f_2 = \alpha_2,\ \dots\ f_n = \alpha_n,$$

designantibus α_1 etc. Constantes Arbitrarias, functiones f_1 etc. non afficientes, ideoque $f_1, f_2, \dots f_n$ solutiones a se independentes aequationis,

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\dots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

erat Multiplicator,

$$6.\quad M = \frac{1}{X}\Sigma\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\dots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Iam vero proponantur aequationes integrales completae hac forma maxime usitata, ut variabiles omnes per earum unam veluti x, et Constantes Arbitrarias exprimantur,

$$7.\quad x_1 = \varphi_1(x),\quad x_2 = \varphi_2(x),\ \dots\ x_n = \varphi_n(x),$$

functionibus φ_1, φ_2 etc. involventibus praeter variabilem x Constantes Arbitrarias α_1 etc., erit

$$8.\quad \Sigma\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\dots\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{1}{\Sigma\pm\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha_2}\dots\frac{\partial\varphi_n}{\partial\alpha_n}},$$

D. F. §. 9. (3.) *). Unde fit,

$$9.\quad M = \frac{1}{X\Sigma\pm\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha_2}\dots\frac{\partial\varphi_n}{\partial\alpha_n}} = \frac{1}{X\Sigma\pm\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_2}\dots\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_n}}.$$

Si vero generalius inter omnes $2n+1$ quantitates, $x, x_1, \dots x_n$ $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, proponuntur n aequationes integrales,

$$\Pi_1 = 0,\quad \Pi_2 = 0,\ \dots\ \Pi_n = 0,$$

fit (D. F. §. 10. (5.)),

$$10.\quad \Sigma\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\dots\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{(-1)^n\Sigma\pm\frac{\partial\Pi_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\Pi_2}{\partial x_2}\dots\frac{\partial\Pi_n}{\partial x_n}}{\Sigma\pm\frac{\partial\Pi_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial\Pi_2}{\partial\alpha_2}\dots\frac{\partial\Pi_n}{\partial\alpha_n}}.$$

Unde obtinetur, rejecto quod licet signo ancipiti,

$$11.\quad M = \frac{1}{X}\cdot\frac{\Sigma\pm\frac{\partial\Pi_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\Pi_2}{\partial x_2}\dots\frac{\partial\Pi_n}{\partial x_n}}{\Sigma\pm\frac{\partial\Pi_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial\Pi_2}{\partial\alpha_2}\dots\frac{\partial\Pi_n}{\partial\alpha_n}},$$

quae est Multiplicatoris expressio maxime generalis.

Formula (10.) ope investigatio valoris Determinantis functionalis haud raro egregie expeditur. Transponamus ex. gr. Constantes Arbitrarias in alte-

*) Commentationem de Determinantibus Functionalibus Vol. XXII Diarii Crelliani insertam designabo per D. F.

ram partem aequationum (1.), atque pro quolibet ipsius i valore statuamus functionem Π_i aequalem functioni $f_i - \alpha_i$, quocunque modo per aequationes,

$$f_{i+1} = \alpha_{i+1}, \quad f_{i+2} = \alpha_{i+2}, \quad \ldots \quad f_n = \alpha_n,$$

transformatae. Poterit in locum cuiusque aequationis $f_i = \alpha_i$ adhiberi aequatio $\Pi_i = 0$, unde systema aequationum sequentium,

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \quad \ldots \quad \Pi_n = 0,$$

haberi poterit pro aequationum integralium completarum systemate. Quae ita sunt comparatae aequationes, ut quaelibet functio Π_i non involvat quantitates $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}$, quantitatem α_i autem in unico termino addito $-\alpha_i$. Unde erit

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \Pi_i}{\partial \alpha_2} \ldots = \frac{\partial \Pi_i}{\partial \alpha_{i-1}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi_i}{\partial \alpha_i} = -1,$$

sive quantitatibus $\frac{\partial \Pi_i}{\partial \alpha_k}$ in figuram quadratam dispositis hunc in modum,

$$\begin{array}{llll}
\frac{\partial \Pi_1}{\partial \alpha_1}, & \frac{\partial \Pi_1}{\partial \alpha_2}, & \ldots & \frac{\partial \Pi_1}{\partial \alpha_n}, \\
\frac{\partial \Pi_2}{\partial \alpha_1}, & \frac{\partial \Pi_2}{\partial \alpha_2}, & \ldots & \frac{\partial \Pi_2}{\partial \alpha_n}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial \Pi_n}{\partial \alpha_1}, & \frac{\partial \Pi_n}{\partial \alpha_2}, & \ldots & \frac{\partial \Pi_n}{\partial \alpha_n},
\end{array}$$

quadratoque per diagonalem, a laeva ad dextram partem ductam, in duas partes diviso, termini in laeva parte positi omnes evanescunt. Quod ubi fit, abit Determinans in productum terminorum in ipsa diagonali positorum. Qui termini cum singuli fiant -1, eruitur

$$\Sigma \pm \frac{\partial \Pi_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \Pi_2}{\partial \alpha_2} \ldots \frac{\partial \Pi_n}{\partial \alpha_n} = \pm 1,$$

ideoque

$$12. \quad XM = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$
$$= \Sigma \pm \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial \Pi_n}{\partial x_n}.$$

Quae docet formula propositionem frequentissimae applicationis, ***valentibus aequationibus*** $f_1 = \alpha_1$, $f_2 = \alpha_2$, $\ldots$ $f_n = \alpha_n$, ***Determinans functionale,***

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

valorem non mutare, si ante differentiationes partiales transigendas quaeque functio f_i ***per aequationes***

$$f_{i+1} = \alpha_{i+1}, \quad f_{i+2} = \alpha_{i+2}, \quad \ldots \quad f_n = \alpha_n,$$

quascunque subeat mutationes. In hac propositione sunt α_1, α_2, ... α_n Constantes; quae si iunguntur functionibus f_1, f_2, ... f_n, ita ut ipsius $f_i - \alpha_i$ loco scribatur f_i, refertur propositio ad valorem quem induit Determinans functionale, functionibus ipsis evanescentibus. In applicatione huius propositionis facienda functiones f_1, f_2, ... f_n sive aequationes, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ... $f_n = 0$, certo disponendae sunt ordine tali, ut quaeque aequatio $f_i = 0$ insequentium ope formam induere possit concinnam, simulque differentialia partialia functionis f_i evadant simplicissima. Quin adeo eandem operationem indefinite repetere licet, siquidem post idoneas mutationes, pro certo functionum et aequationum ordine factas, eaedem functiones alio semperque alio ordine disponuntur et pro quaque nova dispositione mutationes vel eliminationes convenientes operantur. Quantascunque autem mutationes per varias istas dispositiones et eliminationes subire possunt functiones propositae f_1 etc., non tamen inde nascuntur functionum mutationis quae obtineri possunt, si ***eodem tempore*** ad unamquamque transformandam, nullo ordinis functionum respectu habito, omnes adhibentur n aequationes, quae reliquas omnes functiones nihilo aequando proveniunt. Nam in propositione tradita unica tantum erat e $n+1$ functionibus, ad quam transformandam adhiberi poterant n aequationes; praeter hanc una tantum erat ad quam transformandam $n-1$ aequationes adhiberi poterat, et ita porro. Functionibus in alium aliumque ordinem dispositis et pro quaque nova dispositione propositionis traditae applicatione facta, effici quidem potest ut unaquaeque functio sua vice adiumento n aequationum transmutetur; sed differentia in eo constituitur, quod hac ratione aequationes ad transmutationes adhibendae non amplius proveniant nihilo aequando functiones propositas sed functiones et ipsas iam transmutatas. Veluti si f per aequationem $f_1 = 0$ mutatur in φ, ac deinde f_1 per aequationem $\varphi = 0$ in φ_1: ipsa φ_1 non easdem induere potest formas, in quas mutari potest f_1 nihilo aequando ipsam functionem propositam f. Nam si valorem generalem functionis, in quam f per aequationem $f_1 = 0$ mutari potest, designamus quod licet per

$$\varphi = f + \lambda f_1,$$

atque similiter valorem generalem functionis, in quam f_1 per aequationem $\varphi = 0$ mutatur, per

$$\varphi_1 = f_1 + \mu\varphi = (1 + \lambda\mu) f_1 + \mu f:$$

haec functio diversa erit a functione $f_1 + \mu\varphi$, in quam f_1 per aequationem $f = 0$ mutatur. Atque Determinans functionum φ et φ_1 idem quidem erit atque functionum propositarum; functionum vero $f + \lambda f_1$, $f_1 + \mu f$ ab illo discre-

pabit, scilicet aequabitur Determinanti functionum f et f_1, per factorem $1-\lambda\mu$ multiplicato. Quod pluribus illustrare placuit, ut emendarem errorem quem in Commentatione *de Determinantibus functionalibus* commisi proponendo, Determinantis functionalis valorem quem induat ipsis functionibus evanescentibus, immutatum manere, si unaquaeque functio mutationes subeat, quascunque nihilo aequando reliquas omnes subire possit. Generaliter si ponitur

$$\varphi_i = \lambda^i f + \lambda_1^i f_1 \ldots\ldots + \lambda_n^i f_n,$$

demonstrabitur per Determinantium proprietates, valentibus aequationibus

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \quad \ldots\ldots \quad f_n = 0,$$

fieri

$$\Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = \Sigma + \lambda\lambda_1'\lambda_2'' \ldots\ldots \lambda_n^n . \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Unde ut Determinantia functionum $f, f_1, \ldots\ldots f_n$ et $\varphi, \varphi_1, \ldots\ldots \varphi_n$ inter se aequalia existant, habetur conditio generalis,

$$\Sigma \pm \lambda\lambda_1' \ldots\ldots \lambda_n^n = 1.$$

E Propositione supra tradita, identidem pro aliis aliisque functionum dispositionibus repetita, innumera deducuntur quantitatum λ_k^i systemata quae conditioni illi satisfaciunt.

Inter mutationes, quas functio variabilium x, x_1 etc. per aequationes inter easdem variabiles positas subire potest, referri potest eliminatio variabilium numeri numero aequationum aequalis. Unde in formula (12.) definire licet Π_i ut functionem variabilium $x, x_1, \ldots\ldots x_i$, in quam abeat $f_i - \alpha_i$, si ope aequationum $f_{i+1} = \alpha_{i+1}$, $f_{i+2} = \alpha_{i+2}$, $\ldots\ldots f_n = \alpha_n$ variabiles $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots\ldots x_n$ eliminantur. Quo statuto, omnia evanescunt differentialia partialia $\frac{\partial \Pi_i}{\partial x_k}$, in quibus $k > i$; unde figura quadrata, quae a quantitatibus $\frac{\partial \Pi_i}{\partial x_k}$ formatur, ita comparata erit, ut in ea per diagonalem divisa, rursus termini in altera parte positi evanescant, ideoque fiat,

$$\Sigma \pm \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} \ldots\ldots \frac{\partial \Pi_n}{\partial x_n} = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} \ldots\ldots \frac{\partial \Pi_n}{\partial x_n}.$$

Hinc formula (12.) abit in hanc,

$$13. \quad XM = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} \ldots\ldots \frac{\partial \Pi_n}{\partial x_n},$$

sive Determinans functionale quo Multiplicator definitur in simplex productum redit. Forma autem aequationum integralium

$$\Pi_1 = 0, \quad \Pi_2 = 0, \ldots\ldots \Pi_n = 0,$$

quae illam simplicem Determinantis functionalis expressionem suppeditat, eadem

est atque per integrationem *successivam* proveniens, post quodque Integrale inventum una variabilium eliminata. Servata enim functionum $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n$ significatione antecedente, si eliminatur x_n per Integrale,

$$\Pi_n = f_n - \alpha_n = 0,$$

erit $\Pi_{n-1} = 0$ Integrale aequationum differentialium,

$$dx : dx_1 \ldots : dx_{n-1} = X : X_1 \ldots : X_{n-1},$$

cuius Integralis ope eliminata x_{n-1} erit $\Pi_{n-2} = 0$ Integrale aequationum differentialium,

$$dx : dx_1 \ldots : dx_{n-2} = X : X_1 \ldots : X_{n-2},$$

et ita porro. Si e functione Π_i Constantes arbitrarias $\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots \alpha_n$, quas implicat, ope aequationum,

$$\Pi_{i+1} = 0, \quad \Pi_{i+2} = 0, \ldots \quad \Pi_n = 0,$$

eliminamus, redit aequatio $\Pi_i = 0$ in aequationum differentialium propositarum Integrale $f_i - \alpha_i = 0$. Voco autem, ut in aliis Commentationibus, ***Integrale systematis*** aquationum differentialium vulgarium huiusmodi aequationem integralem, quae differentiata identica evadat per solas aequationes differentiales propositas, neque ipsa illa aequatione integrali neque ulla alia in auxilium advocata.

Multiplicatoris expressio generalis. Bini Multiplicatores suppeditant Integrale. Expressio generalis functionum quarum detur Determinans datum.

§. 4.

Iam varias quae de Multiplicatore nostro tradi possunt proprietates exponam. Ac primum inquiram quomodo uno cognito Multiplicatore eruantur alii innumeri, sive Multiplicatoris investigabo formam generalem. Sit M datus Multiplicator aequationis,

$$1. \quad X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

satisfacere debet M secundum §. pr. huiusmodi aequationi,

$$2. \quad MX = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

designantibus $f_1, f_2, \ldots f_n$ solutiones aequationis (1.) a se invicem independentes. Sit μ alius quicunque Multiplicator, satisfaciens aequationi,

$$3. \quad \mu X = \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial F_n}{\partial x_n},$$

designantibus $F_1, F_2, \ldots F_n$ aliud systema solutionum eiusdem aequationis (1.) a se invicem independentium. Functiones F_1, F_2, etc. esse debent

solarum $f_1, f_2, \ldots f_n$ functiones; cognitis enim aequationis (1.) solutionibus n a se invicem independentibus, quaevis alia einsdem aequationis solutio harum n solutionum functio est. Fit autem per formulam notam (D. F. §. 11. Prop. II.),

$$4. \quad \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$
$$= \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial f_2} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial f_n} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

siquidem habentur $F_1, F_2, \ldots F_n$ in laeva formulae parte pro variabilium $x, x_1, \ldots x_n$ functionibus, in dextra parte pro functionibus ipsarum $f_1, f_2, \ldots f_n$. E (2.) — (4.) autem obtinetur haec formula,

$$5. \quad \mu = M \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial f_2} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial f_n}.$$

Unde sequitur vice versa, ipsarum $f_1, f_2, \ldots f_n$ quibuscunque sumtis functionibus a se independentibus $F_1, F_2, \ldots F_n$, Multiplicatorem M ductum in harum functionum Determinans,

$$\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial f_2} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial f_n},$$

alterum suppeditare Multiplicatorem μ. Quaecunque enim sint $F_1, F_2, \ldots F_n$ ipsarum $f_1, f_2, \ldots f_n$ functiones a se independentes, ex aequatiouibus (2.), (4.), (5.) sequitur formula (3.), in qua $F_1, F_2, \ldots F_n$ erunt aequationis (1.) solutiones a se invicem independentes, unde secundum §. pr. tradita quantitas μ, formula (3.) determinata, aequationis (1.) erit Multiplicator.

Videmus ex antecedentibus, binorum quorumque Multiplicatorum Quotientem $\frac{\mu}{M}$ aequari functioni ipsarum $f_1, f_2, \ldots f_n$, videlicet Determinanti ipsarum $F_1, F_2, \ldots F_n$, pro functionibus quantitatum $f_1, f_2, \ldots f_n$ habitarum, et vice versa, Multiplicatore M ducto in Determinans quarumcunque n functionum a se independentium quantitatum $f_1, f_2, \ldots f_n$, alterum obtineri Multiplicatorem. Semper autem quantitatum $f_1, f_2, \ldots f_n$ functiones $F_1, F_2, \ldots F_n$ invenire licet, quarum Determinans sit earundem quantitatum data quaecunque functio. Unde non modo binorum Multiplicatorum M et μ Quotiens functioni aequatur ipsarum $f_1, f_1, \ldots f_n$, sed etiam vice versa, Multiplicatore M in quamcunque functionem ipsarum $f_1, f_2, \ldots f_n$ ducto, rursus prodit Multiplicator. Et cum ipsarum, $f_1, f_2, \ldots f_n$, quaelibet functio aequationis (1.) solutio sit, neque aliae aequationis (1.) solutiones extare possint, nisi quae ipsarum $f_1, f_2, \ldots f_n$ functiones sint, sequitur ex antecedentibus haec Propositio.

Propositio.

„**Designante M Multiplicatorem aequationis differentialis partialis,**

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\ldots\ldots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0,$$

erit Multiplicatoris forma generalis,

$$\Pi M,$$

designante Π quamcunque aequationis propositae solutionem."

Cognita aequationis (1.) solutione Π ac designante α Constantem Arbitrariam, aequatione $\Pi=\alpha$ determinatur variabilium x_1, x_2, ... x_n functio x, satisfaciens aequationi differentiali partiali,

$$6.\quad 0=X-X_1\frac{\partial x}{\partial x_1}-X_2\frac{\partial x}{\partial x_2}\ldots\ldots-X_n\frac{\partial x}{\partial x_n},$$

nec non erit $\Pi=\alpha$ Integrale aequationum differentialium vulgarium simultanearum,

$$7.\quad dx:dx_1\ldots\ldots:dx_n=X:X_1\ldots\ldots:X_n.$$

Unde Propositio antecedens docet, *cognitis aequationis differentialis partialis* (6.) *vel aequationum* (7.) *differentialium vulgarium binis Multiplicatoribus M et M_1, non solo factore constante inter se diversis, aequationem*

$$\frac{M_1}{M}=\text{Const.}$$

fore aequationis differentialis partialis (6.) *solutionem vel systematis aequationum differentialium* (7.) *Integrale.*

Pluribus datis Multiplicatoribus M, M_1, ... M_k, haec quoque quantitas,

$$MF\left(\frac{M_1}{M},\ \frac{M_2}{M},\ \ldots\ \frac{M_k}{M}\right)$$

erit multiplicator. Designante enim F ipsarum $\frac{M_1}{M}$ etc. functionem arbitrariam, non tantum fractiones $\frac{M_1}{M}$, $\frac{M_2}{M}$ etc., sed ipsa F quoque aequationis (1.) solutio fit. Unde etiam aequatione $F=0$ sive quod idem est *quacunque aequatione homogenea inter datos Multiplicatores posita determinatur aequationis* (6.) *solutio.* Nec non designantibus α_1, α_2, ... α_n Constantes Arbitrarias, erunt

$$\frac{M_1}{M}=\alpha_1,\quad \frac{M_2}{M}=\alpha_2,\ \ldots\ \frac{M_k}{M}=\alpha_k,$$

Integralia aequationum differentialium vulgarium (7.).

Restat, ut paucis exponam quomodo inveniantur functiones quarum Determinans datae variabilium functioni aequetur, quod semper fieri posse supra

innui. Immo videbimus idem innumeris modis succedere, videlicet functiones praeter unam omnes ex arbitrio sumi posse, una reliqua per solam Quadraturam determinata.

Designante Π datam quamcunque quantitatum $f_1, f_2, \dots f_n$ functionem, simplicissima habetur solutio aequationis,

$$8. \quad \Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial f_2} \dots \frac{\partial F_n}{\partial f_n} = \Pi,$$

ponendo,

$$F_2 = f_2, \quad F_3 = f_3, \quad \dots \quad F_n = f_n,$$

unde Determinans propositum in simplex differentiale abit,

$$\frac{\partial F_1}{\partial f_1} = \Pi.$$

Quo igitur casu fit,

$$F_1 = \int \Pi \, df_1,$$

cui integrali functionem ipsarum $f_2, f_3, \dots f_n$ arbitrariam addere licet, quippe quae inter integrationem pro Constantibus habentur. Aequationis (8.) solutio generalis obtinetur sequenti modo. Pro ipsis $F_2, F_3, \dots F_n$ ex arbitrio sumantur ipsarum $f_1, f_2, \dots f_n$ functiones a se independentes, atque fingatur, reliquam functionem F_1 exhiberi per quantitates,

$$f_1, \quad F_2, \quad F_3, \quad \dots \quad F_n.$$

Functionis F_1 hoc modo repraesentatae differentialia partialia uncis includam, quo distinguantur a differentialibus eiusdem functionis per $f_1, f_2, \dots f_n$ exhibitae, ita ut sit,

$$\frac{\partial F_1}{\partial f_1} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial F_2}\right)\frac{\partial F_2}{\partial f_1} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial F_3}\right)\frac{\partial F_3}{\partial f_1} \dots + \left(\frac{\partial F_1}{\partial F_n}\right)\frac{\partial F_n}{\partial f_1},$$

et quoties index i ab unitate diversus est,

$$\frac{\partial F_1}{\partial f_i} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial F_2}\right)\frac{\partial F_2}{\partial f_i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial f_3}\right)\frac{\partial F_3}{\partial f_i} \dots + \left(\frac{\partial F_1}{\partial F_n}\right)\frac{\partial F_n}{\partial f_i}.$$

Quae ipsarum

$$\frac{\partial F_1}{d f_1}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial f_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial F_1}{\partial f_n}$$

expressiones si substituuntur in Determinante,

$$\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial f_2} \dots \frac{\partial F_n}{\partial f_n},$$

identice evanescunt singula aggregata per singula differentialia partialia

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial F_2}\right), \quad \left(\frac{\partial F_1}{\partial F_3}\right), \quad \dots \quad \left(\frac{\partial F_1}{\partial F_n}\right)$$

multiplicatae, unde simplex formula obtinetur,

$$9.\quad \Sigma\pm\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial f_2}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial f_n} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\right)\Sigma\pm\frac{\partial F_2}{\partial f_2}\cdot\frac{\partial F_3}{\partial f_3}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial f_n}$$

(D. F. §. 12. (4.)). E (8. et 9.) sequitur

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\right) = \frac{\Pi}{\Sigma\pm\frac{\partial F_2}{\partial f_2}\cdot\frac{\partial F_3}{\partial f_3}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial f_n}},$$

qua formula exprimendo $f_2, f_3, \ldots f_n$ per $f_1, F_2, F_3, \ldots F_n$, sic quoque exhiberi potest,

$$10.\quad \left(\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\right) = \Pi\Sigma\pm\frac{\partial f_2}{\partial F_2}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial F_3}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial F_n}$$

(D. F. §. 9. (3.)). Secundum hanc formulam, ut modo maxime generali variabilium $f_1, f_2, \ldots f_n$ inveniantur functiones, quarum Determinans datae earundem variabilium functioni Π aequatur, ex arbitrio exprimantur $f_2, f_3, \ldots f_n$ per f_1 aliasque $n-1$ quantitates $F_2, F_3, \ldots F_n$, determinataque F_1 per formulam,

$$11.\quad F_1 = \int \Pi\Sigma\pm\frac{\partial f_2}{\partial F_2}\cdot\frac{\partial f_3}{\partial F_3}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial F_n}\,\partial f_1,$$

ipsae $F_1, F_2, \ldots F_n$, vice versa per $f_1, f_2, \ldots f_n$ expressae erunt functiones quaesitae.

Ponendo $\Pi = 1$ antecedentibus innumera obtinentur systemata functionum quantitatum $f_1, f_2, \ldots f_n$, quarum Determinans unitati aequatur. Quibus omnibus idem respondet Multiplicator. Quoties enim

$$\Sigma\pm\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial f_2}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial f_n} = 1,$$

sequitur e (5.)

$$\mu = M.$$

Vice versa, si idem Multiplicator respondet binis systematis n solutionum a se independentium aequationis differentialis partialis (1.), $f_1, f_2, \ldots f_n$ atque $F_1, F_2, \ldots F_n$, ita ut sit,

$$MX = \Sigma\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \Sigma\pm\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial x_n}:$$

erunt $F_1, F_2, \ldots F_n$ quantitatum $f_1, f_2, \ldots f_n$ functiones, quarum Determinans unitati aequatur.

Multiplicatoris definitio per aequationem differentialem partialem. Conditio, ut Multiplicator aequari possit unitati.

§. 5.

Vidimus §. 3. aequationis differentialis partialis,

$$1. \quad X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\ldots\ldots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=0,$$

Multiplicatorem quemcunque M alii satisfacere aequationi differentiali partiali,

$$2. \quad \frac{\partial . MX}{\partial x}+\frac{\partial . MX_1}{\partial x_1}\ldots\ldots+\frac{\partial . MX_n}{\partial x_n}.$$

Vice versa *quaecunque habetur solutio μ aequationis differentialis partialis,*

$$3. \quad \frac{\partial . \mu X}{\partial x}+\frac{\partial . \mu X_1}{\partial x_1}\ldots\ldots+\frac{\partial . \mu X_n}{\partial x_n}=0,$$

erit illa aequationis (1.) *Multiplicator.*

Ponamus enim $\mu=\Pi . M$, abit aequatio (3.) in sequentem,

$$0=\Pi\left(\frac{\partial . MX}{\partial x}+\frac{\partial . MX_1}{\partial x_1}\ldots\ldots+\frac{\partial . MX_n}{\partial x_n}\right)$$
$$+M\left(X\frac{\partial \Pi}{\partial x}+X_1\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}\ldots\ldots+X_n\frac{\partial \Pi}{\partial x_n}\right).$$

Partis dextrae Aggregatum in Π ductum secundum (2.) evanescit; unde, cum supponamus ipsum M non evanescere, sequitur,

$$0=X\frac{\partial \Pi}{\partial x}+X_1\frac{\partial \Pi}{\partial x_1}\ldots\ldots+X_n\frac{\partial \Pi}{\partial x_n}.$$

Erit igitur Π aequationis (1.) solutio ideoque secundum Propositionem §. pr. traditam, Multiplicatorem in solutionem aequationis (1.) quamcunque ductum reproducere Multiplicatorem, erit $\Pi . M=\mu$ Multiplicator, q. d. e.

Cum quilibet Multiplicator sit solutio aequationis (3.) et secundum antecedentia quaelibet aequationis (3.) solutio sit Multiplicator, poterit aequatio (3.) adhiberi ad Multiplicatorem definiendum. Habemus igitur Propositionem sequentem.

Propositio I.

„Designante M solutionem quamcunque aequationis differentialis partialis,

$$\frac{\partial . MX}{\partial x}+\frac{\partial . MX_1}{\partial x_1}\ldots\ldots+\frac{\partial . MX_n}{\partial x_n}=0,$$

semper dantur functiones f_1, f_2, ... f_n, quae pro functione f indefinita efficiant aequationem,

$$M\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\ldots\ldots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=\Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\ldots\ldots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}.\text{“}$$

Videri possit parum luci percipi e nova Multiplicatoris determinatione per aequationem differentialem partialem (3.). Aequationis (3.) enim solutio generalis non habetur nisi aequationis (1.) data sit solutio generalis sive eius innotescant n solutiones particulares a se invicem independentes. His autem cognitis habetur Multiplicator per formulam (2.) §. pr. At observo ad Multiplicatorem eruendum tantum nos indigere una aliqua solutione particulari aequationis (3.) et quamquam aequationis (3.) solutio generalis a solutione aequationis (1.) pendet et pro complicatiore habenda est, fieri tamen potest ut aequationis (3.) innotescat solutio particularis, dum aequationis (1.) solutiones adhuc omnes ignoramus.

Inter solutiones aequationis differentialis partialis (1.) non referri solet, quae sponte se offert, $f =$ Const. Sed e solutionibus aequationis (3.) quae Multiplicatorem suggerunt quantitates constantes non excluduntur. Fit autem Multiplicator Constanti vel si placet unitati aequalis, si inter ipsas X, X_1 etc. locum habet aequatio,

$$4. \qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \cdots\cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0.$$

Eo casu ipsa expressio proposita,

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots\cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

pro functione f indefinita aequivalet alicui Determinanti functionali,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots\cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

sive adhibendo notationes §. 3. usitatas statuere licet,

$$X = A, \quad X_1 = A_1, \; \cdots\cdots \; X_n = A_n.$$

Quod, si ea tenes quae §. 2. de Determinantibus functionalibus partialibus monui, sic quoque proponi potest.

Propositio II.

„Si $n+1$ variabilium x, x_1, ... x_n functiones X, X_1, ... X_n satisfaciant conditioni,

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \cdots\cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0,$$

ipsae $n+1$ quantitates X, X_1, ... X_n haberi possunt pro certarum n functionum Determinantibus partialibus."

Haec Propositio analoga est notae elementari, si variabilium x et y functiones X et Y satisfaciant conditioni, $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$, ipsas Y et $-X$

respective haberi posse pro eiusdem functionis differentialibus partialibus, variabilium x et y respectu sumtis.

Si inter quantitates X, X_1 etc. conditio (4.) locum habet, aequatio differentialis partialis (3.), qua Multiplicator definitur, in ipsam (1.) redit. Eo igitur casu quaecunque aequationis (1.) solutio eiusdem aequationis Multiplicator erit, siquidem iam unitatem vel numeros constantes inter solutiones referimus. Unde etiam patet, eo casu aequationum differentialium vulgarium,

$$dx : dx_1 \ldots : dx_n = X : X_1 \ldots : X_n,$$

Multiplicatorem fore quantitatem quamcunque, aut per se constantem, aut quae per aequationes integrales completas Constanti aequetur.

Cognito systematis aequationum differentialium vulgarium Multiplicatore quocunque eruuntur Determinantia functionum quae per aequationes integrales completas valoribus variabilium initialibus aequivalent.

§. 6.

Vidimus §. 3. designantibus $f_1, f_2, \ldots f_n$ solutiones a se independentes aequationis,

$$1. \quad X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

harum functionum Determinantia partialia A_1, A_2, ... A_n esse inter se ut aequationis (1.) Coëfficientes, sive fieri,

$$2. \quad A : A_1 \ldots : A_n = X : X_1 \ldots : X_n.$$

Unde omnia A_1, A_2, ... A_n uno determinantur A. Antecedentibus autem demonstravi, designante μ Multiplicatorem aequationis (1.) quemcunque sive quamcunque solutionem aequationis

$$3. \quad \frac{\partial . X\mu}{\partial x} + \frac{\partial . X_1\mu}{\partial x_1} \ldots + \frac{\partial . X_n\mu}{\partial x_n} = 0,$$

fieri $\mu = \Pi M$, ideoque

$$4. \quad \mu X = \Pi . A = \Pi . \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} . \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

ubi Π certa quaedam est ipsarum f_1, f_2 .... f_n functio sive aequationis (1.) solutio. Hinc e data quacunque aequationis (3.) solutione μ cognoscitur valor Determinantis A, dummodo determinata erit functio Π. *Eruitur autem functio Π, dummodo Determinantis A innotescat valor quem pro $x = 0$ induit.* Generaliter enim, ut functio f aequationi differentiali partiali (1.) satisfaciens omnino determinata sit, poscitur et sufficit ut aliqua cognoscatur functio, cui illa aequalis evadat ubi inter variabiles x, x_1, ... x_n data aliqua

aequatio locum habet, veluti si ipsius f datur valor quem pro $x=0$ induit. Hinc si ponimus pro $x=0$ abire μ, X, A in variabilium x_1, x_2, ... x_n functiones μ^0, X^0, A^0; functio Π eo determinabitur quod esse debeat aequationis (1.) solutio atque pro $x=0$ aequalis evadet variabilium x_1, x_2, ... x_n functioni

$$\frac{\mu^0 X^0}{A^0}.$$

Eiusmodi solutio autem ut inveniatur sint f_1^0, f_2^0, ... f_n^0 variabilium x_1, x_2, ... x_n functiones, in quas pro $x=0$ abeunt f_1, f_2, ... f_n; exprimatur porro variabilium x_1, x_2, ... x_n functio $\frac{\mu^0 X^0}{A^0}$ per f_1^0, f_2^0, ... f_n^0; in qua expressione ponendo ipsarum f_1^0, f_2^0, ... f_n^0 loco ipsas f_1, f_2, ... f_n, prodibit functio quaesita Π. Quippe functio sic inventa erit aequationis (1.) solutio et pro $x=0$ abibit in variabilium x_1, x_2, ... x_n functionem $\frac{\mu^0 X^0}{A^0}$.

Functionem A^0 casu prae ceteris notando a priori assignare licet, videlicet quoties f_1, f_2, ... f_n tales sunt aequationis (1.) solutiones *quae pro* $x=0$ *in ipsas variabiles* x_1, x_2, ... x_n *abeunt*. Tunc enim habetur

$$f_1^0 = x_1, \quad f_2^0 = x_2, \quad .... \quad f_n^0 = x_n,$$

ideoque

$$A^0 = \Sigma \pm \frac{\partial f_1^0}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2^0}{\partial x_2} .... \frac{\partial f_n^0}{\partial x_n} = 1.$$

Hinc secundum regulam traditam functio Π e functione $\mu^0 X^0$ eruitur substituendo variabilibus x_1, x_2, ... x_n functiones f_1, f_1, ... f_n, sive quod idem est, substituendo in ipsa μX variabilibus x, x_1, x_2, ... x_n quantitates 0, f_1, f_2, ... f_n. Id quod sequentem suppeditat Propositionem.

Propositio I.

„Sint f_1, f_2, ... f_n solutiones aequationis

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} .... + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

quae pro $x=0$ in ipsas variabiles x, x_2, ... x_n abeunt; sit μ quantitas quaecunque satisfaciens aequationi

$$\frac{\partial . X\mu}{\partial x} + \frac{\partial . X_1 \mu}{\partial x_1} .... + \frac{\partial . X_n \mu}{\partial x_n} = 0,$$

atque sit Π ipsarum f_1, f_2, ... f_n functio quae e producto μX provenit substituendo variabilibus x, x_1, x_2, ... x_n quantitates 0, f_1, f_2, ... f_n: erit

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} .... \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\mu X}{\Pi},$$

sive generalius, designante f functionem indefinitam, erit

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\mu}{\Pi} \left\{ X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}."$$

Observo hac occasione generaliter, datis aequationis (1.) solutionibus f_1, f_2, ... f_n, quae pro $x = 0$ ipsas x_1, x_2, ... x_n abeant, quamvis aliam eiusdem aequationis solutionem Π per ipsas f_1, f_2, ... f_n absque omni eliminationis negotio exhiberi. Scilicet sufficit in functione Π variabilibus x, x_1, x_2, ... x_n substituere quantitates 0, f_1, f_2, ... f_n.

Casu speciali, quem sub finem §. pr. consideravi, posita insuper $X = 1$, e Propositione praecedente emergit haec:

Propositio II.

„Sint f_1, f_2, ... f_n tales solutiones aequationis,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

quae pro $x = 0$ respective in x_1, x_2, ... x_n abeant, sitque identice,

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0,$$

erit,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 1,$$

atque reliqua functionum f_1, f_2, ... f_n Determinantia partialia A_1, A_2, ... A_n in ipsas redeunt quantitates X_1, X_2, ... X_n."

Convenit Propositiones antecedentibus inventas ad systemata aequationum differentialium vulgarium referre. Proponatur enim systema aequationum differentialium vulgarium,

$$dx : dx_1 : dx_2 \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 \ldots : X_n,$$

eiusque integratione completa facta, pro Constantibus Arbitrariis adhibeantur valores quos x_1, x_2, ... x_n pro $x = 0$ induunt; resolutione deinde aequationum integralium erui poterunt variabilium x, x_1, ... x_n functiones illis Constantibus Arbitrariis aequales, quae ipsae erunt functiones f_1, f_2, ... f_n, in Propp. I. et II. consideratae. Generaliter Integralia completa sint,

$$f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \ldots\ldots \quad f_n = \alpha_n,$$

designantibus α_1, α_2 etc. Constantes Arbitrarias quascunque, a quibus ipsae f_1, f_2 etc. vacuae supponuntur. Quorum Integralium ope expressis x_1, x_2, ... x_n per x et Constantes Arbitrarias α_1, α_2, ... α_n, fit secundum formulas de Determinantibus functionalibus traditas,

$$A = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \left\{ \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n} \right\}^{-1}.$$

Unde formula (4.) docet, cognito aequationum differentialium vulgarium propositarum Mulliplicatore aliquo μ, sive aequationis (3.) solutione, fieri

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n} = \frac{C}{\mu X},$$

designante C functionem Constantium Arbitrariarum. Quoties sunt $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ valores initiales variabilium $x_1, x_2, \ldots x_n$, ipsi $x = 0$ respondentes, Determinans functionale, in laeva parte aequationis antecedentis collocatum, ponendo $x = 0$ in *unitatem* abit. Quo igitur casu Constans C ex ipsa μX eruitur ponendo variabilium $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ loco valores $0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Casu speciali quo Multiplicator unitatem aequat, e Propositione II. eruitur sequens prae ceteris simplex Propositio.

Propositio III.

„Proponantur aequationes differentiales vulgares simultaneae,

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = X_1, \quad \frac{\partial x_2}{\partial x} = X_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial x_n}{\partial x} = X_n,$$

in quibus sint $X_1, X_2, \ldots X_n$ tales variabilium $x, x_1, x_2, \ldots x_n$, functiones quae satisfaciant aequationi,

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0;$$

integratione completa expressis $x_1, x_2, \ldots x_n$ per x earumque valores initiales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, erit non tantum pro $x = 0$, sed pro valore ipsius x indefinito,

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n} = 1."$$

Quae licet a proposito meo aliena utile videbatur obiter adnotare.

Quo rectius intelligantur quae supra monui de definienda solutione f aequationis differentialis partialis (1.), sequentia adiicio. Sit φ functio in quam abire debet f pro aequatione aliqua inter variabiles $x, x_1, \ldots x_n$ data. Si φ et ipsa aequationis (1.) solutio est, erit $f = \varphi$ functio quaesita, quaecunque sit illa aequatio. Si φ non est aequationis (1.) solutio, fieri non debet ut aequatio illa ad aliam inter quantitates $f_1, f_2, \ldots f_n$ revocari possit, sive ut ex aequatione illa peti possit solutio aequationis differentialis partialis,

$$X = X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \cdots + X_n \frac{\partial x}{\partial x_n}.$$

Nisi forte eiusmodi solutio sit *singularis* seu non redeat in aequationem inter quantitates $f_1, f_2, \ldots f_n$, quo casu nihil impedit quo minus functio f definiatur

ope valoris quem pro data illa aequatione induit. Infra autem videbimus pro aequationis differentialis partialis antecedentis solutione singulari fieri,

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\cdots\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=\infty,$$

ubi ipsae X, X_1 etc. cum a factoribus communibus tum a denominatoribus purgatae supponuntur. Ita non definiri poterit f ope valoris quem pro $x=0$ induit, ubi pro $x=0$ habetur $X=0$ nec simul $\frac{\partial X}{\partial x}=\infty$. Quod obiter observo.

Multiplicatoris definitio per aequationem differentialem vulgarem.

§. 7.

Multiplicatorem, quem antecedentibus per aequationem differentialem partialem definivi, etiam per formulam differentialem vulgarem definire licet. Quae nova forma aequationis praeceteris indagando Multiplicatori apta est.

Primum aequationem differentialem partialem, qua Multiplicator μ definitur, sic exhibeo,

$$1.\quad 0=X\frac{\partial \mu}{\partial x}+X_1\frac{\partial \mu}{\partial x_1}\cdots\cdots+X_n\frac{\partial \mu}{\partial x_n}+\mu\left\{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\cdots\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\},$$

vel dividendo per μ,

$$2.\quad 0=X\frac{\partial \log\mu}{\partial x}+X_1\frac{\partial \log\mu}{\partial x_1}\cdots\cdots+X_n\frac{\partial \log\mu}{\partial x_n}+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\cdots\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}.$$

Per aequationes autem differentiales vulgares quarum μ est Multiplicator,

$$3.\quad dx:dx_1:dx_2\cdots\cdots:dx_n=X:X_1:X_2\cdots\cdots:X_n,$$

aequationem praecedentem brevius sic repraesentare licet,

$$4.\quad 0=X\frac{d\log\mu}{dx}+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\cdots\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}.$$

Hinc poterit aequationum differentialium vulgarium (3.) Multiplicator μ definiri ut *functio quae solarum aequationum differentialium propositarum* (3.) *ope, nulla in auxilium vocata aequatione integrali, aequationi* (4.) *satisfaciat.* Quippe quod fieri non potest nisi μ *identice* satisfaciat aequationi (2.) qua Multiplicator definiebatur.

Sequitur ex antecedentibus, ad investigandum Multiplicatorem circumspiciendum esse, an aequationum differentialium (3.) ope contingat, expressioni

$$\left\{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\cdots\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\}\frac{dx}{X}$$

formam conciliare alicuius differentialis completi dU. Quippe hoc patrato fit

e (4.) Multiplicator,

$$5. \quad \mu = e^{-\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\ldots\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)\frac{dx}{X}} = e^{-U}.$$

Hanc indagandi Multiplicatoris methodum in aliis Commentationibus per varia exempla illustrabo, in quibus integrationem quae Multiplicatorem suggerit videbimus praestari posse, aequationum differentialium vulgarium propositarum nullo Integrali cognito. Esse tamen poterit formulae (4.) usus etiam si aequationes differentiales complete integratae sunt. Tum enim formula (4.) docet, formationi Determinantis functionalis, quam determinatio Multiplicatoris requirebat, substitui posse Quadraturam, minus interdum molestam. Etenim ope integrationis completae quantitas ipsi $\frac{d\log\mu}{dx}$ aequalis per solam x et Constantes Arbitrarias exhiberi potest, unde ipsum $\log\mu$ per Quadraturam obtines.

$$6. \quad \log\mu = -\int\frac{dx}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\ldots\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right).$$

Post integrationem factam substituendo Constantibus Arbitrariis variabilium x, x_1, x_2, ... x_n functiones aequivalentes, prodibit ipsius $\log\mu$ expressio, aequationi differentiali partiali (2.) satisfaciens.

Post aequationum (3.) integrationem completam expressis x_1, x_1, ...x_n per x et Constantes Arbitrarias α_1, α_2, ... α_n fit secundum §. pr.

$$7. \quad \log\Sigma\pm\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_2}\ldots\ldots\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_n} = \log\frac{C}{\mu X},$$

designante C Constantium Arbitrariarum functionem. Unde, omissa quod licet Constante, e formula (6.) eruitur

$$8. \quad \log\Sigma\pm\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_2}\ldots\ldots\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_n} = \log\frac{1}{X}+\int\frac{dx}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\ldots\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right).$$

Quae formula immutata manere debet, omnibus X, X_1, ... X_n per factorem quemcunque communem multiplicatis. Quod ut pateat observo, per aequationes differentiales vulgares propositas aequationem (4.) aucta symmetria sic proponi posse:

$$9. \quad 0 = d\log\mu+\frac{\partial\log X}{\partial x}dx+\frac{\partial\log X_1}{\partial x_1}dx_1\ldots\ldots+\frac{\partial\log X_n}{\partial x_n}dx_n.$$

Unde e formula (7.) eruitur:

$$\log\Sigma\pm\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_2}\ldots\ldots\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_n} = \log\frac{C}{\mu X}$$

$$= \log\frac{1}{X}+\int\left(\frac{\partial\log X}{\partial x}dx+\frac{\partial\log X_1}{\partial x_1}dx_1\ldots\ldots+\frac{\partial\log X_n}{\partial x_n}dx_n\right).$$

Si in hac formula simul omnes X, X_1 etc. in factorem communem ν ducuntur, augetur integrale quantitate,

$$\int\left(\frac{\partial \log \nu}{\partial x}dx+\frac{\partial \log \nu}{\partial x_1}dx_1\ldots.+\frac{\partial \log \nu}{\partial x_n}dx_n\right)=\int d\log\nu=\log\nu.$$

Eadem autem quantitate minuitur $\log\frac{1}{X}$, unde tota expressio immutata manet, q. d. e.

Si in formula (8.) ponimus $X=1$, prodit Propositio sequens.

Propositio.

„Facta integratione completa aequationum differentialium vulgarium,

$$\frac{dx_1}{dx}=X_1,\quad \frac{dx_2}{dx}=X_2,\quad \ldots.\quad \frac{dx_n}{dx}=X_n,$$

exhibeantur $x_1, x_2, \ldots. x_n$ per x et Constantes Arbitrarias, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_n$, erit,

$$\log\Sigma\pm\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_1}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial\alpha_2}\ldots.\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_n}=\int\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\ldots.+\frac{\partial X_n}{\partial x_u}\right)dx,$$

quantitate sub signo et ipsa per x et Constantes Arbitrarias expressa."

Si in Propositione antecedente ipsae $\alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_n$ designant variabilium valores initiales, valori $x=0$ respondentes, integrationem inde a valore $x=0$ fieri oportet. Ope huius Propositionis vel formulae generalioris (8.) fieri potest ut Quadratura alias satis abscondita eruatur; sicuti vice versa si Quadratura in promtu est, valor inde eruitur Determinantis functionalis.

Propositio antecedens primum a cl. *Liouville* tradita est in Commentatione *„sur la variation des constantes arbitraires,"* ipsius Diario Mathematico (Vol. III. pg. 342) inserta. Eadem sequitur e formula iam supra citata D. F. §. 9. (1.), loco f, f_1 etc. scribendo $x_1, x_2, \ldots. x_n$ atque x loco α, loco x_1, x_2 etc. autem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_n$. Scilicet est ea consequentia lemmatis quod circa variationem logarithmi Determinantis loco citato dedi. Habeantur enim n systemata aequationum linearium inter n incognitas $u_1, u_2, \ldots. u_n$, quae systemata iisdem gaudeant Coëfficientibus incognitarum et tantum terminis prorsus constantibus inter se discrepent, unde etiam omnibus idem erit Determinans. Denotentur in $k$to aequationum linearium systemate termini constantes, in altera parte aequationum positi, respective per variationes Coëfficientium quibus in singulis aequationibus incognita u_k afficitur, atque e primo systemate aequationum petatur valor ipsius u_1, e secundo valor ipsius u_2, et ita porro: omnium horum valorum summa aequivalebit variationi logarithmi Determinantis.

In signis: sit $(u_k)_k$ valor ipsius u_k petitus e systemate aequationum,

$$10.\quad \begin{cases} a'_1 u_1 + a'_2 u_2 \ldots\ldots + a'_n u_n = \delta a'_k, \\ a''_1 u_1 + a''_2 u_2 \ldots\ldots + a''_n u_n = \delta a''_k, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_1^{(n)} u_1 + a_2^{(n)} u_2 \ldots\ldots + a_n^{(n)} u_n = \delta a_k^{(n)}, \end{cases}$$

erit

$$11.\quad (u_1)_1 + (u_2)_2 \ldots\ldots + (u_n)_n = \delta \log \Sigma \pm a'_1 a''_2 \ldots\ldots a_n^{(n)}.$$

Faciamus iam, in aequationibus differentialibus

$$\frac{dx_1}{dx} = X_1,\quad \frac{dx_2}{dx} = X_2,\quad \ldots\ldots \frac{dx_n}{dx} = X_n,$$

substitui variabilium x_1, x_2, ... x_n valores per x et Constantes Arbitrarias α_1, α_2, ... α_n exhibitas, qua substitutione prodire debent aequationes identicae Quas si ipsarum α_i respectu differentiamus, obtinemus nn huiusmodi aequationes,

$$12.\quad d\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} = \left\{\frac{\partial X_k}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial X_k}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_i} \ldots\ldots + \frac{\partial X_k}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_i}\right\} dx.$$

Ipsi i tribuendo valores 1, 2, ... n, ex aequatione antecedente prodeunt n aequationes lineares, in quibus habentur pro incognitis quantitates $\frac{\partial X_k}{\partial x_1}dx$, $\frac{\partial X_k}{\partial x_2}dx$ etc. Prodeunt n eiusmodi systemata aequationum linearum tribuendo ipsi quoque k valores 1, 2, ... n; in omnibusque illis aequationum linearium systematis incognitae iisdem gaudebunt Coëfficientibus. Hinc si in aequationibus (10.) ponimus

$$a_k^{(i)} = \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i},$$

atque variationibus substituimus differentialia, aequationes (10.) abeunt in aequationes (12.), unde eruitur

$$(u_k)_k = \frac{\partial X_k}{\partial x_k}dx.$$

Unde e (11.) sequitur

$$\left\{\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \ldots\ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\} dx = d\log \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \ldots\ldots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}$$

qua formula integrata Propositio supra tradita obtinetur.

Aequationis $X - X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \dots - X_n \frac{\partial x}{\partial x_n}$ pars laeva Multiplicatore suo efficitur Determinans functionale completum. Pro solutione singulari Multiplicator fit infinitus. Multiplicatorem nihilo aut infinito aequando obtinetur aequatio integralis.

§. 8.

Quemadmodum, proposito una plurium variabilium functione, destinguimus inter differentialia eius partialia, in quibus variabiles omnes pro independentibus habentur, et differentiale completum, in quo omnes ab earum una *indefinite* pendent, ita, propositis n functionibus $n+m$ variabilium, praeter earum Determinantia partialia, de quibus supra dixi, in quibus variabiles omnes pro independentibus habentur, in considerationem venire potest ***Determinans completum***, quod formatur habendo numerum m variabilium pro reliquarum n functionibus ***indefinitis***. Designantibus A et B ipsarum x et y functiones, aequationem differentialem,

$$A + B \frac{dy}{\partial x} = 0,$$

docuit ***Eulerus***, semper in talem duci posse Multiplicatorem, ut altera aequationis pars evadat differentiale completum sive differentiale certae functionis variabilium x et y, in qua y pro functione ipsius x habetur ***indefinita***. Similiter ***aequatio differentialis partialis***,

$$1.\quad X - X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \dots - X_n \frac{\partial x}{\partial x_n} = 0,$$

in qua $X, X_1, \dots X_n$ designant variabilium $x, x_1, \dots x_n$ functiones, semper in talem duci potest Multiplicatorem ut altera aequationis pars evadat Determinans functionale completum sive Determinans certarum n functionum variabilium $x, x_1, x_2, \dots x_n$, in quibus habetur x pro variabilium $x_1, x_2, \dots x_n$ functione indefinita. Functio in aequationem (1.) ducenda ipse est aequationis (1.) ***Multiplicator*** supra appellatus et antecedentibus fusius explicatus. Unde nova nostri et ***Euleriani*** Multiplicatoris similitudo emergit novaque inter Determinantia functionalia et differentialia analogia.

Demonstratio Propositionis antecedentis sic patet. Designantibus rursus $f_1, f_2, \dots f_n$ solutiones a se independentes aequationis,

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \dots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

supra vidimus, semper dari Multiplicatorem M, in quem ductae ipsae $X, X_1, \dots \dots X_n$ evadant functionum $f_1, f_2, \dots f_n$ Determinantia partialia, ita ut po-

nendo pro functione f indefinita,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = A\frac{\partial f}{\partial x} + A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

identice sit,

$$MX = A, \quad MX_1 = A_1, \quad \dots \quad MX_n = A_n.$$

Hinc eruitur

$$2. \quad M\left\{X - X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \cdots - X_n \frac{\partial x}{\partial x_n}\right\}$$
$$= A - A_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - A_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \cdots - A_n \frac{\partial x}{\partial x_n}.$$

At in Commentatione de Det. F. §. 17. (6.) demonstravi, siquidem in functionibus $f_1, f_2, \dots f_n$ habeatur x pro variabilium $x_1, x_2, \dots x_n$ functione indefinita, fieri,

$$3. \quad \Sigma \pm \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) \cdots \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) = A - A_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - A_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \cdots - A_n \frac{\partial x}{\partial x_n}.$$

Qua in formula uncis innui haberi x pro reliquarum variabilium $x_1, x_2, \dots x_n$ functione. Scilicet in Determinante Functionali (3.) substituendo ipsorum $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)$ expressiones

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x_k},$$

mutuo destruuntur termini omnes, in quibus inter se multiplicata inveniuntur differentialia partialia $\frac{\partial x}{\partial x_1}$, $\frac{\partial x}{\partial x_2}$ etc., ita ut horum differentialium non nisi ipsa expressio *linearis* remaneat, quae dextram partem aequationis (3.) constituit. E (2.) et (3.) sequitur formula,

$$4. \quad M\left\{X - X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \cdots - X_n \frac{\partial x}{\partial x_n}\right\}$$
$$= \Sigma \pm \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) \cdots \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right).$$

Unde ducta aequatione (1.) in Multiplicatorem eius M, altera eius pars identice aequatur Determinanti functionum $f_1, f_2, \dots f_n$, in quibus x pro variabilium $x_1, x_2, \dots x_n$ functione habetur indefinita. Q. d. e.

Formula (4.) methodum suppeditat, ut *Lagrangii* appellatione utar, syntheticam ad eruendam aequationis (1.) solutionem generalem. Nam secundum (4.) aequatio (1.) identice convenit cum sequente,

$$5. \quad \Sigma \pm \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) \cdots \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Quoties autem $f_1, f_2, \dots f_n$ sunt variabilium $x_1, x_2, \dots x_n$ functiones

earumque Determinans identice evanescit, semper et sine ulla exceptione inter functiones $f_1, f_2, \dots f_n$ aliqua locum habere debet aequatio, et vice versa, si qua inter functiones $f_1, f_2, \dots f_n$ locum habet aequatio, earum Determinans evanescit (D. F. §. 7.). Hinc docet formula (5.), ut ipsius x expressio per $x_1, x_2, \dots x_n$ sit aequationis (1.) solutio, sufficere et posci, post eius substitutionem ipsas $f_1, f_2, \dots f_n$ abire in tales variabilium $x_1, x_2, \dots x_n$ functiones, inter quas una quaecunque locum habeat aequatio. Unde vice versa dabitur solutio generalis petendo functionis quaesitae valorem ex aequatione arbitraria inter $f_1, f_2, \dots f_n$ posita,

$$\Pi(f_1, f_2, \dots f_n) = 0;$$

sive quod idem est, obtinetur aequationis (1.) solutio nihilo aequando solutionem quamcunque aequationis,

$$6. \quad X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

Haec egregia methodus aequationem differentialem partialem (1.) ad (6.) revocandi cum ea convenit quam olim ill. *Lagrange* tradidit (Hist. Ac. Ber. ad a. 1779 pag. 154), ubi primum hanc quaestionem aggressus est. Quae prolixior quidem videri possit methodus quam aliae quibus ipse *Lagrange* aliique postea usi sunt; qua de re ipse auctor eam ad exemplum tantum trium variabilium applicuit. Sane supponendo aequationem inter $x, x_1, \dots x_n$ quaesitam certe unam involvere Constantem Arbitrariam α, eamque aequationem ipsius α respectu resolutam fieri $f = \alpha$, aequatio proposita (1.) extemplo ad (6.) reducitur. Sed eadem ratione omnes quoque inveniri solutiones a Constantibus Arbitrariis prorsus vacuas, non ita bene per alias methodos constat atque illam *Lagrangianam*. Scilicet aequatio identica (4.) docet, nullam dari exceptionem solutionis traditae, nisi forte exstet solutio pro qua Multiplicator M evadat infinitus. Quodsi igitur more consueto solutionem eiusmodi exceptionalem seu quae generali se subducit appellamus *singularem*, methodus hic tradita rigorose demonstrat, *si qua extet aequationis* (1.) *solutio singularis, semper eam reddere Multiplicatorem aequationis infinitum.* Quod novam nostri Multiplicatoris similitudinem cum *Euleriano* manifestat.

Loco aequationis differentialis partialis (1.) consideremus systema aequationum differentialium vulgarium cum ea connexum, atque systema aequationum integralium *singulare* appellemus quod e completo provenit tribuendo uni pluribusve Constantibus Arbitrariis valores particulares seu unam pluresve relationes inter Constantes Arbitrarias statuendo: quo facto ex antecedentibus haec eruitur

Propositio I.

„*Proponantur aequationes differentiales*

$$dx : dx_1 \ldots : dx_n = X : X_1 \ldots : X_n,$$

earumque extet systema aequationum integralium singulare, n—1 Constantes Arbitrarias involvens: eliminatis Constantibus Arbitrariis e n aequationibus integralibus, prodit aequatio quae Multiplicatorem systematis aequationum differentialium propositarum reddit infinitum."

Ut Propositio haec demonstretur, primum generaliter ponamus aequationes integrales datas $n-1$ Constantibus Arbitrariis affici. Quarum aequationum ubi $n-1$ resolvuntur Constantium Arbitrarium respectu, quod semper fieri posse suppono, harumque valores provenientes in $n$ta aequatione integrali substituuntur, obtinebitur aequatio a Constantibus Arbitrariis vacua. E qua petatur unius variabilium veluti x valor per reliquas variabiles x_1, x_2 etc. expressus, atque in differentiali eius,

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x}{\partial x_2} dx_2 \ldots + \frac{\partial x}{\partial x_n} dx_n,$$

substituantur aequationes differentiales propositae,

$$7. \qquad dx : dx_1 \ldots : dx_n = X : X_1 \ldots : X_n;$$

eruitur

$$X = \frac{\partial x}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial x}{\partial x_2} X_2 \ldots + \frac{\partial x}{\partial x_n} X_n,$$

sive ille ipsius x valor suppeditabit aequationis differentialis partialis (1.) solutionem. Scilicet non fit ut aequatio antecedens ex aliis $n-1$ aequationibus integralibus datis fluat, quippe e quibus supponitur non deduci posse alteram aequationem a Constantibus Arbitrariis liberam. Eritque solutio illa aut particularis aut singularis, prout aequatio a Constantibus Arbitrariis libera, cuius ope ipsa x per reliquas variabiles exprimebatur, in aequationem inter quantitates f_1, f_2, ... f_k redit aut non redit. Iam demonstrabo, etiam systema aequationum integralium propositum iisdem casibus aut particulare aut singulare fore. Substituamus enim eum ipsius x valorem in $n-1$ aequationibus integralibus, quarum ope Constantes Arbitrariae eliminabantur, simulque in functionibus X_1, X_2, ... X_n aequationibus illis, ut $n-1$ Constantes Arbitrarias involventibus, *complete* integrantur aequationes differentiales

$$8. \qquad dx_1 : dx_2 \ldots : dx_n = X_1 : X_2 \ldots : X_n.$$

Unde quibuscunque aequationibus integralibus, $n-1$ Constantes Arbitrarias involventibus, semper haec forma conciliari potest, ut earum una exhibeatur una variabilium x per reliquas variabiles x_1, x_2 etc., reliquae $n-1$ aequationes

autem sint Integralia completa aequationum differentialium (8.), in quibus ille ipsius x valor in functionibus X_1, X_2, ... X_n substitutus est. Ponamus aequationem illam a Constantibus Arbitrariis vacuam, e qua valor ipsius x petitus est, redire in aequationem aliquam $F = 0$, designante F quantitatum f_1, f_2, ... f_n functionem. Designantibus F, F_1, ... F_{n-1} earundem f_1, f_2, ... f_n functiones a se invicem independentes, dabitur aequationum differentialium propositarum (7.) integratio completa per formulas

$$9. \quad F = \alpha, \quad F_1 = \alpha_1, \quad \ldots\ldots \quad F_{n-1} = \alpha_{n-1},$$

designantibus α, α_1 etc. Constantes Arbitrarias. Ex aequatione $F = \alpha$ petito ipsius x valore eoque in functionibus F_1, F_2, ... F_{n-1}, X_1, X_2, ... X_n substituto, evadunt

$$F_1 = \alpha_1, \quad F_2 = \alpha_2, \quad \ldots\ldots \quad F_{n-1} = \alpha_{n-1}$$

Integralia completa aequationum differentialium,

$$dx_1 : dx_2 \ldots\ldots : dx_n = X_1 : X_2 \ldots\ldots : X_n,$$

quae cum aequationibus differentialibus (8.) supra consideratis conveniunt ponendo $\alpha = 0$. Unde ponendo $\alpha = 0$ in aequationum differentialium propositarum Integralibus completis (9.), prodit systema aequationum integralium propositarum. Quippe quae redibant in aequationem qua ipsa x exprimitur per reliquas variabiles et quae cum aequatione $F = 0$ conveniebat, atque in aequationum differentialium (8.) Integralia completa, quae ex aequationibus $F_1 = \alpha_1$, $F_2 = \alpha_2$, ... $F_{n-1} = \alpha_{n-1}$ obtinentur, eliminata x ope aequationis $F = 0$. Unde aequationibus differentialibus (7.) integratis systemate aequationum, $n-1$ Constantes Arbitrarias involventium, quoties aequatio eliminatione Constantium Arbitrariarum proveniens redit in aequationem inter ipsas f_1, f_2, ... f_n, illud aequationum integralium systema erit particulare, utpote e completo proveniens tribuendo Constanti Arbitrariae valorem particularem. Hinc vice versa, si illud aequationum integralium systema non est particulare, aequatio eliminatione $n-1$ Constantium Arbitrariarum proveniens non redit in aequationem inter quantitates f_1, f_2, ... f_n, ideoque solutio quam suppeditat aequationis differentialis partialis (1.) erit singularis. Cuiusmodi solutione, cum secundum antecedentibus probata efficiatur $M = \infty$, demonstratum est quod propositum erat, *quoties systema aequationum differentialium vulgarium integretur systemate aequationum singulari, numerum Constantium Arbitrariarum involvente unitate minorem quam completum involvit, Constantium Arbitrariarum eliminatione provenire aequationem, qua Multiplicator systematis aequationum differentialium abeat in infinitum.* Et in hac propositione supponitur, quantitates X, X_1 etc. ita a

denominatoribus purgatas esse, ut earum nulla pro illa aequatione integrali seu solutione singulari infinita evadat.

Propositionis antecedentis alia haec est demonstratio. Integratione completa exprimantur $x_1, x_2, \ldots. x_n$ per x et Constantes Arbitrarias $\beta_1, \beta_2, \ldots. \beta_n$. Ponamus aequationibus differentialibus satisfieri posse statuendo $\beta_1, \beta_2, \ldots. \beta_n$ esse ipsius x functiones; sequitur e formula,

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial x} dx + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_1} d\beta_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_2} d\beta_2 \ldots. + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_n} d\beta_n,$$

haec

$$\frac{X_i}{X} dx = \frac{\partial x_i}{\partial x} dx + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_1} d\beta_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_2} d\beta_2 \ldots. + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_n} d\beta_n$$

At eliminando quantitates $\beta_1, \beta_2, \ldots. \beta_n$ sequitur ex aequationibus integralibus positis,

$$\frac{X_i}{X} = \frac{\partial x_i}{\partial x},$$

quippe quod prodire debebat ponendo $\beta_1, \beta_2, \ldots. \beta_n$ esse Constantes; illis autem eliminatis quantitatibus perinde est sive constantes sive variabiles fuerint. Substituendo aequationem antecedentem eruitur pro singulis ipsius i valoribus,

$$10. \quad \frac{\partial x_i}{\partial \beta_1} d\beta_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_2} d\beta_2 \ldots. + \frac{\partial x_i}{\partial \beta_n} d\beta_n = 0.$$

Ut satisfiat n aequationibus quae ponendo $i = 1, 2, \ldots. n$ ex antecedente fluunt, neque simul sit $d\beta_1 = d\beta_2 \ldots. = d\beta_n = 0$ sive $\beta_1, \beta_2, \ldots. \beta_n$ Constantes sint, evadere debet

$$11. \quad \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \beta_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \beta_2} \ldots. \frac{\partial x_n}{\partial \beta_n} = 0.$$

Quoties poscitur ut functiones $\beta_1, \beta_2, \ldots. \beta_n$ involvant $n-1$ Constantes Arbitrarias, non fieri potest ut aequatio (11.) in relationem inter solas variabiles $\beta_1, \beta_2, \ldots. \beta_n$ redeat, sed fieri debet ut e (11.) peti possit ipsius x valor per $\beta_1, \beta_2, \ldots. \beta_n$ expressus; quo substituto in quantitatibus $\frac{\partial x_i}{\partial \beta_k}$, habebuntur e (10.) $n-1$ aequationes differentiales primi ordinis inter quantitates β_1, $\beta_2, \ldots. \beta_n$, quibus complete integratis prodibunt $n-1$ aequationes inter quantitates $\beta_1, \beta_2, \ldots. \beta_n$, $n-1$ Constantibus Arbitrariis affectae. Quibus $n-1$ aequationibus iuncta aequatione qua x per $\beta_1, \beta_2, \ldots. \beta_n$ exprimebatur, ipsarumque β_1; β_2 etc. loco substitutis variabilium $x, x_1, \ldots. x_n$ functionibus, quibus per integrationem completam aequivalent, obtinetur systema aequationum integralium singularium, $n-1$ Constantibus Arbitrariis affectum. Fit autem se-

cundum §. 6.,

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \beta_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \beta_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \beta_n} = \frac{C}{X_\mu},$$

designante C quantitatum $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ functionem atque μ aequationum differentialium propositarum Multiplicatorem. Unde, cum supponatur aequationem (10.) non redire in relationem inter quantitates $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$, porro ipsam X non infinitam evadere, sequitur e (10.) $\mu = \infty$, q. d. e.

Secundum ea quae §. 7. tradidi, Multiplicator M systematis aequationum differentialium post earum integrationem completam factam sic erui potest. Sint rursus Integralia completa,

$$f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad f_n = \alpha_n,$$

eorum ope exprimatur

$$-\frac{1}{X}\left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\}$$

per $x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Qua expressione integrata ipsius x respectu, prodeat

$$\varphi(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n),$$

secundum §. 7. erit Multiplicator

$$e^{\varphi(x, f_1, f_2, \ldots f_n)}.$$

Haec quantitas ut infinita evadat per solutionem seu aequationem integralem singularem, hoc est per solutionem seu aequationem integralem quae non redeat in aequationem inter solas quantitates $f_1, f_2, \ldots f_n$ (quod semper fieri vidimus quoties omnino eiusmodi aequatio singularis extat) ex ea aequatione talis provenire debet valor ipsius x per quantitates $f_1, f_2, \ldots f_n$ expressus, quae quantitatem $\varphi(x, f_1, f_2, \ldots f_n)$ reddat infinitam. A *fortiori* igitur pro ea ipsius x valore infinita evadere debet quantitas

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{X}\left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\},$$

cum generaliter *quoties pro certo ipsius x valore infinita evadat functio aliqua $\varphi(x)$, pro eadem etiam infinita evadit functio $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ vel adeo $\frac{\partial \varphi}{\varphi \partial x}$* *). Supponimus autem, aequatione singulari non in infinitum abire quantitatem X, unde haec emergit

Propositio II.

„*Quoties extat solutio singularis aequationis differentialis partialis,*

$$X = X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \cdots + X_n \frac{\partial x}{\partial x_n},$$

*) Demonstrationem huius propositionis quivis sibi supplere potest.

pro eadem fit

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\cdots\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=\infty."$$

Difficilius videtur solidis argumentis evincere propositionem inversam, videlicet quoties aequatio

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\cdots\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=\infty$$

suppeditet aequationis differentialis partialis (1.) solutionem, eam fore singularem. Neque video solidam dari demonstrationem in casu elementari aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles, cum in demonstrationibus passim traditis minus recte supponatur, functionem quae pro $\alpha=0$ evanescat semper evolvi posse secundum ipsius α dignitates positivas.

Sub finem demonstretur de Multiplicatore nostro haec gravissima

Propositio III.

„*Quoties aequatio $M=0$ aut $M=\infty$ est aequatio legitima, semper ea suppeditat solutionem aequationis differentialis partialis, seu aequationem integralem systematis aequationum differentialium vulgarium, cuius M est Multiplicator.*"

Sit M aut $\frac{1}{M}$ aequale functioni u, ita ut aequatio $u=\infty$ alterutram significet aequationum $M=0$ aut $\frac{1}{M}=0$. Eam aequationem legitimam dico si eius ope quaeque variabilium quas continet determinatur ut functio reliquarum, eiusque differentialia quoque prorsus definiantur differentialibus reliquarum variabilium. Statim patet non esse legitimam aequationem $u=\infty$, si est $u=1$: sed eo dicendi modo etiam non erit legitima huiusmodi aequatio $\frac{1}{x+y}=0$, quippe qua non definitur, ut ipsius x functio, sed enunciatur tantum $x+y$ esse functionem quamcunque per Constantem infinite magnam multiplicatam; neque definitur ipsius y incrementum quod capit, ubi x in $x+dx$ abit, cum aequatio $x+y=\infty$ salva maneat si x et y incrementa quaecunque a se independentia capiunt. Addo, si ex aequatione $u=\infty$ fluat variabilis x valor per $x_1, x_2, \ldots. x_n$ expressus, fractiones $\frac{\partial u}{\partial x_i}:\frac{\partial u}{\partial x}$ per aequationem $u=\infty$ infinitas evadere non posse, cum negative sumtae aequentur differentialibus partialibus functionis variabilium $x_1, x_2, \ldots. x_n$, cui x aequalis invenitur. His praeparatis propositio tradita sic patet. Secundum aequationem differentialem partialem qua M defi-

nitur, sequitur ex aequatione $u = \infty$,

$$12. \quad X - X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} \dots - X_n \frac{\partial x}{\partial x_n}.$$
$$= \pm \frac{1}{\frac{\partial \log u}{\partial x}} \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \dots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \right\}.$$

Iam si supponitur, uti supra, aequatione $u = \infty$ nullam quantitatem $X, X_1, \dots X_n$ infinitam reddi, quaelibet quantitatum ad dextram, $\frac{\partial X_i}{\partial x_i} : \frac{\partial \log u}{\partial x}$, pro $u = \infty$ evanescit, etsi $\frac{\partial X_i}{\partial x_i}$ pro $u = \infty$ infinitum fiat. Quod sufficit probare de quantitate $\frac{\partial X_i}{\partial x_i} : \frac{\partial \log u}{\partial x_i}$, cum fractio $\frac{\partial u}{\partial x_i} : \frac{\partial u}{\partial x}$ valorem finitum habeat. Generale autem habetur lemma cuius demonstrationi difficultatibus non obnoxiae hic brevitatis causa supersedeo, ***si binae functiones pro certo variabilis valore altera infinita fiat, altera finita maneat, prioris differentiale pro eodem variabilis valore infinite maius fore quam posterioris differentiale.*** Petendo autem ex aequatione $u = \infty$ valorem ipsius x_i, pro eo ipsius x_i valore secundum suppositionem factam X_i finita manet dum $\log u$ infinitus evadit, unde fractiones $\frac{\partial X_i}{\partial x_i} : \frac{\partial \log u}{\partial x_i}$ ideoque etiam fractiones $\frac{\partial X_i}{\partial x_i} : \frac{\partial \log u}{\partial x}$ pro $u = \infty$ evanescunt. Unde evanescente aequationis (12.) parte dextra, aequatio $u = \infty$ suppeditat aequationis differentialis partialis (1.) solutionem, ideoque etiam aequationem integralem systematis aequationum differentialium vulgarium (7.)

Notione aequationis legitimae supra propositae solvitur paradoxon quod in theoria integrationum singularium obvenit. Constat enim rarissime aequationes differentiales gaudere integrationibus singularibus. At methodus ***Lagrangiana*** quandam prae se fert generalitatis speciem, quae in errorem inducere possit, ac si de quavis integratione completa deducere liceat singularem. Scilicet ill. ***Lagrange,*** de aequationibus $y = f(x, \alpha)$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$, ipsum α eliminare iubet; at in rarissimis casibus quando $y = f(x, \alpha)$ est aequatio integralis completa, Constante Arbitraria α affecta, fit $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ aequatio legitima, qua sola hic uti licet. Idem ad methodum valet, qua supra de systemate aequationum integralium completarum deduxi aequationum integralium singularium systema, quod numerum Constantium Arbitrariarum unitate minorem implicat.

Caput secundum.

De usu novi Multiplicatoris in aequationibus differentialibus integrandis. Principium ultimi Multiplicatoris.

De Multiplicatore aequationum differentialium transformatarum e propositarum derivando.

§. 9.

In aequationibus differentialibus propositis,

$$1.\quad dx : dx_1 \ldots : dx_n = X : X_1 \ldots : X_n,$$

loco variabilium x, x_1, ... x_n aliae introducantur w, w_1, ... w_n, quae supponuntur datae variabilium x, x_1, ... x_n functiones a se independentes, unde etiam x, x_1, ... x_n erunt quantitatum w, w_1, ... w_n functiones independentes. Cum fiat,

$$dw_i = \frac{\partial w_i}{\partial x} dx + \frac{\partial w_i}{\partial x_1} dx_1 \ldots + \frac{\partial w_i}{\partial x_n} dx_n,$$

sequitur ex aequationibus (1.):

$$2.\quad dw : dw_1 \ldots : dw_n = W : W_1 \ldots : W_n,$$

ponendo,

$$3.\quad W_i = \Delta\left\{\frac{\partial w_i}{\partial x} X + \frac{\partial w_i}{\partial x_1} X_1 \ldots + \frac{\partial w_i}{\partial x_n} X_n\right\},$$

ubi Δ factor adhuc indeterminatus sit. Porro fit,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)\frac{\partial w}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial f}{\partial w_1}\right)\frac{\partial w_1}{\partial x_i} \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial w_n}\right)\frac{\partial w_n}{\partial x_i},$$

siquidem uncis, quibus includimus differentialia partialia, innuimus functiones differentiandas per novas variabiles w, w_1, ... w_n exhibitas esse. Antecedente formula substituta et advocata (3.) sequitur *pro quacunque functione* f:

$$4.\quad \Delta\left\{X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$$
$$= W\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right) + W_1\left(\frac{\partial f}{\partial w_1}\right) \ldots + W_n\left(\frac{\partial f}{\partial w_n}\right).$$

Aequationum (1.) Multiplicator M definiebatur aequatione,

$$5.\quad M\left\{X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\} = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\ldots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Similiter datur aequationum (2.) Multiplicator N per formulam,

$$6.\quad N\left\{W\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right) + W_1\left(\frac{\partial f}{\partial w_1}\right) \ldots + W_n\left(\frac{\partial f}{\partial w_n}\right)\right\}$$
$$= \Sigma \pm \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial w_1}\right)\ldots\left(\frac{\partial f_n}{\partial w_n}\right).$$

At secundum propositionem notam (*De Determ. Funct.* §. 11. Prop. II. §. 9. (3.)) fit,

$$7. \quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

$$= \Sigma \pm \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial w_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial f_n}{\partial w_n}\right) . \Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial w_n}{\partial x_n}.$$

Unde e (4.), (5.) obtinetur pro quacunque functione f:

$$8. \quad \frac{M}{\Delta}\left\{W\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right) + W_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial w_1}\right) \cdots + W_n\left(\frac{\partial f_n}{\partial w_n}\right)\right\}$$

$$= \Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial w_n}{\partial x_n} . \Sigma \pm \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial w_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial f_n}{\partial w_n}\right).$$

Quam formulam comparando cum (6.) sequitur, *posito in formula* (3.),

$$9. \quad \Delta = \frac{1}{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial w_n}{\partial x_n}} = \Sigma \pm \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial w_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial x_n}{\partial w_n}\right),$$

fieri $N = M$ *sive aequationum differentialium propositarum* (1.) *atque transformatarum* (2.) *eundem fore Multiplicatorem.*

Servando factori Δ valorem (9.), cum sit idem M aequationum (1.) et (2) Multiplicator, fit e proprietate Multiplicatoris fundamentali,

$$10. \quad 0 = X\frac{\partial M}{\partial x} + X_1\frac{\partial M}{\partial x_1} \cdots + X_n\frac{\partial M}{\partial x_n}$$
$$+ M\left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\},$$

$$11. \quad 0 = W\left(\frac{\partial M}{\partial w}\right) + W_1\left(\frac{\partial M}{\partial w_1}\right) \cdots + W_n\left(\frac{\partial M}{\partial w_n}\right)$$
$$+ M\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial w}\right) + \left(\frac{\partial W_1}{\partial w_1}\right) \cdots + \left(\frac{\partial W_n}{\partial w_n}\right)\right\}.$$

At ponendo M pro functione indefinita f in formula (4.) fit,

$$X\frac{\partial M}{\partial x} + X_1\frac{\partial M}{\partial x_1} \cdots + X_n\frac{\partial M}{\partial x_n} = \frac{1}{\Delta}\left\{W\frac{\partial M}{\partial w} + W_1\frac{\partial M}{\partial w_1} \cdots + W_n\frac{\partial M}{\partial w_n}\right\}.$$

Unde de aequatione (11.) per Δ divisa detrahendo aequationem (10.) et dividendo per M eruitur:

$$12. \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = \frac{1}{\Delta}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial w}\right) + \left(\frac{\partial W_1}{\partial w_1}\right) \cdots + \left(\frac{\partial W_n}{\partial w_n}\right)\right\}.$$

Quae est formula memoratu digna, in qua X, X_1, ... X_n sunt functiones quaecunque, ipsae autem Δ, W, W_1, ..., W_n formulis (9.) et (3.) definiuntur.

Si quantitates W, W_1 etc. per factorem communem Δ dividimus, per eundem multiplicandus erit aequationum (2.) Multiplicator. Unde si definimus

quantitates W_i formula

$$W_i = \frac{\partial w_i}{\partial x} X + \frac{\partial w_i}{\partial x_1} X_1 \dots + \frac{\partial w_i}{\partial x_n} X_n,$$

aequationum differentialium,

$$dw : dw_1 \dots dw_n = W : W_1 \dots : W_n,$$

erit Multiplicator $\varDelta . M$. Ponamus

$$t = \int \frac{dx}{X},$$

poterunt aequationes differentiales (1.) sic proponi:

$$13. \quad \frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \dots \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n;$$

unde sequitur,

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial w_i}{\partial x} X + \frac{\partial w_i}{\partial x_1} X_1 \dots + \frac{\partial w_i}{\partial x_n} X_n,$$

sive,

$$\frac{dw_i}{dt} = W_i.$$

Aequationum (1.) *Multiplicatorem in sequentibus etiam appellabo Multiplicatorem aequationum* (13.). Unde antecedentibus inventa sic poterunt enunciari:

Propositio I.

„Designantibus $X, X_1, \dots X_n$ variabilium $x, x_1, \dots x_n$ functiones quaslibet, proponantur aequationes differentiales,

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \dots \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

quarum sit M Multiplicator; in quibus aequationibus ipsarum x, x_1 etc. loco aliae introducantur variabiles $w, w_1, \dots w_n$; quo facto si obtinentur aequationes differentiales,

$$14. \quad \frac{dw}{dt} = W, \quad \frac{dw_1}{dt} = W_1, \quad \dots \quad \frac{dw_n}{dt} = W_n,$$

harum aequationum Multiplicator erit $\varDelta . M$, posito

$$\varDelta = \frac{1}{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} . \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial w_n}{\partial x_n}} = \Sigma \pm \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right) \left(\frac{\partial x_1}{\partial w_1}\right) \dots \left(\frac{\partial x_n}{\partial w_n}\right).\text{“}$$

Ubi rursus quantitates W_i formula (3.) definimus, formulam (12.) sic proponere licet.

Propositio II.

„Ipsarum $x, x_1, \dots x_n$ loco introducendo $w, w_1, \dots w_n$, ponendoque

$$dt = \Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial w_n}{\partial x_n} . dt,$$

ex aequationibus differentialibus

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \dots \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

proveniant sequentes,

$$\frac{dw}{dt} = W, \quad \frac{dw_1}{dt} = W_1, \quad \dots \quad \frac{dw_n}{dt} = W_n,$$

erit

$$\left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \dots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\} dt = \left\{\left(\frac{\partial W}{\partial w}\right) + \left(\frac{\partial W_1}{\partial w_1}\right) \dots + \left(\frac{\partial W_n}{\partial w_n}\right)\right\} dt."$$

In antecedentibus suppositum est, neque ipsas X, X_1 etc. implicare variabilem t neque eam variabilem afficere relationes quae inter variabiles propositas $x, x_1, \dots x_n$ atque novas $w, w_1, \dots w_n$ intercedunt. *Si quantitates X, X_1 etc. praeter variabiles x, x_1 etc. ipsa quoque t afficiuntur, aequationum* (13.) *Multiplicatorem eundem dicere placet atque aequationum,*

$$15. \quad dt : dx : dx_1 \dots dx_n = 1 : X : X_1 \dots : X_n.$$

Designantibus x, x_1 etc. ipsarum $t, w, w_1, \dots w_n$, sive w, w_1 etc. ipsarum $t, x, x_1, \dots x_n$ functiones, ponamus rursus ex aequationibus differentialibus (13.) vel (15.) sequi aequationes (14.) sive aequationes,

$$16. \quad dt : dw : dw_1 \dots dw_n = 1 : W : W_1 \dots : W_n,$$

atque aequationum (15.) Multiplicatorem esse M, aequationum (16.) Multiplicatorem $\Delta . M$. Quibus statutis, secundum antecedentia ad $n+2$ variabiles amplificata erit,

$$\Delta = \Sigma \pm \left(\frac{\partial t}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial w_1}\right) \dots \left(\frac{\partial x_n}{\partial w_n}\right).$$

Sed habetur $\left(\frac{\partial t}{\partial t}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial t}{\partial w_i}\right) = 0$, unde,

$$\Sigma \pm \left(\frac{\partial t}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial w_1}\right) \dots \left(\frac{\partial x_n}{\partial w_n}\right) = \Sigma \pm \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial w_1}\right) \dots \left(\frac{\partial x_n}{\partial w_n}\right).$$

Hinc sequitur, *Propositionem I. ad eum quoque casum valere, quo quantitates X, X_1 etc. atque functiones novis variabilibus aequandae w, w_1 etc. praeter ipsas x, x_1 etc. variabili t afficiuntur.*

Si tantum pro parte variabilium aliae introducuntur, ipsius Δ expressio simplicior evadit. Propositis enim aequationibus (13.)

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \ldots\ldots \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

quarum est M Multiplicator, si tantum loco variabilium $x, x_1, \ldots. x_\mu$ aliae introducuntur $w, w_1, \ldots. w_\mu$, ita ut aequationes differentiales transformatae fiant,

$$\frac{dw}{dt} = W, \quad \frac{dw_1}{dt} = W_1, \quad \ldots\ldots \quad \frac{dw_\mu}{dt} = W_\mu,$$

$$\frac{dx_{\mu+1}}{dt} = X_{\mu+1}, \quad \frac{dx_{\mu+2}}{dt} = X_{\mu+2}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

fit harum Multiplicator $\Delta . M$, posito,

$$\Delta = \Sigma \pm \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial w_1}\right) \ldots. \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial w_\mu}\right) = \frac{1}{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \ldots. \frac{\partial w_\mu}{\partial x_\mu}},$$

sicuti ex expressione generali ipsius Δ patet ponendo $w_{\mu+1} = x_{\mu+1}$, $w_{\mu+2} = x_{\mu+2}$ etc. Quae formulae variis applicationibus idoneae sunt.

Multiplicator aequationum differentialium ope Integralium completorum reductarum e Multiplicatore propositarum eruitur. Pro reductionibus diversis Multiplicatores alii de aliis deducuntur.

§. 10.

Per formulas §. pr. traditas facile solvitur quaestio, si aequationum differentialium

$$1. \qquad dx : dx_1 \ldots. : dx_n = X : X_1 \ldots. : X_n,$$

inventa sint m Integralia,

$$2. \qquad w = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \ldots. \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1},$$

designantibus $\alpha, \alpha_1, \ldots. \alpha_{m-1}$ Constantes Arbitrarias, aequationum differentialium ope illorum Integralium reductarum Multiplicatorem e Multiplicatore propositarum investigandi. Sint enim $w_m, w_{m+1}, \ldots. w_n$ aliae variabilium $x, x_1, \ldots. x_n$ functiones a se ipsis et ab ipsis $w, w_1, \ldots. w_{m-1}$ independentes, inter quas propositum sit aequationes differentiales exhibere reductas. Poterunt $w, w_1, \ldots. w_n$ ipsarum $x, x_1, \ldots. x_n$ loco pro variabilibus in Calculum introduci. Quo facto secundum §. pr. abeunt aequationes differentiales vulgares (1.) in sequentes:

$$3. \qquad dw : dw_1 : dw_2 \ldots. : dw_n = W : W_1 : W_2 \ldots. : W_n,$$

siquidem statuitur

$$4. \qquad W_i = \Delta \left\{ \frac{\partial w_i}{\partial x} + X_1 \frac{\partial w_i}{\partial x_1} \ldots. + X_n \frac{\partial w_i}{\partial x_n} \right\}.$$

Ponendo factorem Δ, quem ex arbitrio determinare licet, fieri,

$$5.\quad \Delta = \Sigma \pm \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial w_1}\right)\cdots\left(\frac{\partial x_n}{\partial w_n}\right) = \frac{1}{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial w_n}{\partial x_n}},$$

vidimus §. pr. Multiplicatorem aequationum differentialium propositarum (1.) eundem evadere Multiplicatorem aequationum transformatarum (3.). Unde designante M aequationum (1.) Multiplicatorem, identice erit

$$6.\quad \left(\frac{\partial . MW}{\partial w}\right) + \left(\frac{\partial . MW_1}{\partial w_1}\right) \cdots + \left(\frac{\partial . MW_n}{\partial w_n}\right) = 0,$$

qua in formula $M, W, W_1, \dots W_n$ per variabiles $w, w_1, \dots w_n$ expressae finguntur. At cum sint (2.) aequationum differentialium (1.) Integralia, sequitur esse $w, w_1, \dots w_{m-1}$ solutiones aequationis differentialis partialis

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

unde patet e formula (4.), identice fieri,

$$7.\quad W = 0,\quad W_1 = 0,\quad \dots\quad W_{m-1} = 0.$$

Unde aequatio (6.) in hanc reducitur,

$$8.\quad \left(\frac{\partial . MW_m}{\partial w_m}\right) + \left(\frac{\partial . MW_{m+1}}{\partial w_{m+1}}\right) \cdots + \left(\frac{\partial . MW_n}{\partial w_n}\right) = 0.$$

In aequatione antecedente expressae sunt MW_m, MW_{m+1} etc. per $w, w_1, \dots$ $\dots w_n$, sed differentiationes partiales solarum $w_m, w_{m+1}, \dots w_n$ respectu transiguntur. Unde in aequatione praecedente ipsis $w, w_1, \dots w_{m-1}$ substituere licet Constantes Arbitrarias aequivalentes $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_{m-1}$. Idem si facimus in aequationibus differentialibus (3.), obtinemus aequationes differentiales per inventa Integralia (2.) reductas,

$$9.\quad dw_m : dw_{m+1} \dots : dw_n = W_m : W_{m+1} \dots : W_n,$$

in quibus sunt $W_m, W_{m+1}, \dots W_n$ ipsarum $w_m, w_{m+1}, \dots w_n$ et Constantium Arbitrariarum $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_{m-1}$ functiones, in quas quantitates (4.) per inventa Integralia (2.) abeunt. Simulque docet aequatio identica (8.) ipsum M, per $w_m, w_{m+1}, \dots w_n$ atque $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_{m-1}$ expressum, fore aequationum quoque reductarum (9.) Multiplicatorem.

Antecedentibus valores quantitatum W_i per talem factorem Δ multiplicavi, ut aequationum differentialium (1.) atque (3.) Multiplicator M idem fiat. Si in formulis (4.) hunc factorem omittimus sive omnes quantitates W_i per factorem Δ dividimus, ipsum M per eundem multiplicari debebat, sive aequationum (3.) vel (9.) Multiplicator poni debebat $\Delta . M$ (§. 9.). Quod si facimus, antecedentibus inventa sic proponere licet.

Propositio I.

„Aequationum differentialium

$$dx : dx_1 \dots : dx_n = X : X_1 \dots : X_n,$$

quarum sit M Multiplicator, inventa sint m Integralia,

$$w = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \dots w_{m-1} = \alpha_{m-1},$$

quorum ope variabiles $x, x_1, \dots x_n$ omnes exprimantur per Constantes Arbitrarias $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_{m-1}$ atque variabilium $x, x_1, \dots x_n$ functiones

$$w_m, \quad w_{m+1}, \dots w_n,$$

ponendo

$$W_i = X \frac{\partial w_i}{\partial x} + X_1 \frac{\partial w_i}{\partial x_1} \dots + X_n \frac{\partial w_i}{\partial x_n},$$

dabuntur inter variabiles $w_m, w_{m+1}, \dots w_n$ aequationes differentiales,

$$dw_m : dw_{m+1} \dots : dw_n = W_m : W_{m+1} \dots : W_n,$$

harumque Multiplicator erit

$$\varDelta . M,$$

siquidem ponitur

$$\varDelta = \Sigma \pm \left(\frac{\partial x}{\partial w_m}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial w_{m+1}}\right) \dots \left(\frac{\partial x_{n-m}}{\partial w_n}\right)\left(\frac{\partial x_{n-m+1}}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial x_{n-m+2}}{\partial \alpha_1}\right) \dots \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_{m-1}}\right)$$

$$= \left\{\Sigma \pm \frac{\partial w_m}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_{m+1}}{\partial x_1} \dots \frac{\partial w_n}{\partial x_{n-m}} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_{n-m+1}} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_{n-m+2}} \dots \frac{\partial w_{m-1}}{\partial x_n}\right\}^{-1}."$$

Quae est Propositio in theoria Multiplicatoris fundamentalis. Determinans inversum, quo $\varDelta$ exprimitur, sic quoque scribi potest,

$$\left\{\Sigma + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial w_n}{\partial x_n}\right\}^{-1},$$

cum permutatione functionum w, w_1 etc. valor Determinantis tantum signum mutare queat, quod hic non curamus.

Pro ipsis $w_m, w_{m+1}, \dots w_n$ etiam $n-m+1$ quantitates e numero ipsarum $x, x_1, \dots x_n$ sumere licet. Si statuimus

$$w_m = x, \quad w_{m+1} = x_1, \quad \dots \quad w_n = x_{n-m},$$

fit,

$$10. \quad \varDelta = \Sigma \pm \left(\frac{\partial x_{n-m+1}}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial x_{n-m+2}}{\partial \alpha_1}\right) \dots \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_{m-1}}\right)$$

$$= \left\{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x_{n-m+1}} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_{n-m+2}} \dots \frac{\partial w_{m-1}}{\partial x_n}\right\}^{-1}.$$

Porro e (4.) obtinetur,

$$W_m = X, \quad W_{m+1} = X_1, \quad \dots \quad W_n = X_{n-m}.$$

Hinc eruitur

Propositio II.

„Aequationum differentialium

$$dx : dx_1 \dots : dx_n = X : X_1 \dots : X_n,$$

quarum M est Multiplicator, inventis m Integralibus,

$$w = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \dots \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1},$$

si exhibentur x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, ... x_n per x, x_1, ... x_{n-m} atque Constantes Arbitrarias α, α_1, ... α_{m-1}, aequationum differentialium reductarum

$$dx : dx_1 \dots : dx_{n-m} = X : X_1 \dots : X_{n-m},$$

evadit Multiplicator,

$$M\Sigma \pm \left(\frac{\partial x_{n-m+1}}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial x_{n-m+2}}{\partial \alpha_1}\right) \dots \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_{m-1}}\right)$$

$$= M\left\{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x_{n-m+1}} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_{n-m+2}} \dots \frac{\partial w_{m-1}}{\partial x_n}\right\}^{-1}."$$

Si eaedem aequationes differentiales propositae per diversa Integralium systemata reducuntur, Multiplicatores diversorum aequationum differentialium reductarum systematum ex eorum uno deduci possunt. Qua in re semper supponitur, unumquodque Integrale quod reductioni inservit sua affici Constante Arbitraria, ideoque aequationes differentiales reductas omnes ingredi Constantes Arbitrarias, quibus Integralia quorum ope reductio effecta est afficiuntur.

Sint enim rursus Integralia reductioni adhibenda,

$$w = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \dots \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1},$$

atque aequationes differentiales reductae, inter variabiles w_m, w_{m+1}, ... w_n exhibitae,

$$11. \quad dw_m : dw_{m+1} \dots : dw_n = W_m : W_{m+1} \dots : W_n.$$

Eaedem aequationes differentiales propositae (1.) ope Integralium,

$$u = \beta, \quad u_1 = \beta_1, \quad \dots \quad u_{k-1} = \beta_{k-1},$$

reducantur ad has, inter variabiles u_k, u_{k+1}, ... u_n exhibitas,

$$12. \quad du_k : du_{k+1} \dots : du_n = U_k : U_{k+1} \dots : U_n.$$

Sit M Multiplicator aequationum differentialium propositarum, sint respective N et K Multiplicatores aequationum differentialium reductarum (11.) et (12.): erit secundum Prop. I.

$$13. \quad N = M\left\{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial w_n}{\partial x_n}\right\}^{-1},$$

$$K = M\left\{\Sigma \pm \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right\}^{-1},$$

unde

$$14.\qquad K = N\,\frac{\Sigma\pm\frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial w_n}{\partial x_n}}{\Sigma\pm\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial u_n}{\partial x_n}}.$$

Quae formula supponit, in aequationibus differentialibus reductis (11.) et (12.) ita definiri quantitates differentialibus proportionales ut fiat,

$$\frac{\partial w_m}{W_m} = \frac{\partial u_k}{U_k}.$$

Si ipsae $w, w_1, \ldots w_n$ per $u, u_1, \ldots u_n$ exprimuntur, formulam (14.) notae propositionis beneficio (D. F. §. 10. (5.)) concinnius sic exhibere licet,

$$15.\qquad K = N\Sigma\pm\frac{\partial w}{\partial u}.\frac{\partial w_1}{\partial u_1}\cdots\frac{\partial w_n}{\partial u_n}.$$

Quae formula generalis duos amplectitur casus, quo aequationes differentiales propositae per eadem Integralia reducuntur, sed reductae inter diversas variabiles exhibentur, et quo per diversa Integralia reductae inter easdem variabiles exhibentur.

Etenim ponendo $k = m$ atque

$$u = w,\quad u_1 = w_1,\quad \ldots\quad u_{m-1} = w_{m-1},$$

sequitur e (15.), si eaedem aequationes differentiales propositae per eadem Integralia,

$$w = \alpha,\quad w_1 = \alpha_1,\quad \ldots\quad w_{m-1} = \alpha_{m-1},$$

reducantur ad $n-m$ aequationes differentiales inter $n-m+1$ variabiles w_m, $w_{m+1}, \ldots w_n$ vel ad alias inter variabiles $u_m, u_{m+1}, \ldots u_n$, fieri

$$16.\qquad K = N\Sigma\pm\frac{\partial w_m}{\partial u_m}.\frac{\partial w_{m+1}}{\partial u_{m+1}}\cdots\frac{\partial w_n}{\partial u_n},$$

ubi $w_m, w_{m+1}, \ldots w_n$ expressae supponuntur per variabiles $u_m, u_{m+1}, \ldots u_n$ atque Constantes Arbitrarias $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}$.

Si vero rursus $k = m$ atque

$$u_m = w_m,\quad u_{m+1} = w_{m+1},\quad \ldots\quad u_n = w_n,$$

vel si aequationes differentiales propositae per hoc m Integralium systema

$$w = \alpha,\quad w_1 = \alpha_1,\quad \ldots\quad w_{m-1} = \alpha_{m-1},$$

aut per hoc,

$$u = \beta,\quad u_1 = \beta_1,\quad \ldots\quad u_{m-1} = \beta_{m-1},$$

reducuntur ad $n-m$ aequationes differentiales diversas inter easdem $n-m+1$ variabiles $w_m, w_{m+1}, \ldots w_n$: abit formula (15.) in hanc,

$$17.\qquad K = N\Sigma\pm\frac{\partial w}{\partial\beta}.\frac{\partial w_1}{\partial\beta_1}\cdots\frac{\partial w_{m-1}}{\partial\beta_{m-1}},$$

siquidem in formando Determinante Functionali supponitur expressas esse w, w_1, ... w_{m-1} per variabiles w_m, w_{m+1}, ... w_n atque Constantes Arbitrarias β, β_1, ... β_m.

Principium ultimi Multiplicatoris sive quomodo cognito Multiplicatore systematis aequationum differentialium vulgarium ultima integratio ad Quadraturas revocatur.

§. 11.

Propositionum I. et II. §. pr. prae ceteris memorabilis est casus $m = n-1$, quo omnibus praeter unum inventis Integralibus una integranda restat aequatio differentialis primi ordinis inter duas variabiles. Eo casu Multiplicator aequationis differentialis reductae redit in Multiplicatorem *Eulerianum*, qui eam per se integrabilem reddit sive ad Quadraturas revocat. Unde ponendo $n = m-1$ e Propp. I. et II. §. pr. memorabiles prodeunt Propositiones, quae novum constituunt principium, e quo Calculus Integralis haud parum incrementi capit. Quod *principium ultimi Multiplicatoris* appellare convenit.

Propositio I.

„*Propositis aequationibus differentialibus*

$$dx : dx_1 \dots : dx_n = X : X_1 \dots : X_n$$

habeatur Multiplicator M sive solutio quaecunque aequationis differentialis partialis,

$$\frac{\partial . MX}{\partial x} + \frac{\partial . MX_1}{\partial x_1} \dots + \frac{\partial . MX_n}{\partial x_n} = 0;$$

porro inventa sint Integralia praeter unum omnia,

$$w = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \dots \quad w_{n-2} = \alpha_{n-2},$$

designantibus α etc. Constantes Arbitrarias, quibus ipsae functiones w, w_1 etc. non afficiantur; sumtis ex arbitrio duabus ipsarum x, x_1, ... x_n functionibus w_{n-1}, w_n, fiat,

$$X \frac{\partial w_{n-1}}{\partial x} + X_1 \frac{\partial w_{n-1}}{\partial x_1} \dots + X_n \frac{\partial w_{n-1}}{\partial x_n} = W_{n-1},$$

$$X \frac{\partial w_n}{\partial x} + X_1 \frac{\partial w_n}{\partial x_1} \dots + X_n \frac{\partial w_n}{\partial x_n} = W_n,$$

erit ultimum Integrale

$$\int \frac{M\{W_n dw_{n-1} - W_{n-1} dw_n\}}{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} . \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial w_n}{\partial x_n}} = \text{Const.}"$$

Propositio II.

„*Inventis aequationum differentialium,*

$$dx : dx_1 \dots : dx_n = X : X_1 \dots : X_n,$$

Integralibus praeter unum omnibus,

$$w = \alpha,\quad w_1 = \alpha_1,\quad \ldots\ldots\quad w_{n-2} = \alpha_{n-2},$$

ac designante M solutionem quamcunque aequationis differentialis partialis,

$$0 = \frac{\partial . MX}{\partial x} + \frac{\partial . MX_1}{\partial x_1} \ldots\ldots + \frac{\partial . MX_n}{\partial x_n},$$

exprimantur

$$x_2,\quad x_3,\quad \ldots\ldots\quad x_n,\quad X,\quad X_1,\quad M$$

per x et x_1 atque Constantes Arbitrarias

$$\alpha,\quad \alpha_1,\quad \ldots\ldots\quad \alpha_{n-2}:$$

erit *aequatio integralis,*

$$\int \frac{M\{X_1\,dx - X\,dx_1\}}{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_3} \ldots\ldots \frac{\partial w_{n-2}}{\partial x_n}} = \text{Const.''}$$

In duabus Propositionibus antecedentibus quantitas sub integrationis signo posita evadit differentiale completum, ubi expressiones in bina differentialia ducta per easdem duas variabiles exhibentur inter quas aequatio differentialis reducta locum habet. Similiter in sequentibus etsi pressis verbis non adnotetur, quoties formula integralis Constanti Arbitrariae aequiparatur, innuitur sub signo integrationis haberi differentiale completum.

In Propp. antecedentibus loco divisionis per Determinantia Functionalia,

$$\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial w_n}{\partial x_n},$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_3} \ldots\ldots \frac{\partial w_{n-2}}{\partial x_n},$$

etiam multiplicatio institui potuisset per Determinantia Functionalia sensu inverso formata (Det. Funct. §. 9.). Quod ubi fit, erit in altera Propositione ultima aequatio integralis,

$$1.\qquad \int M\Delta(W_n\,dw_{n-1} - W_{n-1}\,dw_n) = \text{Const.},$$

posito

$$2.\qquad \Delta = \Sigma \pm \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1} \ldots\ldots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_{n-2}} \cdot \frac{\partial x}{\partial w_{n-1}} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial w_n}$$

$$= \left\{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial w_n}{\partial x_n}\right\}^{-1},$$

vel in altera

$$3.\qquad \int M\Delta(X_1\,dx - X\,dx_1) = \text{Const.},$$

posito

$$4.\qquad \Delta = \Sigma \pm \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1} \ldots\ldots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_{n-2}} = \left\{\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_3} \ldots\ldots \frac{\partial w_{n-2}}{\partial x_n}\right\}^{-1}.$$

In formandis Determinantibus functionalibus (2.) et (4.) supponitur, aut ipsa $n-2$ Integralia dari novasque quoque variabiles w_{n-1}, w_n per x, x_1, ... x_n expressas esse, aut per integrationes transactas variabiles omnes expressas esse per binas w_{n-1}, w_n vel x, x_1 atque per Constantes Arbitrarias quae singulis integrationibus accedunt. Generalius si reductio ad aequationem differentialem primi ordinis inter duas variabiles efficitur ope $n-1$ aequationum integralium quarumcunque,

$$\Pi = 0,\quad \Pi_1 = 0,\ \ldots\ \Pi_{n-2} = 0,$$

quae afficiuntur totidem Constantibus Arbitrariis

$$\alpha,\quad \alpha_1,\ \ldots\ \alpha_{n-2},$$

poni poterit in formula (2.)

$$5.\qquad \Delta = \frac{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial \alpha_1}\cdots\frac{\partial \Pi_{n-2}}{\partial \alpha_{n-2}}}{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_3}\cdots\frac{\partial \Pi_{n-2}}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial w_{n-1}}{\partial x}\cdot\frac{\partial w_n}{\partial x_1}},$$

vel in formula (4.),

$$6.\qquad \Delta = \frac{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial \alpha_1}\cdots\frac{\partial \Pi_{n-2}}{\partial \alpha_{n-2}}}{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_3}\cdots\frac{\partial \Pi_{n-2}}{\partial x_n}}$$

(Cf. *Det. Funct.* §. 10.). Formula antecedens prae ceteris cum fructu adhibetur. Aequationibus enim integralibus inventis saepissime per varias eliminationes eiusmodi formas induere licet, pro quibus Determinantia functionalia, quae numeratorem et denominatorem fractionis antecedentis constituunt, sine molestia inveniantur. Commode etiam adhiberi potest ad Determinantia functionalia formanda propositio, valorem Determinantium functionalium,

$$\Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial w_n}{\partial x_n},\qquad \Sigma \pm \frac{\partial w}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial w_1}{\partial x_3}\cdots\frac{\partial w_{n-2}}{\partial x_n},$$

non mutari, si ante differentiationes partiales transigendas functio quaeque w_i ope aequationum,

$$7.\qquad w = \alpha,\quad w_1 = \alpha_1,\ \ldots\ w_{i-1} = \alpha_{i-1},$$

mutationes quascunque subeat. Inservire possunt aequationes (7.) ad eliminandas e quaque functione w_i variabiles

$$x_n,\quad x_{n-1},\ \ldots\ x_{n-i+1}.$$

Quo facto si abit w_i in Π_i, erunt

$$\Pi - \alpha = 0,\quad \Pi_1 - \alpha_1 = 0,\ \ldots\ \Pi_{n-2} - \alpha_{n-2} = 0,$$

aequationes integrales, quales per integrationem et eliminationem successivam

inveniuntur. Porro fit

$$8. \quad X \pm \frac{\partial w}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial w_{n-2}}{\partial x_n} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\partial \Pi_{n-2}}{\partial x_2}.$$

Cf. §. 3. Si vero adhibentur variabilium expressiones quales ex eliminatione successiva prodeunt, videlicet ipsius x_n expressio per x, x_1, ... x_{n-1}, α; ipsius x_{n-1} expressio per x, x_1, ... x_{n-2}, α, α_1 etc., abit Determinans

$$X \pm \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_{n-2}}$$

in productum

$$\left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \alpha_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_{n-2}}\right),$$

ubi uncis innuo esse x_{n-i} ipsarum x, x_1, ... x_{n-i-1}, α, α_1, ... α_i functionem. Quibus substitutis in (4.), fit

$$9. \quad \Delta = \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \alpha_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_{n-2}}\right) = \frac{1}{\frac{\partial \Pi}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\partial \Pi_{n-2}}{\partial x_2}}.$$

Hinc sequentes emergunt Propositiones.

Propositio III.

„Aequationum differentialium vulgarium,

$$dx : dx_1 \ldots : dx_n = X : X_1 \ldots : X_n,$$

quarum M est Multiplicator, inventis per integrationem et eliminationem successivam aequationibus integralibus praeter unam omnibus,

$$\Pi = \alpha, \quad \Pi_1 = \alpha_1, \quad \ldots \quad \Pi_{n-2} = \alpha_{n-2},$$

ubi Π_i est functio variabilium x, x_1, ... x_{n-i} atque Constantium Arbitrariarum α, α_1, ... α_{i-1}: fit ultima aequatio integralis,

$$\int \frac{M\{X_1 dx - X dx_1\}}{\frac{\partial \Pi}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\partial \Pi_{n-2}}{\partial x_2}} = \text{Const.}"$$

Propositio IV.

„Aequationum differentialium vulgarium

$$dx : dx_1 \ldots : dx_n = X : X_1 \ldots : X_n,$$

quarum M est Multiplicator, inventis per integrationem et eliminationem successivam expressionibus ipsius x_n per x, x_1, ... x_{n-1} atque Constantem Arbitrariam α; ipsius x_{n-1} per x, x_1, ... x_{n-2} atque Constantes Arbitrarias α, α_1 etc., denique ipsius x_2 per x, x_1 atque Constantes Arbitrarias α, α_1, ... α_{n-2}, dabitur aequatio inter x et x_1 per formulam,

$$\int \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \alpha_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_{n-2}}\right) M(X_1 dx - X dx_1) = \text{Const.}"$$

In utraque Propositione functiones sub signo integrationis ope aequationum integralium inventarum per x et x_1 exprimendae sunt.

Quod e Multiplicatore aequationum differentialium propositarum eruitur Multiplicator aequationis differentialis, in quam post inventa praeter unum omnia Integralia problema redit, id eo maioris momenti est, quia huius ultimae aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles valde latere potest Multiplicator, dum systematis aequationum differentialium propositarum sponte se offert. Veluti quod in gravissimis quaestionibus evenit, si ipsarum X, X_1 etc. expressiones ita sunt comparatae, ut identice habeatur,

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\dots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=0,$$

aequationum differentialium propositarum Multiplicator *unitati* aequalis evadit; aequationis autem postremo integrandae Multiplicator secundum antecedentia aequatur Determinanti Functionali, cui valor complicatus competere potest. Casu illo particulari in quatuor Propositionibus antecedentibus ponere licet $M=1$; quod ubi ex gr. in Prop. IV. facimus, emergit haec:

Propositio V.

„*Proponantur aequationes differentiales simultaneae,*

$$dx:dx\dots:dx_n=X:X_1\dots:X_n,$$

designantibus X, X_1, etc. variabilium x, x_1 etc. functiones pro quibus identice habeatur,

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\dots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=0;$$

inventis aequationum propositarum $n-1$ Integralibus, $n-1$ Constantes Arbitrarias α, α_1, ... α_{n-2} involventibus, exprimantur X et X_1 atque variabiles x_2, x_3, ... x_n per x, x_1 atque istas Constantes Arbitrarias α, α_1, ... α_{n-2}: erit ultimum Integrale,

$$\int\left(\Sigma\pm\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial x_3}{\partial\alpha_1}\dots\frac{\partial x_n}{\partial\alpha_{n-2}}\right)\{X_1dx-Xdx_1\}=\text{Const.},$$

ubi expressio sub integrationis signo differentiale completum existit."

Propositionis antecedentis afferam exempla pro $n=2$ et $n=3$.

I. „Proponantur aequationes differentiales

$$dx:dy:dz=X:Y:Z,$$

designantibus X, Y, Z variabilium x, y, z functiones, pro quibus identice fiat,

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0;$$

invento uno Integrali involvente Constantem Arbitrariam α, exprimantur X, Y, z per x, y, α, erit alterum Integrale,

$$\int \frac{\partial z}{\partial \alpha} \{Y dx - X dy\} = \text{Const.}"$$

II. „Proponantur aequationes differentiales

$$dt : dx : dy : dz = T : X : Y : Z,$$

designantibus T, X, Y, Z variabilium t, x, y, z functiones, pro quibus identice fiat,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

inventis duobus Integralibus involventibus Constantes Arbitrarias α et β, exprimantur T, X, y, z per t, x, α, β; erit tertium Integrale,

$$\int \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)(X dt - T dx) = \text{Const.}"$$

Quae exempla non sine molesto calculo verificantur.

Quibus casibus Multiplicator aequationum differentialium per aequationes integrales *particulares* reductarum ex aequationum differentialium propositarum Multiplicatore eruitur. Principium ultimi Multiplicatoris siue Determinantium adiumento comprobatum.

§. 12.

Si aequationes integrales, aequationibus differentialibus reducendis adhibitae, sunt particulares, in genere non licet Multiplicatorem aequationum differentialium reductarum e Multiplicatore propositarum deducere. In Prop. II. §. 10., quae docet quomodo aequationum differentialium propositarum et reductarum Multiplicatores a se invicem pendeant, possunt quidem Constantibus Arbitrariis quibus Integralia afficiuntur valores particulares tribui: supponitur autem ipsa cognita esse aequationum differentialium propositarum Integralia generalia. Quae tamen suppositio necessaria non est. Etenim si aequationes integrales reductioni adhibendae alia post aliam investigantur, sufficit unamquamque aequationem integralem inventam ita comparatam esse, ut differentiata per aequationes differentiales propositas identica reddatur, simul omnibus *ipsam praecedentibus* aequationibus integralibus accitis. Neque vero propositum succederet si ex aequationibus integralibus reductioni adhibitis duae pluresve ita comparatae essent, ut quaeque earum differentiata per aequationes differentiales propositas identica reddi non possit nisi simul omnes reliquae aequationes integrales, nullo ordine observato, in auxilium vocentur.

Antecedentia cum e formulis traditis patent tum ope propositionis elementaris directe demonstrantur, quoties aequationes integrales alia post aliam inventae ad variabiles successive eliminandas adhibentur. Sit enim aequationum differentialium propositarum primum Integrale inventum,

$$F = \alpha;$$

cujus ope e quantiiatibus X, X_1, ... X_{n-1} eliminetur x_n. Ponendo $m = 1$ in Prop. II §. 10. sequitur, *Multiplicatorem aequationum differentialium reductarum,*

$$1. \quad dx : dx_1 \ldots : dx_{n-1} = X : X_1 \ldots : X_{n-1},$$

aequari Multiplicatori aequationum differentialium propositarum diviso per $\frac{\partial F}{\partial x_n}$ *sive quantitati*

$$\frac{M}{\frac{\partial F}{\partial x_n}},$$

in qua variabilis x_n *per aequationem* $F = \alpha$ *eliminanda est.* Constans α in hac propositione fundamentali arbitraria est ideoque valor ei quicunque tribui potest particularis.

Tributo in functionibus X, X_1, ... X_{n-1} Constanti α quam implicant valore particulari, sit aequationum (1.) Integrale,

$$F_1 = \alpha_1.$$

Quod non erit Integrale aequationum differentialium propositarum. Quippe aequatio $dF_1 = 0$ per aequationes differentiales propositas identica non redditur nisi simul Constans α ubique functioni F aequatur. Quae Constantis α eliminatio ubi fit in functione F_1, aequatio $F_1 = \alpha_1$ evadit Integrale aequationum differentialium propositarum. Sed ea Constantis α eliminatio fieri non potest si ei in aequationibus differentialibus reductis (1.) tribuitur valor particularis, neque igitur eo casu ex aequationum differentialium reductarum Integrali Integrale propositarum restituere licet.

Eliminata x_{n-1} ope aequationis $F_1 = \alpha_1$, obtinentur e (1.) aequationes differentiales denuo reductae,

$$2. \quad dx : dx_1 \ldots dx_{n-2} = X : X_1 \ldots : X_{n-2}.$$

Quarum Multiplicator secundum eandem regulam derivatur e Multiplicatore aequationum (1.), atque hic e Multiplicatore aequationum differentialium propositarum erutus est, videlicet dividendo per $\frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}}$, unde prodit aequationum (2.) Multiplicator.

$$\frac{M}{\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}}},$$

quae quantitas variabilibus x_n et x_{n-1} per aequationes $F=\alpha$, $F_1=\alpha_1$ eliminatis solarum x, x_1, ... x_{n-2} functio evadit. Unde aequationum differentialium (2.) erutus est Multiplicator, quamquam reductio facta est per duas aequationes $F=\alpha$, $F_1=\alpha_1$, quarum tantum altera est aequationum differentialium propositarum Integrale, altera non est neque ad tale revocari potest, si Constanti α tributus est valor particularis.

Rursus tributo Constanti α_1 valore particulari quocunque, aequationum (2.) quaeratur Integrale, quo invento aequationes differentiales (2.) ulterius reduci possunt, reductarumque per eandem regulam constabit Multiplicator. Sic pergendo successive eruantur m aequationes integrales,

$$3.\quad F=\alpha,\quad F_1=\alpha_1,\quad \ldots.\quad F_{m-1}=\alpha_{m-1},$$

in quibus α, α_1, ... α_{m-1} sint Constantes particulares quaecunque; quarum aequationum integralium ope revocatis X, X_1, ... X_{n-m} ad solarum x, x_1, ... x_{n-m} functiones, aequationum differentialium ad quas successiva eliminatione pervenitur,

$$4.\quad dx:dx_1\ldots.:dx_{n-m}=X:X_1\ldots.:X_{n-m},$$

eruitur Multiplicator,

$$5.\quad \frac{M}{\frac{\partial F}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}}\cdots\frac{\partial F_{m-1}}{\partial x_{n-m+1}}},$$

quae quantitas et ipsa per aequationes (3.) ad solarum x, x_1, ... x_{n-m} functionem revocanda est. Aequationes (3.) reductionibus successivis inservientes hic ita comparatae sunt ut quaeque $F_i=\alpha_i$ sit Integrale aequationum differentialium,

$$dx:dx_1\ldots\;:dx_{n-i}=X:X_1\ldots.:X_{n-i},$$

variabilibus x_n, x_{n-1}, ... x_{n-i+1} e X, X_1, ... X_{n-i} eliminatis ope aequationum ipsam $F_i=\alpha_i$ praecedentium,

$$F=\alpha,\quad F_1=\alpha_1,\quad \ldots.\quad F_{i-1}=\alpha_{i-1}.$$

Si $m=n-1$, formula (5.) suppeditat Multiplicatorem aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles x et x_1,

$$6.\quad X_1dx-Xdx_1=0,$$

quae post inventas aequationes integrales,

$$7.\quad F=\alpha,\quad F_1=\alpha_1,\quad \ldots.\quad F_{n-2}=\alpha_{n-2},$$

unica integranda restat. Multiplicatore sic invento,

$$\frac{M}{\frac{\partial F}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}}\cdots\cdot\frac{\partial F_{n-2}}{\partial x_2}},$$

laeva pars aequationis (6.) evadit differentiale completum, unde eius integratio ad Quadraturas revocatur sive fit ultima aequatio integralis,

$$8.\quad \int \frac{M(X_1 dx - X dx_1)}{\frac{\partial F}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}}\cdots\cdot\frac{\partial F_{n-2}}{\partial x_2}} = \text{Const.}$$

Qua in formula adiumento aequationum integralium inventarum (7.) quantitates, sub integrationis signo in differentialia dx et dx_1 ductae, per solas x et x_1 exprimendae sunt.

Cum antecedentibus Constantes α, α_1, ... α_{n-2} sint particulares *quaecunque*, earum valorem etiam generalem seu indefinitam servare licet, quo facto formula (8.) redit in Prop. III. §. pr. Vice versa Prop. III. §. pr., in qua designant α, α_1, ... α_{n-2} Constantes Arbitrarias, eum quoque amplectitur casum quo post quamque novam integrationem Constanti Arbitrariae qua afficitur valor tribuitur particularis. Quod intelligitur observando, aequationibus differentialibus Constantes Arbitrarias involventibus, idem earum Integrale obtineri posse, sive ante sive post integrationem Constantibus Arbitrariis illis valores particulares tribuas.

Necessarium non est, ut quaeque nova aequatio integralis inveniatur ut Integrale ipsarum aequationum differentialium ad quas propositae reducuntur eliminato per aequationes integrales ante inventas aequali variabilium numero; generalius ea esse poterit Integrale aequationum differentialium propositarum, per aequationes integrales ante ipsam inventas quocunque modo transformatarum. Aequationum enim differentialium propositarum per Integrale $F = \alpha$ transformatarum sit Integrale $F_1 = \alpha_1$; aequationum differentialium propositarum per binas aequationes $F = \alpha$, $F_1 = \alpha_1$ transformatarum sit Integrale $F_2 = \alpha_2$, per tres aequationes $F = \alpha$, $F_1 = \alpha_1$, $F_2 = \alpha_2$ transformatarum sit Integrale $F_3 = \alpha_3$, et ita porro, ubi Constantes α, α_1 etc. poterunt arbitrariae esse sive particulares quaecunque. Quibus positis, ex aequatione integrali $F = \alpha$ et aequationibus differentialibus propositis sequi debet, $dF_1 = 0$; unde per aequationem $F = \alpha$ eliminata x_n e functionibus X, X_1, ... X_{n-1}, F_1, fieri debet $F_1 = \alpha_1$ Integrale aequationum differentialium,

$$dx : dx_1 \ldots : dx_{n-1} = X : X_1 \ldots : X_{n-1}.$$

Ex aequationibus integralibus $F=\alpha$, $F_1=\alpha_1$ et aequationibus differentialibus propositis sequi debet $dF_2=0$; unde per aequationes $F=\alpha$, $F_1=\alpha_1$ eliminatis x_n et x_{n-1} e functionibus X, X_1, ... X_{n-2}, fieri debet $F_2=\alpha_2$ Integrale aequationum differentialium,

$$dx:dx_1\;....:dx_{n-2} = X:X_1\;....:X_{n-2},$$

et ita porro. Generaliter si primum functiones F_1, F_2 etc. ratione illa generaliori qua eas definivi obtinebantur, ac deinde e quaque F_i eliminantur x_n, x_{n-1}, ... x_{n-i+1} per aequationes $F=\alpha$, $F_1=\alpha_1$, ... $F_{i-1}=\alpha_{i-1}$, eaedem functiones F, F_1, F_2 etc. prodeunt quas in formulis (5. et. 8.) consideravi. Ea autem reductione adhibita abit Determinans functionale

$$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}}\;....\;\frac{\partial F_{m-1}}{\partial x_{n-m+1}}$$

in simplex productum

$$\frac{\partial F}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}}\;....\;\frac{\partial F_{m-1}}{\partial x_{n-m+1}},$$

quod formulae (5.) denominatorem afficit (§. 3.). Unde si functionibus F, F_1, F_2 etc. generaliorem significatum servare placet, formula (5.) evadere debet,

$$9.\qquad \frac{M}{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}}\;....\;\frac{\partial F_{m-1}}{\partial x_{n-m+1}}},$$

ideoque etiam formula (8.)

$$10.\qquad \int \frac{M\{X_1\,dx - X\,dx_1\}}{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_{n-1}}\;....\;\frac{\partial F_{n-2}}{\partial x_2}} = \text{Const.}$$

Definitio functionum F, F_1 etc. amplectitur casum quo omnes aequationes $F_i=\alpha_i$ sunt ipsarum aequationum differentialium Integralia generalia. Unde e simplice propositione elementari tradita derivatur principium ultimi Multiplicatoris, si reductio ad aequationem differentialem primi ordinis inter duas variabiles per Integralia generalia fit, simulque monstrantur casus maxime generales quibus invenire liceat ultimum Multiplicatorem, etsi aequationes integrales reductioni adhibitae sint particulares.

Addam demonstrationem propositionis fundamentalis qua antecedentibus vidimus principium ultimi Multiplicatoris via maxime elementari adeoque absque ullo Determinantium adiumento superstrui.

Propositio.

„*Sit F solutio quaecunque aequationis*

$$X\frac{\partial F}{\partial x}+X_1\frac{\partial F}{\partial x_1}\;....+X_n\frac{\partial F}{\partial x_n}=0,$$

exclusa Constante; sit porro M solutio quaecunque aequationis

$$\frac{\partial . MX}{\partial x}+\frac{\partial . MX_1}{\partial x_1}\cdots\cdot+\frac{\partial . MX_n}{\partial x_n}=0,$$

Constante non exclusa: posito

$$N=\frac{M}{\frac{\partial F}{\partial x_n}},$$

ipsisque N, X, X_1, ... X_{n-1} per x, x_1, ... x_{n-1}, F expressis, fit N solutio aequationis

$$\frac{\partial . NX}{\partial x}+\frac{\partial . NX_1}{\partial x_1}\cdots\cdot+\frac{\partial . NX_{n-1}}{\partial x_{n-1}}=0."$$

Demonstratio.

Ponatur

$$\frac{\partial F}{\partial x_n}=u;$$

differentiando variabilis x_n respectu aequationem identicam,

$$X\frac{\partial F}{\partial x}+X_1\frac{\partial F}{\partial x_1}\cdots\cdot+X_n\frac{\partial F}{\partial x_n}=0,$$

prodit,

$$X\frac{\partial u}{\partial x}+X_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdots\cdot+X_n\frac{\partial u}{\partial x_n}$$
$$+\frac{\partial X}{\partial x_n}.\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_n}.\frac{\partial F}{\partial x_1}\cdots\cdot+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}.\frac{\partial F}{\partial x_n}=0.$$

Innuendo uncis quibus differentialia partialia includantur exhiberi X, X_1 etc. per x, x_1, ... x_{n-1}, F, fit

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_n}=\left(\frac{\partial X_i}{\partial F}\right)\frac{\partial F}{\partial x_n}=\left(\frac{\partial X_i}{\partial F}\right)u.$$

Quam formulam in aequatione praecedente substituendo atque per u dividendo prodit,

$$X\frac{\partial \log u}{\partial x}+X_1\frac{\partial \log u}{\partial x_1}\cdots\cdot+X_n\frac{\partial \log u}{\partial x_n}$$
$$+\left(\frac{\partial X}{\partial F}\right)\frac{\partial F}{\partial x}+\left(\frac{\partial X_1}{\partial F}\right)\frac{\partial F}{\partial x_1}\cdots\cdot+\left(\frac{\partial X_n}{\partial F}\right)\frac{\partial F}{\partial x_n}=0.$$

Haec formula detrahatur de sequente, quae ex ea quâ M definitur fluit,

$$X\frac{\partial \log M}{\partial x}+X_1\frac{\partial \log M}{\partial x_1}\cdots\cdot+X_n\frac{\partial \log M}{\partial x_n}$$
$$+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\cdots\cdot+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=0,$$

simulque observetur haberi pro indicis i valoribus 1, 2, ... $n-1$,

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_i}\right) + \left(\frac{\partial X_i}{\partial F}\right)\frac{\partial F}{\partial x_i},$$

prodit ponendo $\frac{M}{u} = N$,

$$X\frac{\partial \log N}{\partial x} + X_1\frac{\partial \log N}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial \log N}{\partial x_n}$$
$$+ \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right) \dots + \left(\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) = 0.$$

Fit autem

$$X\frac{\partial \log N}{\partial x} + X_1\frac{\partial \log N}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial \log N}{\partial x_n}$$
$$= X\left(\frac{\partial \log N}{\partial x}\right) + X_1\left(\frac{\partial \log N}{\partial x_1}\right) \dots + X_{n-1}\left(\frac{\partial \log N}{\partial x_{n-1}}\right)$$
$$+ \frac{\partial \log N}{\partial F}\left\{X\frac{\partial F}{\partial x} + X_1\frac{\partial F}{\partial x_1} \dots + X_n\frac{\partial F}{\partial x_n}\right\}$$
$$= X\left(\frac{\partial \log N}{\partial x}\right) + X_1\left(\frac{\partial \log N}{\partial x_1}\right) \dots + X_{n-1}\left(\frac{\partial \log N}{\partial x_{n-1}}\right),$$

aggregato in $\left(\frac{\partial \log N}{\partial F}\right)$ ducto identice evanescente. Unde aequatio antecedens sic quoque exhiberi potest:

$$X\left(\frac{\partial \log N}{\partial x}\right) + X_1\left(\frac{\partial \log N}{\partial x_1}\right) \dots + X_{n-1}\left(\frac{\partial \log N}{\partial x_{n-1}}\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right) \dots + \frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_{n-1}} = 0,$$

quae per N multiplicata suppeditat,

$$\left(\frac{\partial . NX}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial . NX_1}{\partial x_1}\right) \dots + \left(\frac{\partial . NX_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) = 0,$$

quae est formula demonstranda.

Vidimus supra, propositione antecedente iteratis vicibus adhibita erui aequationum differentialium reductarum Multiplicatorem e Multiplicatore propositarum. Sed ad hunc finem non necesse est ut hic ipse cognoscatur sed sufficit eius cognoscere valorem quem per aequationes integrales reductioni adhibitas induere potest. Si problema ad aequationem differentialem primi ordinis inter x et x_1 revocatum est, definitur M aequationibus,

$$11. \quad \frac{d \log M}{dx} = -\frac{1}{X}\left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \dots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\} X_1 dx = X dx_1,$$

in quibus *post differentiationes partiales factas* eliminandae sunt x_2, x_3, ... x_n. Si aequationes integrales, quarum ope reductiones et eliminationes propositae operantur, particulares sunt, evenire potest ut e formulis (11.) eruatur valor ipsius M in principio ultimi Multiplicatoris requisitus, neque tamen

inveniri queat ipsius M valor generalis sive ipsarum aequationum differentialium propositarum Multiplicator. Directe aequationis differentialis,

$$X_1 dx - X dx_1 = 0,$$

definitur Multiplicator P per formulam,

$$12. \quad \frac{d \log P}{dx} = -\frac{1}{X}\left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right\},$$

in cuius dextra parte X et X_1 *ante differentiationes partiales transigendas* per solas x et x_1 exprimendae sunt. Potest autem evenire ut via non pateat qua ipsum P e (12.) eruatur, dum ipsius M determinatio per formulam (11.) in promtu est. Quae adeo, nullis cognitis aequationibus integralibus, in amplis gravissimisque problematis succedit, unde pro quibuscunque aequationibus integralibus reductioni adhibitis sive completis sive dicta ratione inventis particularibus ultimus Multiplicator constat.

De usu Multiplicatoris in integrandis systematis quibusdam aequationum differentialium specialibus.

§. 13.

Systema aequationum differentialium propositarum ita comparatum esse potest ut ultima Integratio sponte in Quadraturam redeat. Quod evenit si unius variabilis differentiale tantum, non ipsa in aequationibus differentialibus invenitur. Ponamus ipsam x esse variabilem a qua simul omnes functiones vacuae sint $X, X_1, \dots X_n$: redire constat integrationem n aequationum differentialium inter $n+1$ variabiles,

$$1. \quad dx : dx_1 : dx_2 \dots : dx_n = X : X_1 : X_2 \dots : X_n,$$

in integrationem $n-1$ aequationum differentialium inter n variabiles unamque Quadraturam. Integratis enim aequationibus,

$$2. \quad dx_1 : dx_2 \dots : dx_n = X_1 : X_2 \dots : X_n,$$

quae sunt $n-1$ aequationes differentiales inter n variabiles $x_1, x_2, \dots x_n$, exhiberi poterunt variabiles $x_1, x_2, \dots x_n$ per earum unam veluti x_1: unde, expressa $\frac{X}{X_1}$ per x_1, dabit simplex Quadratura ipsius x valorem,

$$3. \quad x = \int \frac{X dx_1}{X_1} + \text{Const.}$$

Iam cognito aequationum differentialium (1.) Multiplicatore quaeritur, quemnam ex eo fructum ad integrationem perficiendam percipere liceat, cum ultima integratio sua sponte in Quadraturam redeat. Quod ut cognoscatur, inter duo casus distinguendum erit, prout datus aequationum differentialium (1.) Multiplicator a variabili x afficiatur sive non afficiatur.

Aequationum differentialium (2.) systema vocabo ***proprium***, quo distinguatur a systemate ***proposito*** aequationum differentialium (1.), cujus integratio componitur ex integratione systematis proprii et Quadratura. Si datus systematis propositi Multiplicator M et ipse a variabili x vacuus est, idem erit systematis proprii Multiplicator. Tum enim evanescente termino $\frac{\partial . MX}{\partial x}$, satisfaciet aequationum differentialium (1.) Multiplicator aequationi,

$$\frac{\partial . MX_1}{\partial x_1} + \frac{\partial . MX_2}{\partial x_2} \dots + \frac{\partial . MX_n}{\partial x_n} = 0,$$

eadem autem aequatione definitur aequationum differentialium (2.) Multiplicator. Quoties igitur datus systematis propositi (1.) Multiplicator et ipse variabili x vacat, systematis proprii ultima integratio ad Quadraturas revocari potest, sive quod idem est, ***systematis aequationum differentialium propositarum duae ultimae integrationes per Quadraturas absolvuntur.***

Vice versa si datur systematis proprii (2.) Multiplicator N, qui erit solarum variabilium x_1, x_2, ... x_n functio, idem erit systematis propositi (1.) Multiplicator. Evanescente enim termino $\frac{\partial . NX}{\partial x}$, functio N, quae huic aequationi satisfacere debet,

$$0 = \frac{\partial . NX_1}{\partial x_1} + \frac{\partial . NX_2}{\partial x_2} \dots + \frac{\partial . NX_n}{\partial x_n},$$

etiam huic satisfaciet qua systematis propositi Multiplicator definitur,

$$0 = \frac{\partial . NX}{\partial x} + \frac{\partial . NX_1}{\partial x_1} \dots + \frac{\partial . NX_n}{\partial x_n}.$$

Inventis autem omnibus systematis proprii Integralibus,

$$4. \quad f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \dots \quad f_{n-1} = \alpha_{n-1},$$

ubi Constantes Arbitrariae α_1 etc. dextram aequationum partem occupant, erit aequationum (2.) Multiplicator,

$$5. \quad N = \frac{1}{X_n} \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} . \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}.$$

Qui igitur systematis quoque propositi Multiplicator erit. Unde si systematis propositi datur Multiplicator M, variabilem x implicans, simulque systema proprium complete integratum est, duo innotescunt systematis propositi Multiplicatores M et N. Quibus cognitis, secundum §. 4. systematis propositi constabit Integrale,

$$6. \quad \frac{N}{M} = \frac{1}{MX_n} \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} . \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} = \text{Const.}$$

Quo Integrali dabitur x per x_1, x_2, ... x_n, sive ope Integralium (4.) expressis x_2, x_3, ... x_n per x_1, dabitur x per x_1. Unde *si innotescit systematis propositi Multiplicator variabili x affectus, post systematis proprii integrationem completam, non amplius opus erit Quadratura, quam formula* (8.) *poscebat ad inveniendum ipsius x valorem per x_1 expressum.*

Fieri potest ut solo cognito systematis propositi Multiplicatore variabili x affecto, absque ulla integratione eruantur systematis proprii unum plurave Integralia. Expressa enim per (4.) quantitate $\frac{X}{X_1}$ per x_1, α_1, α_2, ... α_{n-1}, in functione

$$\int \frac{X \partial x_1}{X_1},$$

post factam integrationem, Constantium α_1, α_2 etc. loco restituamus functiones f_1, f_2 etc., quo facto prodeat variabilium x_1, x_2, ... x_n functio

$$\xi = \int \frac{X \, dx_1}{X_1}:$$

erit e (3.), designante α_n novam Constantem Arbitrariam,

$$x - \xi = \alpha_n$$

systematis propositi Integrale. Sit rursus variabilium x_1, x_2, ... x_n functio N systematis proprii ideoque etiam systematis propositi Multiplicator, erit secundum §. 4. expressio generalis Multiplicatoris systematis propositi,

$$M = \Pi(x - \xi, f_1, f_2, \dots f_{n-1}) . N.$$

Cognito igitur valor ipsius M, variabili x affecto, erit $\frac{\partial \log M}{\partial x}$ ipsarum $x - \xi$, f_1, f_2, ... f_{n-1} functio,

$$\frac{\partial \log M}{\partial x} = \Phi(x - \xi, f_1, f_2, \dots f_{n-1}).$$

Unde ponendo

$$7. \quad \frac{\partial \log M}{\partial x} = u,$$

atque ex hac aequatione quaerendo ipsius x valorem per u, x_1, x_2, ... x_n expressum, prodit

$$x = \xi + \psi(u, f_1, f_2, \dots f_{n-1}),$$

designante ψ certam ipsarum u, f_1, f_2, ... f_{n-1} functionem. Quaerendo igitur e (7.) ipsius x valorem per u, x_1, x_2, ... x_n expressum, atque in ea expressione ipsius u loco ponendo varios valores constantes arbitrarios, differentiae quantitatum provenientium erunt solarum f_1, f_2, ... f_n functiones, ideoque Constantibus Arbitrariis aequiparatae suppeditabunt systematis proprii

Integralia. Methodus hic tradita semper succedit si non tantum M sed etiam $\frac{\partial \log M}{\partial x}$ ipsam x involvit atque ψ non solius u vel Φ non solius $x-\xi$ functio est. Quoties autem $\Phi = \frac{\partial \log M}{\partial x}$ solius $x-\xi$ functio est, erit $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ipsius Φ functio. Unde *e systematis propositi Multiplicatore cognito M semper deducere licet absque integratione systematis proprii unum plurave Integralia, quoties $\frac{\partial^2 \log M}{\partial x^2}$ non ipsius $\frac{\partial \log M}{\partial x}$ functio est.* Similiter demonstratur, *cognito systematis propositi Integrali, variabili x affecto, $v = \alpha$, designante α Constantem Arbitrariam, ex eo semper derivari posse unum plurave systematis proprii Integralia, nisi $\frac{\partial v}{\partial x}$ ipsius v functio sit.* Nam cum esse debeat v quantitatum $x-\xi$, f_1, f_2, ... f_{n-1} functio, ex aequatione $v = \alpha$ sequitur huiusmodi

$$x = \xi + \psi(\alpha, f_1, f_2, \dots f_{n-1});$$

unde eruendo e $v = \alpha$ ipsius x valore in eoque ponendo ipsius α loco varios valores constantes arbitrarios, differentiae expressionum provenientium Constantibus Arbitrariis aequiparatae suppeditabunt systematis proprii Integralia.

Ut habeatur exemplum quo systematis propositi Multiplicator variabili x affectus innotescit ideoque post systematis proprii integrationem completam ipsa x per $x_1, x_2, \dots x_n$ absque Quadratura exprimitur, ponamus $X = 1$ simulque fieri

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \dots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = c,$$

designante c quantitatem constantem; quod inter alia evenit, si X_1, X_2 etc. variabilium x_1, x_2 etc. functiones sunt lineares. Dabitur systematis propositi Multiplicator per formulam

$$\frac{d \log M}{dx} + c = 0, \quad \text{unde} \quad M = e^{-cx}.$$

Hinc sequitur e (6.) sumendo logarithmos,

$$x = -\frac{1}{c} \log \left(\frac{1}{X_n} \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \right) + \text{Const.}$$

Cognitione igitur Multiplicatoris in hoc exemplo non reductionem aequationis differentialis ad Quadraturas sed Quadraturam lucramur.

Antecedentibus demonstratum est, *si aequationum differentialium (1.), in quibus X, X_1 etc. solarum x_1, x_2, ... x_n functiones sunt, detur Multiplicator et ipse variabili x vacans, duas postremas integrationes per Quadraturam absolvi; si Multiplicator variabili x afficiatur, ultimam aequationem integralem ipsam sine Quadratura obtineri.* Quae propositio sic amplificatur.

Ponamus functiones X_{m+1}, X_{m+2}, ... X_n vacuas esse a variabilibus x, x_1, ... x_m, simulque X, X_1, ... X_m nisi ab iisdem variabilibus vacuae sunt, certe satisfacere conditioni,

$$7.\quad \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\cdots+\frac{\partial X_m}{\partial x_m}=0.$$

Eo casu aequationes differentiales propositae (1.) sic tractabuntur, ut primum aequationum differentialium inter solas x_{m+1}, x_{m+2}, ... x_n locum habentium,

$$8.\quad dx_{m+1}:dx_{m+2}\ldots:dx_n = X_{m+1}:X_{m+2}\ldots:X_n,$$

quaerantur Integralia,

$$9.\quad f_1=\alpha_1,\quad f_2=\alpha_2,\quad \ldots\ldots\quad f_{n-m-1}=\alpha_{n-m-1},$$

eorumque ope exprimantur variabiles x_{m+1}, x_{m+2}, ... x_n per earum unam x_{m+1}; quibus factis superest ut integrentur aequationes differentiales inter ipsas x, x_1, ... x_{m+1} locum habentes,

$$10.\quad dx:dx_1\ldots:dx_{m+1}=X:X_1\ldots:X_{m+1}.$$

Per conditionem (7.) constat, aequationum differentialium propositarum (1.) Multiplicatorem, a variabilibus x, x_1, ... x_m vacuum, eundem esse aequationum differentialium (8.) Multiplicatorem, et vice versa harum Multiplicatorem ipsarum quoque aequationum differentialium (1.) Multiplicatorem esse. Designante enim M quantitatem a variabilibus x, x_1, ... x_m vacuam, sequitur e (7.),

$$\frac{\partial.MX}{\partial x}+\frac{\partial.MX_1}{\partial x_1}\cdots+\frac{\partial.MX_m}{\partial x_m}=0,$$

unde pro eiusmodi ipsius M valore conditio ut M aequationum (1.) sit Multiplicator,

$$\frac{\partial.MX}{\partial x}+\frac{\partial.MX_1}{\partial x_1}\cdots+\frac{\partial.MX_n}{\partial x_n}=0,$$

convenit cum conditione ut M aequationum (8.) Multiplicator sit,

$$\frac{\partial.MX_{m+1}}{\partial x_{m+1}}+\frac{\partial.MX_{m+2}}{\partial x_{m+2}}\cdots+\frac{\partial.MX_n}{\partial x_n}=0.$$

Aequationum differentialium (10.) *semper assignare licet Multiplicatorem.* Nam cum ipsarum x_{m+2}, x_{m+3}, ... x_n expressiones per x_{m+1} e (9.) petitae ab ipsis x, x_1, ... x_m vacuae sint, conditio (7.) valebit etiam post harum expressionum substitutionem. Qua substitutione cum X_{m+1} in solius x_{m+1} functionem abeat, valebit etiam aequatio (7.), si loco ipsarum X_i ponitur $\frac{X_i}{X_{m+1}}$. Unde sequitur, *aequationum differentialium* (10.) *Multiplicatorem esse* $\frac{1}{X_{m+1}}$. Qua de re *aequationum differentialium* (10.) *ultima integratio semper solis Quadraturis absolvitur.*

Si datur Multiplicator aequationum differentialium propositarum (1.), va-

riabilibus $x, x_1, \ldots x_m$ non affectus, idem erit aequationum (8.) Multiplicator, ideoque eo casu cum aequationum (8.) tum aequationum (10.) ultima integratio Quadraturis absolvitur. Iam vero sit aequationum differentialium propositarum (1.) datus Multiplicator M variabilibus $x, x_1, \ldots x_m$ affectus. Inventis aequationum differentialium (8.) Integralibus (9.), earum fit Multiplicator

$$N = \frac{1}{X_{m+1}} \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+2}} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_{m+3}} \cdots \frac{\partial f_{n-m-1}}{\partial x_n}$$

idemque ex antecedentibus fit Multiplicator aequationum differentialium propositarum (1.). Quarum igitur cognitis duobus Multiplicatoribus M et N, datur absque Quadratura Integrale

$$\frac{N}{M} = \frac{1}{MX_{m+1}} \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+2}} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_{m+3}} \cdots \frac{\partial f_{n-m-1}}{\partial x_n} = \text{Const.}$$

Quod substituendo ipsarum $x_{m+2}, x_{m+3}, \ldots x_n$ valores per x_{m+1} exhibitos in aequationum (10.) Integrale abit. Harum aequationum praeterea vidimus ultimam integrationem Quadraturis absolvi. Unde propositis aequationibus differentialibus,

$$dx : dx_1 \ldots : dx_n = X : X_1 \ldots : X_n,$$

in quibus functiones $X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots X_n$ variabilibus $x, x_1, \ldots x_m$ vacant simulque fit

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \cdots + \frac{\partial X_m}{\partial x_m} = 0,$$

si datur Multiplicator et ipse variabilibus $x, x_1, \ldots x_m$ vacans, duae integrationes per Quadraturas absolvuntur; si vero datus Multiplicator variabilibus $x, x_1, \ldots x_n$ afficitur, una aliqua aequatio integralis absque omni Quadratura constabit atque altera integratio Quadraturis efficietur.

Antecedentia exemplo esse possunt, ad aequationes differentiales integrandas e Multiplicatoris cognitione semper fructum aliquem percipi, etsi ultima integratio absque eius auxilio Quadraturis absolvi possit. Neque necessarium est ut in antecedentibus aequationes (4.) sint Integralia ipsarum aequationum differentialium (2.), vel aequationes (9.) sint Integralia ipsarum aequationum differentialium (8.). Nam secundum ea quae §. 12. tradidi, Constanti Arbitrariae post quamque novam integrationem accedenti valorem tribuere licet particularem quemcunque. Sufficit ut quaelibet aequatio $f_i =$ Const. sit Integrale aequationum differentialium quocunque modo transformatarum per aequationes integrales ante eam inventas,

$$f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad f_{i-1} = \alpha_{i-1},$$

in quibus ad dextram habentur quantitates constantes quaecunque particulares.

Caput tertium.

Theoria Multiplicatoris systematis aequationum differentialium ad varia exempla applicata.

De Multiplicatore systematis aequationum differentialium cuiuslibet ordinis.

§. 14.

Aequationum differentialium systema, quo altissima quaeque variabilium dependentium differentialia per differentialia inferiora ipsasque variabiles exprimuntur, constat in systema redire aequationum differentialium primi ordinis, si cuiusque variabilis dependentis differentialia altissimo inferiora ipsis variabilibus adscribantur. Designantibus enim x, y etc. variabilis independentis t functiones, proponantur inter t, x, y etc. aequationes differentiales,

$$1. \quad \frac{d^p x}{dt^p} = A, \quad \frac{d^q y}{dt^q} = B, \text{ etc.}$$

ipsaeque A, B etc. non altioribus afficiantur differentialibus quam $(p-1)^{\text{to}}$ ipsius x, $(q-1)^{\text{to}}$ ipsius y etc. Patet, habendo pro novis variabilibus dependentibus differentialia, quae *Lagrangiano* more per indices denoto,

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad x'' = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \ldots \quad x^{(p-1)} = \frac{d^{p-1} x}{dt^{p-1}},$$

$$y' = \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \ldots \quad y^{(q-1)} = \frac{d^{q-1} y}{dt^{q-1}}, \text{ etc.},$$

aequationibus differentialibus (1.) has alias substitui posse *primi* ordinis:

$$2. \quad \left\{ \begin{array}{l} dt : dx : dx' \ldots : dx^{(p-2)} : dx^{(p-1)} \\ \quad : dy : dy' \ldots : dy^{(q-2)} : dy^{(q-1)} \text{ etc.} \\ = 1 : x' : x'' \ldots : x^{(p-1)} : A \\ \quad : y' : y'' \ldots : y^{(q-1)} : B \text{ etc.} \end{array} \right.$$

Quibus in aequationibus variabilium numerus summam ordinum altissimorum differentialium in (1.) unitate superat.

Multiplicator aequationum differentialium primi ordinis (2.), cum quibus aequationes differentiales (1.) conveniunt, etiam a me in sequentibus appellabitur

aequationum (1.) Multiplicator. Unde ut omnia theoremata de Multiplicatore aequationum differentialium primi ordinis in duobus Capitibus praecedentibus in medium prolata ad Multiplicatores aequationum differentialium cuiuslibet ordinis (1.) applicentur, sufficit ut pro aequationibus ibi propositis,

$$3.\quad dx : dx_1 : dx_2 \dots : dx_n \\ = X : X_1 : X_2 \dots : X_n,$$

sumantur aequationes (2.).

Si aequationes differentiales primi ordinis (2.) et (3.) inter se comparamus, videmus in illis specialitatem quandam formae locum habere, videlicet quantitates primis differentialibus proportionales, quae generaliter variabilium functiones sunt, maximam partem in ipsas abire variabiles, neque vero in eas quarum differentialibus proportionales ponuntur. Quo habitu speciali fit ut aequationum (2.) Multiplicator, quem aequationum (1.) quoque Multiplicatorem voco, definiatur formula quae, tantopere licet aucto in (2.) variabilium numero, non pluribus constat terminis, quam si ipsae primi ordinis fuissent aequationes differentiales propositae (1.). Consideremus enim formulam ad definiendum aequationum (3.) Multiplicatorem propositam §. 7. (4.),

$$(4.)\quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \dots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = -X\frac{d \log M}{dx}.$$

Si pro aequationibus (3.) sumimus aequationes (2.) fit $x = t$, $X = 1$; porro variabilibus x_1, x_2 etc. substituendae sunt

$$x,\ x',\ x'',\ \dots\ x^{(p-2)},\ x^{(p-1)},$$
$$y,\ y',\ y'',\ \dots\ y^{(q-2)},\ y^{(q-1)},\ \text{etc.};$$

functionibus denique X_1, X_2 etc. substituendae sunt quantitates

$$x',\ x'',\ x''',\ \dots\ x^{(p-1)},\ A,$$
$$y',\ y'',\ y''',\ \dots\ y^{(q-1)},\ B,\ \text{etc.}$$

Iam in (4.), quoties est X_i una e variabilibus x, x_1, x_2 etc., ab ipsa x_i diversa, evanescit terminus $\frac{\partial X_i}{\partial x_i}$, uti generaliter fit si functio X_i ipsam x_i non implicat. Unde sumendo pro (3.) aequationes (2.), abit aggregatum (4.) in hanc expressionem simplicem,

$$5.\quad \frac{\partial A}{\partial x^{(p-1)}} + \frac{\partial B}{\partial y^{(q-1)}} + \text{etc.} = -\frac{d \log M}{dt}.$$

Hac formula Multiplicator M definitur systematis aequationum differentialium cuiuslibet ordinis (1.).

Sequitur e (5.), quoties simul ipsum A a differentiali $(p-1)^{\text{to}}$ ipsius x, ipsum B a differentiali $(q-1)^{\text{to}}$ ipsius y etc. vacuum sit, sive generalius, *quoties aggregatum*

$$\frac{\partial A}{\partial x^{(p-1)}} + \frac{\partial B}{\partial y^{(q-1)}} \text{ etc.}$$

identice evanescat, statui posse $M = 1$. Si aggregatum (5.) non identice evanescit, ad indagandum Multiplicatorem circumspiciendum erit differentiale completum, cui idem aggregatum sua sponte vel etiam per aequationes differentiales propositas aequetur.

Principium ultimi Multiplicatoris systemati aequationum differentialium cuiuslibet ordinis applicatum.

§. 15.

Aequationum differentialium propositarum (1.) §. pr. Integralibus praeter unum omnibus inventis, quantitates

$$(A.) \quad \begin{cases} t, \; x, \; x', \; \ldots\ldots \; x^{(p-1)}, \\ \quad\; y, \; y', \; \ldots\ldots \; y^{(q-1)} \text{ etc.} \end{cases}$$

omnes exprimere licet per duas u et v, pro quibus sumere licet binas e quantitatibus (A.) vel earum functiones quaslibet. Differentialia $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$, substituendo differentialibus $x^{(p)}$, $y^{(q)}$ etc. si opus est valores A, B etc., et ipsa aequantur quantitatum t, x, x' etc. functionibus. Quae functiones, Integralium inventorum ope per u et v expressae, si denotantur per

$$U = \frac{du}{dt}, \qquad V = \frac{dv}{dt},$$

dabitur inter u et v aequatio differentialis primi ordinis, ultima quae integranda restat,

$$1. \qquad V du - U dv = 0.$$

Secundum ea quae §. 11. tradidi, cognito aequationum differentialium propositarum Multiplicatore M erui potest factor N qui eius ultimae aequationis differentialis (1.) laevam partem efficiat differentiale completum, quem *ultimum Multiplicatorem* appello. *Habendo enim, quod per Integralia inventa licet, quantitates (A.) pro functionibus ipsarum u et v Constantiumque Arbitrariarum quas Integralia implicant, earumque functionum formando Determinans Δ, fit ultimus Multiplicator* $N = \Delta . M$.

Principium ultimi Multiplicatoris, quod propositione antecedente continetur, etiam sic concipi potest,

diviso ultimae aequationis differentialis (1.) *Multiplicatore per Determinans Δ, conditionem Eulerianam pro Multiplicatore valentem transformari in aliam conditionem ab Integralibus reductioni adhibitis independentem, cui formulandae sufficiant solae aequationes differentiales propositae.*

Videlicet aequatio conditionalis, cui aequationis (1.) Multiplicator N satisfacere debet, fit

$$\frac{\partial . NU}{\partial u} + \frac{\partial . NV}{\partial v} = 0.$$

Quae ponendo

$$M = \frac{N}{\Delta}$$

et substituendo Constantibus Arbitrariis functiones quantitatum (A.) aequivalentes transformabitur in hanc,

$$\frac{d \log M}{dt} + \frac{\partial A}{\partial x^{(p-1)}} + \frac{\partial B}{\partial y^{(q-1)}} \text{ etc.} = 0,$$

cui formandae sufficiunt aequationes differentiales propositae (1.).

Sint $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$ etc. aequationes integrales reductioni adhibitae binaeque aequationes quibus u et v ab ipsis t, x, x' etc. pendent, sive etiam aliae quaecunque aequationes cum illis aequivalentes: constat e Determinantium functionalium proprietatibus, *aequari Δ fractioni, cuius denominator sit functionum Π_1, Π_2 etc. Determinans formatum quantitatum (A.) respectu, numerator autem earundem functionum Determinans, quantitatum u et v Constantiumque Arbitrariarum respectu formatum.* Si pro u et v ipsae sumuntur t et x, pro aequationibus $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$ etc. solae sumendae sunt aequationes integrales simulque t et x in binis Determinantibus formandis de numero variabilium tollendae sunt. Porro aequatio (1.) in hanc abit,

$$dx - V dt = 0,$$

ubi V est ipsius $\frac{dx}{dt}$ valor, Integralium inventorum ope per t et x expressus. Si aequationes $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$ etc. inventae sunt per integrationem successivam, ita ut in quaque aequatione insequente, in qua nova accedit Constans Arbitraria, simul unius variabilis differentiale altissimum ad ordinem proxime inferiorem sit depressum, alterutrum Determinans in unicum terminum abit. Sic proposita unica aequatione differentiali n^{ti} ordinis inter t et x,

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}\right),$$

integratione successiva inventae sint aequationes,

$$2.\quad \begin{cases} \dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = f_1\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}, \ldots \dfrac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}, \alpha_1\right), \\ \dfrac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} = f_2\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}, \ldots \dfrac{d^{n-3}x}{dt^{n-3}}, \alpha_1, \alpha_2\right), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{dx}{dt} = f_{n-1}(t, x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}), \end{cases}$$

in quibus α_1, α_2, ... α_{n-1} sunt Constantes Arbitrariae: simpliciter erit

$$\Delta = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \alpha_{n-1}},$$

cum alterum Determinans in ipsam unitatem abeat. Si functio f ab ipso $\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$ vacuum est, fit aequationis differentialis propositae Multiplicator $= 1$. Quo igitur casu hoc eruitur ultimum Integrale:

$$\int \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \alpha_{n-1}} \{dx - f_{n-1}(t, x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1})\, dt\} = \text{Const.},$$

ubi quantitas sub integrationis signo, per t et x expressa, fit differentiale completum. Ut per solas t et x exprimatur valor producti

$$\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \alpha_{n-1}},$$

sufficit ut in eo ***successive*** substituantur differentialium $\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}$, $\frac{d^{n-3}x}{dt^{n-3}}$, ... $\frac{dx}{dt}$ valores f_2, f_3, ... f_{n-1}.

Formula symbolica qua Multiplicator systematis aequationum differentialium impliciti definiri potest.

§. 16.

Aequationes differentiales, e quibus petantur altissimorum differentialium valores,

$$1.\quad x^{(p)} = A, \quad y^{(q)} = B, \quad \text{etc.}$$

ponamus forma dari implicita,

$$2.\quad \varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \text{etc.}$$

E quibus aequationibus ut eruantur valores differentialium partialium

$$\frac{\partial A}{\partial x^{(p-1)}}, \quad \frac{\partial B}{\partial y^{(q-1)}}, \quad \text{etc.},$$

quarum summa aequat ipsum $-\frac{d \log M}{dt}$, statuo

$$3. \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{(p)}} = a, & \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(q)}} = a_1, \quad \text{etc.,} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x^{(p)}} = b, & \frac{\partial \psi}{\partial y^{(q)}} = b_1, \quad \text{etc. etc.,} \end{cases}$$

nec non

$$4. \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{(p-1)}} = \alpha, & \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(q-1)}} = \alpha_1, \quad \text{etc.,} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x^{(p-1)}} = \beta, & \frac{\partial \psi}{\partial y^{(q-1)}} = \beta_1, \quad \text{etc. etc.,} \end{cases}$$

formoque aequationes

$$5. \quad \begin{cases} au + a_1 u_1 \text{ etc. } + \alpha v + \alpha_1 v_1 \text{ etc. } = 0, \\ bu + b_1 u_1 \text{ etc. } + \beta v + \beta_1 v_1 \text{ etc. } = 0. \end{cases}$$

Resolutione aequationum (5.) si determinantur u, u_1 etc. ut functiones lineares quantitatum v, v_1 etc., erit quod ex elementis calculi differentialis sequitur,

$$6. \quad \frac{\partial A}{\partial x^{(p-1)}} = \frac{\partial u}{\partial v}, \quad \frac{\partial B}{\partial y^{(q-1)}} = \frac{\partial u_1}{\partial v_1}, \quad \text{etc.}$$

unde prodit

$$7. \quad d \log M = -\left\{ \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \text{ etc.} \right\} dt.$$

Iam e formulis, quas de aequationum linearium resolutione et Determinantium proprietatibus tradidi, sequitur, *si in aequationibus linearibus* (5.) *ponatur*

$$8. \quad \begin{cases} \alpha\, dt = \delta a, & \alpha_1\, dt = \delta a_1, \quad \text{etc.,} \\ \beta\, dt = \delta b, & \beta_1\, dt = \delta b_1, \quad \text{etc. etc.,} \end{cases}$$

fieri

$$9. \quad -\left\{ \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial v_2} \text{ etc.} \right\} dt = \delta \log \Sigma \pm a b_1 \ldots .$$

Unde formula, qua Multiplicator M definitur, proponi potest hac forma *symbolica,*

$$10. \quad d \log M = \delta \log \Sigma \pm a b_1 \ldots .$$

Cui formulae ea inest significatio ut variando per regulas notas ipsum $\lg \Sigma \pm a b_1 \ldots$ atque elementorum variationibus singulis substituendo valores (8.), obtineatur expressio ipsi $d \log M$ aequalis.

Si statuitur

$$11. \quad \begin{cases} \alpha\, dt - \lambda\, da = \Delta a, & \alpha_1\, dt - \lambda\, da_1 = \Delta a_1, \quad \text{etc.,} \\ \beta\, dt - \lambda\, db = \Delta b, & \beta_1\, dt - \lambda\, db_1 = \Delta b_1, \quad \text{etc. etc.,} \end{cases}$$

characteristicae δ substituendum est $\lambda d + \Delta$, unde abit (10.) in hanc formulam,

$$12. \quad d \log M = \lambda\, d. \log \Sigma \pm a b_1 \ldots + \Delta. \log \Sigma \pm a b_1 \ldots,$$

sive, designante λ Constantem,

$$13. \quad d \log \frac{M}{\{\Sigma \pm a b_1 \ldots\}^\lambda} = \Delta \log \Sigma \pm a b_1 \ldots .$$

Quae formula cum commodo adhibetur, quoties variationum Δa, Δb etc. valores valoribus variationum δa, δb etc. simpliciores sunt.

Sint n aequationes differentiales inter t et variabiles dependentes x_1, $x_2, \ldots\ldots x_n$ propositae,

$$14. \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad \varphi_n = 0,$$

sintque altissima differentialia in iis obvenientia et quorum valores ex iis petere liceat,

$$x_1^{(m_1)}, \quad x_2^{(m_2)}, \quad \ldots\ldots \quad x_n^{(m_n)}.$$

Statuendo secundum antecedentia,

$$15. \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k)}} = a_k^{(i)}, \\ \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k-1)}} dt = \delta a_k^{(i)} = \lambda\, d a_k^{(i)} + \Delta a_k^{(i)}, \end{cases}$$

fit

$$16. \quad \begin{cases} d \log M = \delta \log \Sigma \pm a_1' a_2'' \ldots\ldots a_n^{(n)}, \\ d \log \dfrac{M}{\{\Sigma \pm a_1' a_2'' \ldots\ldots a_n^{(n)}\}^\lambda} = \Delta \log \Sigma \pm a_1' a_2'' \ldots\ldots a_n^{(n)}. \end{cases}$$

Accuratius examinemus casum quo fit

$$17. \quad a_k^{(i)} = a_i^{(k)},$$

unde elementa $a_k^{(i)}$ ad numerum $\frac{n(n+1)}{2}$ reducere licet. Differentialia partialia uncis includendo aut non includendo, prout ista reductio facta est aut non facta est, habetur, si i et k inter se diversi sunt,

$$\left(\frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}\right) = \frac{\partial R}{\partial a_i^{(k)}} + \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}, \quad \left(\frac{\partial R}{\partial a_i^{(i)}}\right) = \frac{\partial R}{\partial a_i^{(i)}}.$$

Designante R Determinans

$$R = \Sigma \pm a_1' a_2'' \ldots\ldots a_n^{(n)},$$

constat per notas Determinantium proprietates, si aequationes (17.) locum habeant, etiam fieri

$$18. \quad \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}} = \frac{\partial R}{\partial a_i^{(k)}},$$

unde

$$19. \quad \left(\frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}\right) = 2 \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}.$$

Cum in symbolis adhibitis variationes $\delta a_k^{(i)}$ vel $\Delta a_k^{(i)}$ ab ipsis $a_k^{(i)}$ independentes sint, ex aequationibus (17.) non etiam variationum aequalitas sequitur, unde in formanda Determinantis variatione pro diversis haberi debent $\delta a_k^{(i)}$ et $\delta a_i^{(k)}$ vel

$\varDelta a_k^{(i)}$ et $\varDelta a_i^{(k)}$, ideoque post institutam ipsius R variationem demum aequationum (17.) usus faciendus est. At observandum est, in Determinantis variatione binorum elementorum $a_k^{(i)}$ et $a_i^{(k)}$ variationum tantum summam obvenire, cum per (18.) et (19.) habeatur,

$$\frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}\delta a_k^{(i)}+\frac{\partial R}{\partial a_i^{(k)}}\delta a_i^{(k)} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}\right)\{\delta a_k^{(i)}+\delta a_i^{(k)}\}.$$

Quae formula docet, in Determinante R etiam ante eius variationem instituendam poni posse $a_k^{(i)}=a_i^{(k)}$, modo ipsi $\delta a_k^{(i)}=\delta a_i^{(k)}$ tribuatur valor $\frac{1}{2}\{\delta a_k^{(i)}+\delta a_i^{(k)}\}$. Quoties igitur aequationes (17.) locum habent sive fit

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k)}} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i^{(m_i)}},$$

valebunt adhuc aequationes (16.), etsi Determinantis elementa ad numerum $\frac{n.n+1}{2}$ inter se inaequalium revocentur, dummodo statuatur

$$20.\qquad \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k-1)}}+\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i^{(m_i-1)}}\right\}.dt = \delta a_k^{(i)} = \lambda\, d a_k^{(i)}+\varDelta a_k^{(i)}.$$

Quod si igitur aequationes differentiales propositae (14.) *ita comparatae sunt, ut habeatur*

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k)}} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i^{(m_i)}},$$

$$\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k-1)}}+\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i^{(m_i-1)}}\right\}dt = \lambda\, d.\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k^{(m_k)}},$$

designante λ Constantem, evanescet variatio $\varDelta$ dabiturque Multiplicator

$$M = \left\{\Sigma\pm\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1^{(m_1)}}.\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2^{(m_2)}}\dots\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n^{(m_n)}}\right\}^{\lambda}.$$

Cuius propositionis applicatio infra dabitur.

Observo ipsum R pro Determinante functionali haberi posse; erit enim R functionum $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ Determinans, si sola altissima differentialia $x_1^{(m_1)}$, $x_2^{(m_2)}$, etc. pro variabilibus sumuntur quarum respectu Determinans formetur. Quarum variabilium valores cum supponamus ex aequationibus (14.) peti posse, non fieri potest ut Determinans R identice evanescat; alioquin enim functiones φ_1, φ_2, etc. earum variabilium respectu non a se invicem independentes forent. V. *Comm. de Det. Funct.* §§. 3 sqq. Si vero per ipsas (14.) evanescit Determinans R, id indicio est, duo valorum variabilium systemata inter se aequalia evadere, unde aequationum praeparatione quadam opus est qua radicibus duplicibus liberentur.

Iam praecepta generalia variis applicabo exemplis.

De Multiplicatore systematis aequationum differentialium linearium.

§. 17.

Proponantur aequationes differentiales lineares primi ordinis,

$$1.\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = A'_1 x_1 + A'_2 x_2 \ldots + A'_n x_n = X_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = A''_1 x_1 + A''_2 x_2 \ldots + A''_n x_n = X_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = A^{(n)}_1 x_1 + A^{(n)}_2 x_2 \ldots + A^{(n)}_n x_n = X_n, \end{cases}$$

quarum Coëfficientes $A^{(i)}_k$ solius t functiones designant. Systematis aequationum (1.) Multiplicator M definitur formula differentiali,

$$\frac{d \log M}{dt} = -\left\{\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\}$$
$$= -\{A'_1 + A''_2 \ldots + A^{(n)}_n\},$$

unde

$$2.\quad M = e^{-\int\{A'_1 + A''_2 \ldots + A^{(n)}_n\}\,dt}.$$

Hac formula cognito M, sequitur e §. 15., *si aequationes differentiales lineares* (1.) *per quascunque* $n-1$ *aequationes integrales,* $n-1$ *Constantibus Arbitrariis affectas, ad unicam aequationem differentialem primi ordinis inter duas variabiles reducantur, eius quoque ultimae aequationis integrationem per Quadraturas absolvi posse.* Quod hactenus non constabat nisi aequationes quoque integrales reductioni adhibitae lineares erant.

Aequationibus (1.) alterum systema aequationum differentialium linearium coniugatum est,

$$3.\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -\{A'_1 y_1 + A''_1 y_2 \ldots + A^{(n)}_1 y_n\}, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -\{A'_2 y_1 + A''_2 y_2 \ldots + A^{(n)}_2 y_n\}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = -\{A'_n y_1 + A''_n y_2 \ldots + A^{(n)}_n y_n\}. \end{cases}$$

Aequationibus (1.) respective per $y_1, y_2, \ldots y_n$ atque aequationibus (3.) respective per $x_1, x_2, \ldots x_n$ multiplicatis omniumque aequationum provenientium additione facta, termini ad dextram positi omnino abeunt, expressio ad laevam autem fit differentiale aggregati $x_1 y_1 + x_2 y_2 \ldots + x_n y_n$; unde integratione facta eruitur,

$$4.\quad x_1 y_1 + x_2 y_2 \ldots + x_n y_n = \text{Const.}$$

Quot habentur aequationum (3.) solutiones particulares, tot formula (4.) suppeditantur aequationum (1.) Integralia, et quot habentur solutiones particulares aequationum (1.), tot eadem formula suppeditantur aequationum (3.) Integralia. Aequationum (3.) Multiplicator invenitur

$$N = e^{\int\{A'_1+A''_2\dots\dots+A^{(n)}_n\}\,dt},$$

unde ***binorum systematum aequationum differentialium linearium inter se coniugatorum Multiplicatores M et N valoribus reciprocis gaudent.***

Functionum $y_1, y_2, \dots\dots y_n$ denotemus n systemata a se independentia per

$$y^{(k)}_1,\ y^{(k)}_2,\ \dots\dots\ y^{(k)}_n,$$

tribuendo successive indici superiori k valores $1, 2, \dots\dots n$. Unde aequationum (1.) proveniunt n Integralia huiusmodi,

$$f_k = x_1 y^{(k)}_1 + x_2 y^{(k)}_2 \dots\dots + x_n y^{(k)}_n = \alpha_k,$$

designantibus $\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots \alpha_n$ Constantes Arbitrarias. Secundum Multiplicatoris definitionem, initio huius Commentationis adhibitam, fit

$$5.\qquad M = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\cdot\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$
$$= \Sigma \pm y'_1 y''_2 \dots\dots y^{(n)}_n.$$

Unde obtinetur formula,

$$6.\qquad \Sigma \pm y'_1 y''_2 \dots\dots y^{(n)}_n = e^{-\int\{A'_1+A''_2\dots\dots+A^{(n)}_n\}\,dt}.$$

Quae sic directe demonstratur.

Designante enim R Determinans ad laevam, fit

$$dR = \Sigma\Sigma \frac{\partial R}{\partial y^{(k)}_i}\, dy^{(k)}_i$$
$$= -\Sigma\Sigma \frac{\partial R}{\partial y^{(k)}_i}\{A'_i y^{(k)}_1 + A''_i y^{(k)}_2 \dots\dots + A^{(n)}_i y^{(k)}_n\}\, dt,$$

extensa duplici summatione ad omnes indicum i et k valores $1, 2, \dots\dots n$. Summando primum indicis k respectu, evanescunt termini in A'_i, A''_i etc. ducti praeter eos qui in $A^{(i)}_i$ ducuntur,

$$-A^{(i)}_i\left\{\frac{\partial R}{\partial y'_i}\, y'_i + \frac{\partial R}{\partial y''_i}\, y''_i \dots\dots + \frac{\partial R}{\partial y^{(n)}_i}\, y^{(n)}_i\right\} dt$$
$$= -A^{(i)}_i \,.\, R\, dt,$$

sicuti notis Determinantium proprietatibus patet. Hinc altera summatio indicis i respectu instituta suggerit,

$$dR = -\{A'_1 + A''_2 \dots\dots A^{(n)}_n\}\, dt,$$

cuius aequationis integratione formula (6.) obtinetur.

Si aequationes differentiales lineares proponuntur quae altiora quam prima differentialia involvunt, secundum §. 14. (5.) statim earum quoque Multiplicator obtinetur. Brevitatis causa duas tantum consideremus aequationes,

$$7.\quad \begin{cases} \dfrac{d^p x}{dt^p} = Ax + A_1\dfrac{dx}{dt}\ldots\ldots + A_{p-1}\dfrac{d^{p-1}x}{dt^{p-1}} \\ \qquad + Bx + B_1\dfrac{dy}{dt}\ldots\ldots + B_{q-1}\dfrac{d^{q-1}y}{dt^{q-1}}, \\ \dfrac{d^q x}{dt^q} = A'x + A'_1\dfrac{dx}{dt}\ldots\ldots + A'_{p-1}\dfrac{d^{p-1}x}{dt^{p-1}} \\ \qquad + B'y + B'_1\dfrac{dy}{dt}\ldots\ldots + B'_{q-1}\dfrac{d^{q-1}y}{dt^{q-1}}, \end{cases}$$

in quibus Coëfficientes A, A_1 etc. solius t functiones designant; fit earum aequationum Multiplicator,

$$M = e^{-\int\{A_{p-1}+B'_{q-1}\}dt}.$$

Ponamus, addendo aequationes (7.) respective per λ et μ multiplicatas produci aequationem per se integrabilem: secundum conditiones integrabilitatis fieri debet,

$$8.\quad \begin{cases} \dfrac{d^p\lambda}{dt^p} = -\dfrac{d^{p-1}(A_{p-1}\lambda + A'_{p-1}\mu)}{dt^{p-1}} + \dfrac{d^{p-2}(A_{p-2}\lambda + A'_{p-2}\mu)}{dt^{p-2}}\ldots\ldots \pm (A\lambda + A'\mu), \\ \dfrac{d^q\mu}{dt^q} = -\dfrac{d^{q-1}(B_{q-1}\lambda + B'_{q-1}\mu)}{dt^{q-1}} + \dfrac{d^{q-2}(B_{q-2}\lambda + B'_{q-2}\mu)}{dt^{q-2}}\ldots\ldots \pm (B\lambda + B'\mu), \end{cases}$$

quod est aequationum differentialium systema proposito coniugatum. Quod, si p et q inter se inaequales sunt, non ea gaudet forma qua §. 14. supposui aequationes differentiales exhibitas esse, videlicet ut altissima differentialia inveniantur per inferiora ipsasque variabiles expressa. Si $p > q$, ut ea forma obtineatur, aequatio posterior $p-q-1$ vicibus iteratis differentianda est et aequationum ope provenientium eliminanda sunt e priore ipsius μ differentialia superiora $(q-1)^{\text{to}}$. Hac eliminatione priorem aequationem novi non ingrediuntur termini $(p-1)^{\text{to}}$ ipsius λ differentiali affecti, unde in ea immutatus manet unicus terminus differentiale $\dfrac{d^{p-1}\lambda}{dt^{p-1}}$ implicans,

$$-A_{p-1}\frac{d^{p-1}\lambda}{dt^{p-1}}.$$

Porro in aequatione posteriore unicus extat terminus ipso $\dfrac{d^{q-1}\mu}{dt^{q-1}}$ affectus,

$$-B'_{q-1}\frac{d^{q-1}\mu}{dt^{q-1}}.$$

Unde secundum §. 14. aequationum (8.), dicto modo praeparatarum, eruitur Multiplicator

$$N = e^{\int \{A_{p-1} + B'_{q-1}\} dt}.$$

Videmus igitur, bina quoque systemata coniugata (7.) et (8.) Multiplicatoribus reciprocis gaudere. Similiter pro pluribus aequationibus demonstratur, in systemate coniugato per eliminationes, ad formam normalem obtinendam instituendas, hos non mutari terminos qui valorem ipsius $\frac{d \log N}{dt}$ afficiunt, unde facile sequitur, binorum systematum coniugatorum Multiplicatores semper evadere inter se reciprocos.

Observo, formam normalem aequationibus (8.) conciliari posse sine differentiationibus et eliminationibus, cum earum loco hoc pateat substitui posse systema aequationum differentialium linearium primi ordinis inter $p+q+1$ variabiles,

$$9. \quad \begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = -\{A_{p-1}\lambda + A'_{p-1}\mu + \lambda_1\}, \\ \frac{d\lambda_1}{dt} = -\{A_{p-2}\lambda + A'_{p-2}\mu + \lambda_2\}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\lambda_{p-1}}{dt} = -\{A\lambda + A'\mu\}, \\ \frac{d\mu}{dt} = -\{B_{q-1}\lambda + B'_{q-1}\mu + \mu_1\}, \\ \frac{d\mu_1}{dt} = -\{B_{q-2}\lambda + B'_{q-2}\mu + \mu_2\}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\mu_{q-1}}{dt} = -\{B\lambda + B'\mu\}. \end{cases}$$

Aequationes (9.) eodem gaudent Multiplicatore N supra invento. Quod adnotari meretur. Nam valor supra inventus N Multiplicatori aequationum (8.) conveniebat supponendo eas locum tenere aequationum differentialium primi ordinis, in quibus praeter t, λ, μ pro variabilibus habeantur

$$(A.) \quad \begin{cases} \frac{d\lambda}{dt}, \ \frac{d^2\lambda}{dt^2}, \ \ldots\ldots \ \frac{d^{p-1}\lambda}{dt^{p-1}}, \\ \frac{d\mu}{dt}, \ \frac{d^2\mu}{dt^2}, \ \ldots\ldots \ \frac{d^{q-1}\mu}{dt^{q-1}}; \end{cases}$$

dum aequationes (9.) sunt inter t, λ, μ aliasque variabiles

$$(B.) \quad \begin{cases} \lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots\ldots \ \lambda_{p-1}, \\ \mu_1, \ \mu_2, \ \ldots\ldots \ \mu_{q-1}. \end{cases}$$

Aliis autem variabilibus introductis vidimus in secundo Capite mutari Multiplicatorem, videlicet eum dividi per novarum variabilium Determinans, ipsarum formatum variabilium respectu quarum loco introductae sunt. Unde, cum utrique aequationum systemati *idem* conveniat Multiplicator N, sequitur, si quantitates $(B.)$ per t, λ, μ et quantitates $(A.)$ exprimantur, Determinans quantitatum $(B.)$, ipsarum $(A.)$ respectu formatum, aequari Constanti, ac reapse aequale invenitur unitati.

Aequationes differentiales secundi ordinis quarum assignare licet Multiplicatorem. Exempla *Euleriana*.

§. 18.

Paullo immorabor applicationi theoriae novi Multiplicatoris ad aequationes differentiales secundi ordinis inter duas variabiles, qui est casus simplicissimus post aequationes differentiales primi ordinis, ad quas *Eulerianus* Multiplicator refertur. Ac primum per theoremata §§. 14, 15 tradita patet,

„*si proponatur aequatio* $\frac{d^2y}{dx^2}+A\frac{dy}{dx}+B=0$, *in qua* A *solius* x, B *utriusque* x *et* y *functiones quaecunque sunt, atque integratione prima eruatur* $\frac{dy}{dx}=u$, *designante* u *variabilium* x *et* y *et Constantis Arbitrariae* α *functionem, fore alterum Integrale,*

$$\int e^{\int A\,dx}.\frac{\partial u}{\partial \alpha}(dy-u\,dx) = Const."$$

Quantitatem sub maiore integrationis signo esse differentiale completum, sic verificari potest. Nam ut aequatio differentialis proposita proveniat differentiatione aequationis $\frac{dy}{dx}=u$, locum habere debet aequatio *identica*,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}+Au+B = 0.$$

Qua ipsius α respectu differentiata et per $e^{\int A\,dx}$ multiplicata prodit,

$$\frac{\partial . e^{\int A\,dx}\frac{\partial u}{\partial \alpha}}{\partial x}+\frac{\partial . e^{\int A\,dx}u\frac{\partial u}{\partial \alpha}}{\partial y} = 0,$$

quae est conditio requisita, ut quantitas

$$e^{\int A\,dx}\frac{\partial u}{\partial \alpha}(dy-u\,dx)$$

differentiale completum sit.

Generalius e §§. 14, 15 sequitur, *si proponatur aequatio,*

$$1.\quad \frac{d^2y}{dx^2}+\tfrac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{dy}{dx}+B=0,$$

in qua et φ et B variabilium x et y functiones quaecunque sunt, atque integratione prima inventum sit $\frac{dy}{dx}=u$, designante u variabilium x et y et Constantis Arbitrariae α functionem, fieri aequationem inter x et y quaesitam,

$$2.\quad \int e^{\varphi}\frac{\partial u}{\partial\alpha}(dy-u\,dx)=\text{Const.}$$

Aequationis (1.) tractavit *Eulerus* specimina quibus ei integratio prima successit (Cf. Calc. Integr. Vol. I. Sect. I. Cap. VI. pgg. 162 sqq.). At aequationes differentiales primi ordinis, ad quas ea ratione pervenit, tanta irrationalitate erant implicatae, ut de integratione directa desperans alia artificia circumspexerit. Atque missum facto Integrali invento contigit ei, aequationes differentiales secundi ordinis propositas differentiando alias deducere lineares, Coëfficientibus constantibus affectas, quarum nota integratio propositarum quoque ei suppeditavit integrationem completam. At per antecedentem formulam (2.) illarum aequationum differentialium primi ordinis quamvis complicatarum assignare licet Multiplicatores. Adiungam ipsam variabilium separationem, qua elucescat, revera adiectis illis Multiplicatoribus aequationes sponte integrabiles fore.

Exempla *Euleriana* forma paullo generaliori exhibebo, quod sine calculi complicatione fieri potest.

Exemplum I.

$$y^2\frac{d^2y}{dx^2}+y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+by-cx=0.$$

(b et c Constantes.)

Secundum *Eulerum* aequationis propositae fit Integrale primum, quod si placet differentiando comprobare licet,

$$y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+bxy^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(by-3cx)yy\frac{dy}{dx}$$
$$+cy^3+b^2y^2x-2bcyx^2+c^2x^3=\alpha,$$

designante α Constantem Arbitrariam. Cuius aequationis resolutione eruatur

$$y\frac{dy}{dx}=yu=v,$$

designante v radicem aequationis cubicae

$$3.\quad v^3+bxv^2+y(by-3cx)v$$
$$+cy^3+b^2y^2x-2bcyx^2+c^2x^3=\alpha.$$

Comparando aequationem differentialem propositam cum (1.) fit

$$\varphi = 2\log y, \qquad e^{\varphi} = y^2,$$

unde secundum (2.) invenitur alterum Integrale

$$\int y^2 \frac{\partial u}{\partial \alpha}(dy - u\,dx) = \int \frac{\partial v}{\partial \alpha}(y\,dy - v\,dx) = \text{Const.}$$

Fit autem e (3.)

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{1}{3vv + 2bxv + y(by - 3cx)}.$$

Quem aequationis $y\,dy - v\,dx = 0$ Multiplicatorem esse, propter ipsius v irrationalitatem non facile cognoscitur, et minus adhuc separatio variabilium in promtu est. Quam sic assequor.

Aequationem (3.) bene vidit *Eulerus* hac ratione exhiberi posse,

$$4. \qquad f.f'.f'' = \alpha,$$

posito

$$5. \qquad \begin{cases} f = v + \lambda y + \frac{c}{\lambda} x, \\ f' = v + \lambda' y + \frac{c}{\lambda'} x, \\ f'' = v + \lambda'' y + \frac{c}{\lambda''} x, \end{cases}$$

designantibus λ, λ', λ'' radices diversas aequationis cubicae,

$$6. \qquad \lambda^3 + b\lambda - c = 0,$$

unde $\lambda + \lambda' + \lambda'' = 0$, $\lambda\lambda'\lambda'' = c$. Ex aequationibus (4.) et (5.) sequitur

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f'}{\partial \alpha} = \frac{\partial f''}{\partial \alpha} = \frac{\partial v}{\partial \alpha}$$
$$= \frac{1}{f'f'' + f''f + ff'},$$

unde expressio

$$\frac{y\,dy - v\,dx}{f'f'' + f''f + ff'}$$

fieri debet differentiale completum. Invenitur autem e (5.):

$$d(f' - f'') = (\lambda' - \lambda'')(dy - \lambda\,dx),$$
$$d(f'' - f) = (\lambda'' - \lambda)(dy - \lambda' dx),$$
$$d(f - f') = (\lambda - \lambda')(dy - \lambda'' dx),$$
$$\lambda f.d(f' - f'') + \lambda' f'.d(f'' - f) + \lambda'' f''.d(f - f')$$
$$= A.(y\,dy - v\,dx),$$

siquidem ponitur

$$A = \lambda^2(\lambda' - \lambda'') + \lambda'^2(\lambda'' - \lambda) + \lambda''^2(\lambda - \lambda')$$
$$= (\lambda - \lambda')(\lambda - \lambda'')(\lambda' - \lambda'') = 0,$$

atque adnotatur fieri

$$\lambda^3(\lambda'-\lambda'')+\lambda'^3(\lambda''-\lambda)+\lambda''^3(\lambda-\lambda')$$
$$= A(\lambda+\lambda'+\lambda'') = 0.$$

Hinc substitutendo $\lambda''=-(\lambda+\lambda')$ fit

$$A(y\,dy-v\,dx) = \lambda\{(f+f'')df'-d.ff''\}$$
$$-\lambda'\{(f'+f'')df-d.f'f''\},$$

unde denuo substituendo, quod e (4.) sequitur,

$$d.ff'' = -f''.\frac{df'}{f'}, \quad d.f'f'' = -f'f''.\frac{df}{f},$$

eruitur

$$\frac{y\,dy-v\,dx}{f'f''+f''f+ff'} = \frac{1}{A}\left\{\frac{\lambda\,df'}{f'}-\frac{\lambda'\,df}{f}\right\}.$$

Quod per se integrabile est atque nihilo aequiparatum integratumque suppeditat:

$$\frac{\log f}{\lambda}-\frac{\log f'}{\lambda'} = \text{Const.},$$

quod alterum Integrale est.

Exemplum II.

$$2y^3\frac{d^2y}{dx^2}+y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-ay^2+bx^2-c=0.$$

(a, b, c Constantes.)

Secundum *Eulerum* huius aequationis integratione prima obtinetur $y\,dy-v\,dx=0$, designante v radicem aequationis biquadraticae,

$$7. \quad (aa-4b)y^2-2(abx^2+av^2-4bxv)+\left(\frac{c-bx^2+v^2}{y}\right)^2 = \alpha,$$

atque α Constantem Arbitrariam. Comparando aequationem differentialem propositam cum (1.) fit

$$\varphi = \log y, \quad e^\varphi = y,$$

unde e (2.) eruitur aequatio integralis inter x et y quaesita,

$$\int y\frac{\partial u}{\partial \alpha}\{dy-u\,dx\} = \int\frac{\partial v}{\partial \alpha}.\frac{y\,dy-v\,dx}{y} = \text{Const.}$$

Ponamus $a=\lambda+\lambda'$, $b=\lambda\lambda'$, abit (7.) in hanc formam,

$$8. \quad (\lambda-\lambda')^2y^2-2\{\lambda(v-\lambda'x)^2+\lambda'(v-\lambda x)^2\}$$
$$+\left\{\frac{c-\lambda\lambda'x^2+v^2}{y}\right\}^2 = \alpha.$$

Ponatur

$$9. \quad v-\lambda'x = (\lambda-\lambda')p, \quad v-\lambda x = (\lambda'-\lambda)p',$$

unde

$$10.\quad \begin{cases} x = p+p', \quad v = \lambda p+\lambda' p', \\ \sqrt{\lambda}.p+\sqrt{\lambda'}.p' = \frac{v+\sqrt{(\lambda\lambda')}\,x}{\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda'}}, \quad \sqrt{\lambda}.p-\sqrt{\lambda'}.p' = \frac{v-\sqrt{(\lambda\lambda')}\,x}{\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda'}}; \end{cases}$$

abit (8.) in hanc aequationem,

$$11.\quad y^2+\left\{\frac{c}{\lambda-\lambda'}+\lambda p^2-\lambda' p'^2\right\}^2\frac{1}{y^2}$$
$$= 2\left\{\lambda p^2+\lambda' p'^2+\frac{\alpha}{2(\lambda-\lambda')^2}\right\}.$$

Hinc fit

$$12.\quad y = \sqrt{(\varepsilon+\lambda pp)}+\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p'p')},$$

siquidem ponitur

$$13.\quad \varepsilon = \frac{\alpha}{4(\lambda-\lambda')^2}+\frac{c}{2(\lambda-\lambda')}, \quad \varepsilon' = \frac{\alpha}{4(\lambda-\lambda')^2}+\frac{c}{2(\lambda'-\lambda)}.$$

E formulis (9.) et (13.) sequitur

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} = -\frac{\partial p'}{\partial \alpha} = \frac{1}{\lambda-\lambda'}\cdot\frac{\partial v}{\partial \alpha},$$
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \alpha} = \frac{1}{4(\lambda-\lambda')^2};$$

unde e (12.) obtinetur,

$$14.\quad \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{1}{8(\lambda-\lambda')\{\lambda' p'\sqrt{(\varepsilon+\lambda pp)}-\lambda p\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p'p')}\}},$$

qui fieri debet Multiplicator aequationis $y\,dy-v\,dx = 0$. Ac reapse invenitur e (10.) et (12.),

$$y\,dy-v\,dx = \left\{\frac{\lambda p\,dp}{\sqrt{(\varepsilon+\lambda pp)}}+\frac{\lambda' p'\,dp'}{\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p'p')}}\right\}\{\sqrt{(\varepsilon+\lambda pp)}+\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p'p')}\}$$
$$-\{\quad dp \quad + \quad dp' \quad\}\{\quad \lambda p \quad + \quad \lambda' p' \quad\}$$
$$= \{\lambda p\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p'p)}-\lambda' p'\sqrt{(\varepsilon+\lambda pp)}\}\left\{\frac{dp}{\sqrt{(\varepsilon+\lambda pp)}}-\frac{dp'}{\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p'p')}}\right\}.$$

Unde per factorem (14.) atque substitutionem (9.) aequationem differentialem, $y\,dy-v\,dx = 0$, in aliam mutamus, in qua variabiles separatae sunt,

$$\frac{dp}{\sqrt{(\varepsilon+\lambda pp)}}-\frac{dp'}{\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p'p')}} = 0.$$

Cuius integratione prodit:

$$\frac{\{\sqrt{\lambda}.p+\sqrt{(\varepsilon+\lambda pp)}\}^{\sqrt{\lambda'}}}{\{\sqrt{\lambda'}.p'+\sqrt{(\varepsilon'+\lambda' p'p')}\}^{\sqrt{\lambda}}} = \text{Const.}$$

Ponendo autem

$$(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda'})y+v+\sqrt{(\lambda\lambda')}x = A,$$
$$(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda'})y+v-\sqrt{(\lambda\lambda')}x = B,$$
$$(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda'})y-v+\sqrt{(\lambda\lambda')}x = C,$$

fit e (10.) et (11.) post calculos faciles,

$$\sqrt{\lambda}.p+\sqrt{(\varepsilon+\lambda pp)} = \frac{AB+c}{2(\lambda-\lambda')y},$$
$$\sqrt{\lambda'}.p+\sqrt{(\varepsilon'+\lambda'p'p')} = \frac{AC-c}{2(\lambda-\lambda')y}.$$

Unde aequatio integralis inventa sic exhiberi potest,

$$\frac{(AB+c)^{\sqrt{\lambda'}}}{(AC-c)^{\sqrt{\lambda}}} = \beta.y^{\sqrt{\lambda'}-\sqrt{\lambda}},$$

ubi β est nova Constans Arbitraria atque quantitas v, quae ipsas A, B, C afficit, est radix aequationis biquadraticae (7.), porro λ et λ' sunt radices diversae aequationis quadraticae $\lambda^2-a\lambda+b=0$.

Integrationem his duobus exemplis praestitam etiam assequi licuisset ponendo cum *Eulero* $dx=y\,dt$, et aequationem differentialem secundi ordinis exemplo primo propositam *semel*, exemplo secundo propositam *bis* differentiando, ita ut t pro variabili independente habeatur. Quo facto respective pervenitur ad aequationes differentiales lineares tertii et quarti ordinis, quae Coëfficientibus gaudent constantibus notisque methodis integrantur.

De Multiplicatore systematis aequationum differentialium vulgarium quod mediante solutione completa unius aequationis differentialis partialis primi ordinis integratur.

§. 19.

Systema aequationum differentialium vulgarium proponatur hoc,

$$1.\quad\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{dq_1}{dt}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_1}, & \dfrac{dp_1}{dt}=-\left\{\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_1}+p_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial V}\right\},\\
\dfrac{dq_2}{dt}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_2}, & \dfrac{dp_2}{dt}=-\left\{\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_2}+p_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial V}\right\},\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\\
\dfrac{dq_n}{dt}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_n}, & \dfrac{dp_n}{dt}=-\left\{\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_n}+p_n\dfrac{\partial\varphi}{\partial V}\right\},\\
\multicolumn{2}{l}{\dfrac{dV}{dt}=p_1\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_1}+p_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_2}\cdots\cdots+p_n\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_n},}
\end{array}\right.$$

ubi φ est functio quaecunque quantitatum $q_1, q_2, \ldots q_n, V, p_1, p_2, \ldots p_n$. Designante M aequationum (1.) Multiplicatorem, secundum formulas nostras gerales fit

$$\frac{d\log M}{dt} = -\Sigma\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i\partial q_i} + \Sigma\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i\partial p_i} + p_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial V\partial p_i}\right\} + n\frac{\partial\varphi}{\partial V}$$
$$-\frac{\partial\left\{p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\dots + p_n\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\right\}}{\partial V},$$

tribuendo indici i valores $1, 2, \dots n$. Unde reiectis terminis se destruentibus obtinetur,

$$2.\quad \frac{d\log M}{dt} = n\frac{\partial\varphi}{\partial V}.$$

Quae evanescit expressio si φ ipsa V vacat. ***Quoties igitur functio φ ab ipsa V vacua est, aequationum* (1.) *Multiplicatorem unitati aequare licet.***

Aequationum (1.) habetur Integrale unum,

$$3.\quad \varphi = h,$$

designante h Constantem. In ea aequatione ponatur

$$4.\quad p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1},\quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2},\quad \dots\quad p_n = \frac{\partial V}{\partial q_n},$$

obtinetur aequatio differentialis partialis primi ordinis, in qua V est functio quaesita atque $q_1, q_2, \dots q_n$ sunt variabiles independentes. Faciamus inventam esse eius aequationis differentialis partialis solutionem *quamcunque* V, dico aequationes (4.) totidem esse aequationes integrales, quibus aequationes differentiales vulgares (1.) gaudere possint. Nam differentiando ex. gr. earum primam $\frac{\partial V}{\partial q_1} - p_1 = 0$ et substituendo aequationes differentiales (1.) prodit,

$$5.\quad \Sigma\frac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_i}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + p_1\frac{\partial\varphi}{\partial V} = 0.$$

Cui aequationi satisfit substituendo ipsorum p_1, p_2, etc. valores (4.). Nimirum e suppositione facta aequatio (3.) identica evadit substituendo (4.) solutionisque V valorem, eam autem aequationem identicam ipsius q_1 respectu differentiando prodit aequatio in quam abit (5.) per aequationes (4.). ***Itaque aequationes* (4.) *una cum ipsa aequatione, qua V per $q_1, q_2, \dots q_n$ definiri ponitur, constituunt systema $n+1$ aequationum integralium idque tale e quo differentiando ipsasque aequationes differentiales propositas substituendo deducere non licet aequationes integrales novas.*** Scilicet aequationes provenientes (5.) per illas $n+1$ aequationes identicas fieri vidimus.

Constans h ubi servat significationem generalem ingredi debet solutionem quamcunque V unde, data V, differentiale quoque partiale $\frac{\partial V}{\partial h}$ assignare licebit, quod per z designabo. Erit per (1.), (3.), (4.),

$$6.\quad \frac{dz}{dt} = \Sigma\frac{\partial^2 V}{\partial h\,\partial q_i}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial h} - \frac{\partial\varphi}{\partial V}z = 1 - \frac{\partial\varphi}{\partial V}z.$$

Si solutio V aliquam involvit Constantem Arbitrariam α atque ponitur $\frac{\partial V}{\partial \alpha} = y$, similiter erit

$$7. \quad \frac{dy}{dt} = \Sigma \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha\, \partial q_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial V} y = -\frac{\partial \varphi}{\partial V} y.$$

Scilicet functio φ, substituendo datam solutionem V atque ponendo $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$, identice aequatur Constanti h ideoque post eam substitutionem differentiata ipsius h respectu unitati aequatur, differentiata ipsius α respectu evanescit. E (2.) et (7.) sequitur,

$$d \log M = -n\, d \log y,$$

ideoque fit

$$8. \quad y^n M = \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)^n M = \beta,$$

designante β Constantem. Haec formula docet, Multiplicatori M competere valorem qui per aequationes integrales (3.) et (4.) aequetur quantitati $\left\{\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right\}^{-n}$. Observo adhuc, e binis formulis (6.) et (7.) sequi

$$y\, dz - z\, dy = y\, dt,$$

unde, designante U functionem quantitatum y et z homogeneam rationalem $(-1)^{ti}$ ordinis, assignari poterit integrale $\int U\, dt$. Si solutio V plures Constantes Arbitrarias involvit, totidem habebuntur aequationes (8.), binarumque divisione obtinebuntur aequationes integrales, inventis (3.) et (4.) accedentes. Si functio φ ab ipsa V vacua est ideoque $M = 1$, aequationes (8.) per se sunt aequationes integrales.

Si habetur solutio *completa* $V = F$, n Constantes Arbitrarias $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ involvens, poniturque $\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = u_i$, fit systema aequationum integralium completarum,

$$9. \quad \begin{cases} F - V = 0, \ \frac{\partial F}{\partial q_1} - p_1 = 0, \ \frac{\partial F}{\partial q_2} - p_2 = 0, \ \ldots \ \frac{\partial F}{\partial q_n} - p_n = 0, \\ \qquad \frac{u_1}{u_n} - \beta_1 = 0, \ \frac{u_2}{u_n} - \beta_2 = 0, \ \ldots \ \frac{u_{n-1}}{u_n} - \beta_{n-1} = 0, \end{cases}$$

designantibus $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}$ alias Constantes Arbitrarias. Si ex his aequationibus petuntur valores quantitatum h, α_i, β_i, atque functionum iis aequivalentium formantur Determinantia *partialia*, in quibus una quantitatum q_i, p_i, V pro Constante, reliquae pro variabilibus habentur, ea aequare debent quantitates ad dextram aequationum differentialium (1.) positas, in *Multiplicatorem* ductas. Supersedere resolutioni aequationum (9.) et immediate functionum $F - V$, $\frac{\partial F}{\partial q_1} - p_1$ etc. sumere possumus Determinantia partialia,

dummodo ea dividimus per earundem functionum Determinans, quantitatum h, α_i, β_i respectu formatum. Qua de re Cap. I. egi. Determinantia functionalia hic obvenientia in alia simpliciora redeunt, propterea quod quantitates V, p_1, p_2, ... p_n tantum in $n+1$ prioribus aequationum (9.), quantitates β_1, β_2, ... β_{n-1} tantum in $n-1$ posterioribus, singulae in singulis reprehenduntur. Sic Determinans, quantitatum h, α_i, β_i respectu formatum, quod per ∇ designabo, aequatur Determinanti functionum ab ipsis β_i vacuarum,

$$F, \frac{\partial F}{\partial q_1}, \frac{\partial F}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial F}{\partial q_n},$$

solarum h et α_1, α_2, ... α_n respectu formato. Determinans partiale, in quo q_n pro Constante habetur et quod per (q_n) designabo, aequatur Determinanti functionum

$$\frac{u_1}{u_n}, \frac{u_2}{u_n}, \ldots \frac{u_{n-1}}{u_n},$$

formato solarum respectu q_1, q_2, ... q_{n-1}. Per theorema autem in Comment. *de Determinantibus functionalibus* comprobato, quod Determinantia spectat functionum communi denominatore praeditarum, fit

$$(q_n) = u_n^{-n} Q_n = \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right)^{-n} Q_n,$$

posito

$$Q_n = \Sigma \pm \frac{\partial u_1}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial q_2} \cdots \frac{\partial u_{n-1}}{\partial q_{n-1}} u_n,$$

ubi formantur Determinantis Q_n termini permutando omnimodis functiones u_1, u_2, ... u_n. Substituendo autem valores $u_i = \frac{\partial F}{\partial \alpha_i}$ et differentiationum ordinem invertendo sequitur, *Determinans Q_n fieri Determinans functionum*

$$F, \frac{\partial F}{\partial q_1}, \frac{\partial F}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial F}{\partial q_{n-1}},$$

quantitatum α_1, α_2, ... α_n respectu formatum. Iam aequationem identicam,

$$\varphi\left(q_1, q_2, \ldots q_n, F, \frac{\partial F}{\partial q_1}, \frac{\partial F}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial F}{\partial q_n}\right) = h,$$

differentiando respectu quantitatum h, α_1, α_2, ... α_n, quibus ipsae F, $\frac{\partial F}{\partial q_1}$ etc. afficiuntur, scribendoque V et p_i ipsarum F et $\frac{\partial F}{\partial q_i}$ loco, obtinentur inter incognitas $\frac{\partial \varphi}{\partial V}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}$ aequationes $n+1$ lineares, quarum resolutione invenitur

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_n} = \frac{Q_n}{\nabla},$$

unde

$$\frac{(q_n)}{\nabla} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right)^{-n}$$

Eadem ratione generaliter, ubi vocamus (q_i) functionum (9.) Determinans partiale in quo q_i pro Constante habetur, invenitur

$$10. \quad \frac{(q_i)}{\nabla} = \left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}.$$

Vocando W functionum

$$\frac{\partial F}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial q_n}$$

Determinans, quantitatum $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ respectu formatum, earundem $n+1$ aequationum linearium resolutione eruitur,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial V} = \frac{W}{\nabla}.$$

Functionum (9.) Determinans partiale (p_n), in quo p_n pro Constante habetur, aequatur Determinanti functionum

$$\frac{\partial F}{\partial q_n}, \quad \frac{u_1}{u_n}, \quad \frac{u_2}{u_n}, \quad \ldots \quad \frac{u_{n-1}}{u_n},$$

quantitatum $q_1, q_2, \ldots q_n$ respectu formato. Invertendo autem ordinem differentiationum in differentialibus ipsius $\frac{\partial F}{\partial q_n}$ atque similes adhibendo formulas earum quibus supra (q_n) ad Q_n revocavi, redit $u_n^n(p_n)$ in differentiam Determinantis P_n functionum

$$F, \quad \frac{\partial F}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial q_n},$$

quantitatum $q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ respectu formati, atque Determinantis functionalis modo adhibiti W per $\frac{\partial F}{\partial q_n}$ multiplicati, sive fit

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right)^n (p_n) = P_n - \frac{\partial F}{\partial q_n} . W = P_n - p_n W.$$

Adiiciendo autem $n+1$ aequationibus linearibus commemoratis aliam provenientem ex aequatione $\varphi = h$, quantitatis q_n respectu differentiata, eruitur per eliminationem quantitatum $\frac{\partial \varphi}{\partial V}, \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}$,

$$\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial q_n} + P_n = 0.$$

Unde fit

$$\frac{(p_n)}{\nabla} = \left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n} \left\{\frac{P_n}{\nabla} - p_n \frac{W}{\nabla}\right\} = -\left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n} . \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial q_n} + p_n \frac{\partial \varphi}{\partial V}\right\};$$

eademque ratione obtinetur generaliter, ubi (p_i) est functionum (9.) Determinans partiale in quo habetur p_i pro Constante,

$$11. \quad \frac{(p_i)}{\nabla} = -\left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n} . \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial q_n} + p_n \frac{\partial \varphi}{\partial V}\right\}.$$

Quae paullo difficiliora erant indagatu. Postremo functionum (9.) Determinans partiale (V), in quo habetur V pro Constante, aequale erit functionum

$$F,\ \frac{u_1}{u_n},\ \frac{u_2}{u_n},\ \ldots.\ \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

Determinanti, quantitatum $q_1, q_2, \ldots. q_n$ respectu formato. Quod adhibendo notationem supra traditam fieri patet

$$(V) = \frac{\partial F}{\partial q_1}(q_1) + \frac{\partial F}{\partial q_2}(q_2) \ldots. + \frac{\partial F}{\partial q_n}(q_n),$$

unde secundum (10.) invenitur:

$$12.\quad \frac{(V)}{\nabla} = \left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n} \left\{p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \ldots. + p_n \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}\right\}.$$

Formulae (10.), (11.), (12.) docent, functionum ad laevam aequationum (9.) positarum Determinantia partialia aequari quantitatibus ad dextram aequationum differentialium (1.) positis, per factorem communem $\left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n}$ multiplicatis. Ea Determinantia partialia autem sunt ut differentialia dq_i, dp_i, dV. Unde antecedentibus continetur demonstratio directa, aequationes differentiales propositas e formulis (9.) differentiatis per aequationum linearium resolutionem fluere easque Multiplicatore gaudere $\left\{\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\right\}^{-n}$, qualis e formula (8.) obtinebatur. Quam demonstrationem hic breviter indicasse placuit, cum ad illustrandam Determinantium theoriam faciat.

Casu quo φ ab ipsa V vacua est cum cognitus sit Multiplicator, videamus, quid sit quod ea cognitione lucremur in exemplo simplicissimo quo $n = 2$. Tributo Constanti h valore particulari, substituamus aequationi $\varphi = h$ aliam qua ipsius p_2 valor per q_1, q_2, p_1 exhibetur, ita ut aequationes differentiales proponantur sequentes,

$$13.\quad dq_1 : dq_2 : dp_1 = \frac{\partial p_2}{\partial p_1} : -1 : -\frac{\partial p_2}{\partial q_1}.$$

Quarum Multiplicatorem patet *unitati* aequari, cum summa differentialium quantitatum ad dextram, respective secundum q_1, q_2, p_1 sumtorum, evanescat. Unde si post primam integrationem exprimitur p_1 per q_1, q_2 et Constantem Arbitrariam α, secundum principium ultimi Multiplicatoris fit alterum Integrale,

$$14.\quad \int \frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\left\{dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial p_1} dq_2\right\} = \text{Const.}$$

Sub integrationis signo haberi differentiale completum, e *Lagrangiana* aequationum differentialium partialium theoria sic probatur. Nam cum expressis p_1 et p_2 per q_1 et q_2 fieri debeat $p_1 dq_1 + p_2 dq_2$ differentiale completum atque p_2 per

q_1, q_2, p_1 expressum detur, pro p_1 talis sumi debet quantitatum q_1 et q_2 functio quae satisfaciat conditioni,

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial q_1} - \frac{\partial p_2}{\partial q_1} = 0.$$

Qualem functionem, e theoria aequationum differentialium partialium primi ordinis *linearium* constat, e quocunque Integrali aequationum differentialium vulgarium (13.) erui. Quod ubi Constantem Arbitrariam α implicat, eandem implicabunt valores ipsarum p_1 et p_2 per q_1 et q_2 exhibiti, qui expressionem $p_1 dq_1 + p_2 dq_2$ integrabilem reddebant. Quae secundum Constantem α differentiata rursus prodire debet expressio integrabilis, sive expressio

$$\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} dq_2 = \frac{\partial p_1}{\partial \alpha} \left\{ dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial p_1} dq_2 \right\}$$

evadere debet differentiale completum. Q. D. E. Simul videmus, Integrale (14.) obtineri aequiparando novae Constanti Arbitrariae differentiale partiale solutionis $V = \int \{p_1 dq_1 + p_2 dq_2\}$, ipsius α respectu sumtum, id quod cum supra expositis convenit.

De Multiplicatore aequationum differentialium vulgarium systematis quod mediante solutione completa problematis *Pfaffiani* integratur. Conditiones ut aequatio differentialis vulgaris linearis primi ordinis inter p variabiles per pauciores quam $\frac{1}{2}p$ aequationes integrari possit.

§. 20.

Problema ***Pfaffianum*** voco integrationem singularis aequationis differentialis linearis primi ordinis inter numerum variabilium parem per semissem aequationum finitarum numerum. Sit aequatio differentialis singularis proposita,

$$1. \quad 0 = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \ldots + X_{2m} dx_{2m},$$

designantibus X_1, X_2 etc. variabilium x_1, x_2, ... x_{2m} functiones quascunque. Qua integrata per numerum m aequationum, totidem Constantibus Arbitrariis affectarum, demonstravi ***Diar. Crell. Vol. XVII. pgg. 148 sqq.***, praestari integrationem completam systematis aequationum differentialium sequentis,

$$2. \left\{ \begin{array}{l} X_1 dt = \quad * \quad + a_{1,2} dx_2 + a_{1,3} dx_3 \ldots + a_{1,2m} dx_{2m}, \\ X_2 dt = -a_{1,2} dx_1 \quad * \quad + a_{2,3} dx_3 \ldots + a_{2,2m} dx_{2m}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{2m} dt = -a_{1,2m} dx_1 - a_{2,2m} dx_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad * \end{array} \right.$$

ubi

$$3. \quad a_{i,k} = -a_{k,i} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}, \quad a_{i,i} = 0.$$

Dedi in *Diario Crell. Vol. II. pag. 354 sqq.* resolutionem algebraicam generalem aequationum linearium ad instar aequationum (2.) formatarum. Cuius ope exhibitis aequationibus differentialibus forma proportionum nobis usitata,

$$4.\quad dx_1 : dx_2 \ldots : dx_{2m} = A_1 : A_2 \ldots : A_{2m},$$

investigemus formulam qua aequationum (4.) Multiplicator definiatur sive valorem expressionis

$$5.\quad \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \ldots + \frac{\partial A_{2m}}{\partial x_{2m}} = -A_i \frac{d \log M}{dx_i}.$$

Auspicabor ab aequationum linearium (2.) resolutione quae sic proponi potest.

Deriventur de producto

$$a_{1,2}\, a_{3,4} \ldots a_{2m-1,2m}$$

alii similes termini, mutando indices $2, 3, \ldots 2m-1, 2m$ respective in $3, 4, \ldots 2m, 2$, eandemque indicum commutationem repetendo, donec ad terminum primitivum reditur, id quod suggerit $2m-1$ terminos diversos. Ea ratione, indicum certo ordine proposito, si quisque eorum in proxime sequentem, ultimus in primum mutatur idque repetitur dum ad ordinem indicum primitivum reditur, dicam ***indices cyclum percurrere.*** Postquam e producto proposito $2m-1$ termini deducti sunt per cyclum, quem indices $2, 3, \ldots 2m$ fecimus percurrere, rursus in eorum terminorum unoquoque ponamus indices $2m-3$ postremos cyclum percurrere, unde nanciscimur terminorum numerum $(2m-1)(2m-3)$. In eorum terminorum unoquoque rursus ponamus indices $2m-5$ postremos cyclum percurrere, erit terminorum diversorum provenientium numerus totalis $(2m-1)(2m-3)(2m-5)$. Ita pergendo donec postremo soli tres indices postremi cyclum percurrant, producta $3.5 \ldots (2m-1)$ ex uno proposito deducta erunt, quorum omnium aggregatum R vocemus. Sit ex. gr. $m = 3$, erit R aggregatum *quindecim* terminorum,

$$\begin{aligned} & a_{1,2}\, a_{3,4}\, a_{5,6} + a_{1,2}\, a_{3,5}\, a_{6,4} + a_{1,2}\, a_{3,6}\, a_{4,5} \\ + & a_{1,3}\, a_{4,5}\, a_{6,2} + a_{1,3}\, a_{4,6}\, a_{2,5} + a_{1,3}\, a_{4,2}\, a_{5,6} \\ + & a_{1,4}\, a_{5,6}\, a_{2,3} + a_{1,4}\, a_{5,2}\, a_{3,6} + a_{1,4}\, a_{5,3}\, a_{6,2} \\ + & a_{1,5}\, a_{6,2}\, a_{3,4} + a_{1,5}\, a_{6,3}\, a_{4,2} + a_{1,5}\, a_{6,4}\, a_{2,3} \\ + & a_{1,6}\, a_{2,3}\, a_{4,5} + a_{1,6}\, a_{2,4}\, a_{5,3} + a_{1,6}\, a_{2,5}\, a_{3,4}, \end{aligned}$$

quorum quinque in prima verticali ex eorum uno derivantur, identidem mutando indices 2, 3, 4, 5, 6 in 3, 4, 5, 6, 2; terni iuxta positi indicibus tribus posterioribus cyclum percurrentibus ex uno eorum fluunt. Aggregatum R fit denominator communis expressionum algebraicarum quibus valores incognitarum exhibentur. Numeratorum autem Coëfficientes, qui ducuntur in terminos ad laevam aequationum linearium constitutos, sunt ipsius R differentialia, quantitatum $a_{i,k}$

respectu sumta, ita ut aequationum (2.) resolutione proveniant valores,

$$5^*.\quad \begin{cases} R\frac{dx_1}{dt} = \quad * \quad -\frac{\partial R}{\partial a_{1,2}}X_2 - \dots - \frac{\partial R}{\partial a_{1,2m}}X_{2m}, \\ R\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial R}{\partial a_{1,2}}X_1 \quad * \quad - \dots - \frac{\partial R}{\partial a_{2,2m}}X_{2m}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ R\frac{dx_{2m}}{dt} = \frac{\partial R}{\partial a_{1,2m}}X_1 + \frac{\partial R}{\partial a_{2,2m}}X_2 + \dots\dots \quad * \quad . \end{cases}$$

Aggregatum R gaudet proprietatibus plane analogis earum quae de Determinantibus circumferuntur. Quarum gravissima ea est ut *binis indicum* $1, 2, \dots 2m$ *inter se permutatis simul omnes ipsius R termini valores oppositos induant ideoque ipsum R in valorem oppositum abeat.* Porro fit

$$6.\quad R = a_{1,i}\frac{\partial R}{\partial a_{1,i}} + a_{2,i}\frac{\partial R}{\partial a_{2,i}} \dots + a_{2m,i}\frac{\partial R}{\partial a_{2m,i}},$$

et quoties i et k inter se diversi sunt,

$$7.\quad 0 = a_{1,i}\frac{\partial R}{\partial a_{1,k}} + a_{2,i}\frac{\partial R}{\partial a_{2,k}} \dots + a_{2m,i}\frac{\partial R}{\partial a_{2m,k}},$$

ubi terminus in $a_{k,i}$ ductus ommittendus est. Designantibus i, i', i'' etc. indices inter se diversos, si sumuntur differentialia partialia

$$\frac{\partial R}{\partial a_{i,i'}},\quad \frac{\partial^2 R}{\partial a_{i,i'}\,\partial a_{i'',i'''}},\quad \text{etc.}$$

ea erunt aggregata ad instar aggregati R formata, respective reiectis Coëfficientium binis, quatuor etc. seriebus cum horizontalibus tum verticalibus, eritque

$$8.\quad \frac{\partial^2 R}{\partial a_{i,i'}\,\partial a_{i'',i'''}} = \frac{\partial^2 R}{\partial a_{i,i''}\,\partial a_{i''',i'}} = \frac{\partial^2 R}{\partial a_{i,i'''}\,\partial a_{i',i''}}.$$

His rebus praemissis, quarum demonstrationem aliis relinquo vel ad alium locum relego, Multiplicator quaesitus sic invenitur. Sequitur e (5*.), siquidem signo summatorio subscribuntur indices quorum respectu summatio instituenda est,

$$9.\quad R\frac{dx_i}{dt} = A_i = \sum_\alpha \frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}X_\alpha,$$

unde

$$10.\quad \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} \dots + \frac{\partial A_{2m}}{\partial x_{2m}} = -\sum_{\alpha,i}\frac{\partial . \frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}}{\partial x_i} - \sum_{\alpha,i}\frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}.\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i},$$

ubi indicibus α et i tribuuntur valores $1, 2, \dots 2m$, solis ommissis valoribus $i = \alpha$. Examinemus formulae (10.) summam priorem. Aggregati $\frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}$ cum terminus nullus afficiatur elemento cuius alter index est α aut i, fit

$$\frac{\partial.\frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}}{\partial x_i} = \sum_{k,l} \frac{\partial^2 R}{\partial a_{\alpha,i}\,\partial a_{k,l}}.\frac{\partial a_{k,l}}{\partial x_i},$$

summatione duplici ad omnes $\frac{(2m-2)(2m-3)}{1\,.\,2}$ combinationes extensa, quibus indices k et l valores obtinent et inter se et ab ipsis α et i diversos. E formula antecedente sequitur,

$$\sum_i \frac{\partial.\frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}}{\partial x_i} = \sum_{i,k,l} \frac{\partial^2 R}{\partial a_{\alpha,i}\,\partial a_{k,l}}.\frac{\partial a_{k,l}}{\partial x_i},$$

ubi indicum i, k, l valores in quoque termino sub signo summatorio et inter se et ab indice α diversi sunt, ipsi i valores $1, 2, \ldots. 2m$ conveniunt, binorum k et l valores non inter se permutari debeat. Unde triplex summa conflatur e $\frac{(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{1\,.\,2\,.\,3}$ terminis huiusmodi,

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_{\alpha,i}\,\partial a_{k,l}}\left\{\frac{\partial a_{k,l}}{\partial x_i}+\frac{\partial a_{l,i}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{i,k}}{\partial x_l}\right\},$$

qui obtinentur sumendo pro indicibus i, k, l ternos diversos ex indicibus $1, 2, \ldots. \alpha-1$, $\alpha+1, \ldots. 2m$. At substituendo quantitatum $a_{i,k}$ valores (3.), ternorum terminorum uncis inclusorum summa,

$$\frac{\partial a_{k,l}}{\partial x_i}+\frac{\partial a_{l,i}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{i,k}}{\partial x_l},$$

identice evanescit, ideoque pro quoque ipsius α valore fit,

$$11.\qquad \sum_i \frac{\partial.\frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}}{\partial x_i} = 0,$$

sive formulae (10.) prior summa evanescit. Alterius summae valor facile invenitur permutando indices α et i formulamque (6.) in auxilium vocando, quae summata pro omnibus indicis i valoribus suppeditat,

$$\sum_{\alpha,i} a_{\alpha,i}\frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}} = 2m.R.$$

Hinc enim fit,

$$\sum_{\alpha,i}\frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}.\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} = \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha,i}\frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}\left\{\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i}-\frac{\partial X_i}{\partial x_\alpha}\right\} = \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha,i}\frac{\partial R}{\partial a_{\alpha,i}}a_{\alpha,i} = mR.$$

Unde iam formula (10.) in hanc abit,

$$12.\qquad \frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}\ldots.+\frac{\partial A_{2m}}{\partial x_{2m}} = mR.$$

Cuius formulae pars laeva cum secundum (5.) et (9.) ipsi $-R\frac{d\log M}{dt}$ aeque-

tur, aequationum differentialium (4.) Multiplicatorem statuere licet

$$13. \quad M = e^{-mt}.$$

Docet ea formula, aequationibus differentialibus (4.) complete integratis ad eruendam relationem inter t et variabiles x_i nulla amplius opus esse Quadratura, sed valorem integralis

$$\int \frac{R\, dx_i}{A_i} = t + \text{Const.}$$

exhiberi posse per logarithmum Determinantis functionum quae Constantibus Arbitrariis aequantur.

Ponamus quod semper licet $X_{2m} = -1$ sintque Coëfficientes reliqui omnes $X_1, X_2, \ldots, X_{2m-1}$ a variabili x_{2m} vacui, redit problema *Pfaffianum* in hoc, *ut expressio differentialis $2m-1$ variabilium*

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 \ldots + X_{2m-1}\, dx_{2m-1}$$

per $m-1$ aequationes finitas reddatur differentiale completum dx_{2m}. Scilicet ea re effecta, obtinetur m^{ta} aequatio per solas Quadraturas,

$$x_{2m} + \text{Const.} = \int \{X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 \ldots + X_{2m-1}\, dx_{2m-1}\}.$$

Eo casu evanescunt omnes quantitates $a_{i,2m}$ ideoque ipsum quoque dt, unde aequationes differentiales (2.) in has abeunt,

$$14. \quad \begin{cases} 0 = \quad * \quad + a_{1,2}\, dx_2 + a_{1,3}\, dx_3 \ldots + a_{1,2m-1}\, dx_{2m-1}, \\ 0 = a_{2,1}\, dx_1 \quad * \quad + a_{2,3}\, dx_3 \ldots + a_{2,2m-1}\, dx_{2m-1}, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0 = a_{2m-1,1}\, dx_1 + a_{2m-1,2}\, dx_2 + a_{2m-1,3}\, dx_3 \ldots \ldots \quad * \end{cases}$$

Quarum una e reliquis fluit, sicuti sequitur summando aequationes respective per $\frac{\partial R}{\partial a_{1,2m}}, \frac{\partial R}{\partial a_{2,2m}}, \ldots \frac{\partial R}{\partial a_{2m-1,2m}}$ multiplicatas. Evanescentibus $a_{i,2m}$ evanescunt et ipsum R et omnia ipsius R differentialia $\frac{\partial R}{\partial a_{i,k}}$, in quibus neuter indicum i et k ipsi $2m$ aequatur. Unde e (9.) fit,

$$A_1 = \frac{\partial R}{\partial a_{1,2m}}, \quad A_2 = \frac{\partial R}{\partial a_{2,2m}}, \quad \ldots \quad A_{2m-1} = \frac{\partial R}{\partial a_{2m-1,2m}},$$

$$A_{2m} = X_1 A_1 + X_2 A_2 \ldots + X_{2m-1} A_{2m-1}.$$

Cum A_{2m} a variabili x_{2m} vacua sit, formula (12.) abit in hanc,

$$15. \quad \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_{2m}} \ldots + \frac{\partial A_{2m-1}}{\partial x_{2m-1}} = 0.$$

Quae docet, *aequationum differentialium quae e* (14.) *proveniunt,*

$$16. \quad dx_1 : dx_2 \ldots : dx_{2m-1} = A_1 : A_2 \ldots : A_{2m-1}$$

Multiplicatorem aequari unitati.

Principium ultimi Multiplicatoris applicemus exemplo simplicissimo quo $m=2$ sive quo aequationes differentiales proponuntur,

$$17. \quad dx_1 : dx_2 : dx_3 = \frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2} : \frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3} : \frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1}.$$

Inventa per primam integrationem variabilis x_3 expressione per x_1, x_2 et Constantem Arbitrariam α, secundum principium illud fit altera aequatio integralis,

$$18. \quad \int \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} \left\{ \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \right\} = \text{Const.}$$

Quantitatem sub integrationis signo differentiale completum esse, sic verificari potest. Substituta variabilis x_3 expressione per integrationem primam inventa in formula $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3$, obtinetur

$$\left(X_1 + X_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(X_2 + X_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right) dx_2.$$

Eadem expressione substituta in aequationibus differentialibus, prodit aequatio,

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1} = \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \left\{ \frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \right\} + \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \left\{ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \right\},$$

quae est conditio ut formula differentialis antecedens sit differentiale aliquod completum dx_4. Si ipsius x_3 expressio implicat Constantem Arbitrariam α, fit

$$\begin{aligned} d.\frac{\partial x_4}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \left\{ X_1 + X_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right\}}{\partial \alpha} dx_1 + \frac{\partial \left\{ X_2 + X_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right\}}{\partial \alpha} dx_2 \\ &= \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} \left\{ \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} . \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} . \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right) dx_2 \right\} \\ &\qquad + X_3 \left\{ \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial \alpha} dx_1 + \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2 \partial \alpha} dx_2 \right\} \\ &= \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} \left\{ \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \right) dx_2 \right\} \\ &\qquad + \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} dX_3 + X_3 d \frac{\partial x_3}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

Unde sequitur, quod propositum erat, quantitatem sub integrationis signo aequari differentiali completo, videlicet differentiali

$$d.X_3 \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} - d.\frac{\partial x_4}{\partial \alpha}.$$

Quod si igitur functio x_4 inventa est, aequationem integralem (18.) sic quoque repraesentare licet,

$$19. \quad X_3 \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} - \frac{\partial x_4}{\partial \alpha} = \text{Const.}$$

Quae de formulis quoque generalibus deduci potuit, quas loco citato tradidi de

aequationum differentialium (2.) systemate per solutionem completam aequationis (1.) integrando. Qua de integratione hac occasione novas addam propositiones novasque demonstrationes sequentes.

§. 21.

Ac primum comprobabo propositionem, *si aequatio differentialis singularis*

$$20. \quad X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots\ldots + X_p\,dx_p = 0$$

integretur per m aequationes quascunque, earum ope fieri, ut de quibusque m e numero p aequationum differentialium sequentium,

$$21. \quad \begin{cases} X_1\,dt = \quad * \quad + a_{1,2}\,dx_2 + a_{1,3}\,dx_3 \ldots\ldots + a_{1,p}\,dx_p, \\ X_2\,dt = a_{2,1}\,dx_1 \quad * \quad + a_{2,3}\,dx_3 \ldots\ldots + a_{2,p}\,dx_p, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ X_p\,dt = a_{p,1}\,dx_1 + a_{p,2}\,dx_2 + a_{p,3}\,dx_3 \ldots\ldots\ldots \; * \end{cases}$$

reliquae $p-m$ sponte fluant, ipsis $a_{k,k'}$ designantibus quantitates $\frac{\partial X_k}{\partial x_{k'}} - \frac{\partial X_{k'}}{\partial x_k}$.
Cuius propositionis demonstrationem sic adorno.

Designo

per h, h' etc. indices $1, 2, \ldots\ldots m$,
per i, i' etc. indices $m+1, m+2, \ldots\ldots p$,
per k, k' etc. indices $1, 2, 3, \ldots\ldots p$.

Aequando $x_1, x_2, \ldots\ldots x_m$ *quibuscunque* reliquarum variabilium $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots\ldots x_p$ functionibus, abeunt aequationes (21.) in sequentes:

$$22. \quad 0 = u_k = X_k\,dt - \sum_i b_{k,i}\,dx_i,$$

siquidem statuitur,

$$23. \quad b_{k,i} = a_{k,1}\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + a_{k,2}\frac{\partial x_2}{\partial x_i} \ldots\ldots + a_{k,m}\frac{\partial x_m}{\partial x_i} + a_{k,i}$$
$$= a_{k,i} + \sum_h a_{k,h}\frac{\partial x_h}{\partial x_i}.$$

Ponamus porro

$$24. \quad v_i = X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_i} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial x_i} \ldots\ldots + X_m\frac{\partial x_m}{\partial x_i} + X_i,$$

erit substituendo (22.):

$$25. \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_{i'}}u_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_{i'}}u_2 \ldots\ldots + \frac{\partial x_m}{\partial x_{i'}}u_m + u_{i'} = v_{i'}\,dt - \sum_i c_{i',i}\,dx_i,$$

posito

$$26. \quad c_{i',i} = \frac{\partial x_1}{\partial x_{i'}}b_{1,i} + \frac{\partial x_2}{\partial x_{i'}}b_{2,i} \ldots\ldots + \frac{\partial x_m}{\partial x_{i'}}b_{m,i} + b_{i',i}$$
$$= b_{i',i} + \sum_h \frac{\partial x_h}{\partial x_{i'}}b_{h,i}.$$

Substituendo ipsorum $b_{k,i}$ valores (23.), induit $c_{i',i}$ valorem sequentem,

$$27.\quad c_{i',i} = a_{i',i} + \sum_h a_{i',h}\frac{\partial x_h}{\partial x_i} + \sum_h a_{h,i}\frac{\partial x_h}{\partial x_{i'}} + \sum_{h,h'} a_{h',h}\frac{\partial x_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_{h'}}{\partial x_{i'}},$$

sive reponendo quantitatum $a_{k,k'}$ valores,

$$28.\quad c_{i',i} = \frac{\partial X_{i'}}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_{i'}} + \sum_h \left\{\frac{\partial X_{i'}}{\partial x_h} - \frac{\partial X_h}{\partial x_{i'}}\right\}\frac{\partial x_h}{\partial x_i} + \sum_h \left\{\frac{\partial X_h}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_h}\right\}\frac{\partial x_h}{\partial x_{i'}}$$
$$+ \sum_{h,h'}\left\{\frac{\partial X_{h'}}{\partial x_h} - \frac{\partial X_h}{\partial x_{h'}}\right\}\frac{\partial x_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_{h'}}{\partial x_{i'}}.$$

Includamus uncis differentialia partialia, in quibus solae x_i sive $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_p$ pro independentibus habentur atque quantitates x_h sive $x_1, x_2, \dots x_m$ pro earum functionibus: erit

$$29.\quad \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} + \sum_h \frac{\partial X_k}{\partial x_h}\cdot\frac{\partial x_h}{\partial x_i},$$

unde

$$30.\quad c_{i',i} = \left(\frac{\partial X_{i'}}{\partial x_i}\right) - \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_{i'}}\right) + \sum_h \left\{\left(\frac{\partial X_h}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_h}{\partial x_{i'}} - \left(\frac{\partial X_h}{\partial x_{i'}}\right)\frac{\partial x_h}{\partial x_i}\right\}.$$

Id quod sequitur, indicibus h et h' in summa duplici $\sum_{h,h'}\frac{\partial X_{h'}}{\partial x_h}\cdot\frac{\partial x_h}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_{h'}}{\partial x_{i'}}$ inter se permutatis nec non in (29.) scripto h' ipsius h loco. Inventam autem ipsius $c_{i',i}$ expressionem (30.) ope formulae (24.) sic exhibere licet,

$$31.\quad c_{i',i} = \left(\frac{\partial v_{i'}}{\partial x_i}\right) - \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_{i'}}\right),$$

reiectis qui se mutuo destruunt terminis,

$$X_h\frac{\partial^2 x_h}{\partial x_{i'}\partial x_i} - X_h\frac{\partial^2 x_h}{\partial x_i \partial x_{i'}}.$$

Quo ipsius $c_{i',i}$ valore substituto in (25.), eruimus formulam, quae valet *quaecunque sint quantitates x_h reliquarum x_i functiones*,

$$32.\quad \frac{\partial x_1}{\partial x_{i'}}u_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_{i'}}u_2 \dots + \frac{\partial x_m}{\partial x_{i'}}u_m + u_{i'} = v_{i'}dt + \sum_i\left\{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_{i'}}\right) - \left(\frac{\partial v_{i'}}{\partial x_i}\right)\right\}dx_i.$$

Quantitatibus x_h per variabiles x_i expressis cum fiat e (24.)

$$33.\quad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \dots + X_p dx_p = v_{m+1}dx_{m+1} + v_{m+2}dx_{m+2} \dots + v_p dp,$$

si per m aequationes, quibus quantitates x_h per variabiles $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_p$ determinantur, aequatio differentialis (20.) integratur, singuli termini ad dextram formulae (33.) per se evanescere debent, sive fieri debet

$$34.\quad v_{m+1} = v_{m+2} \dots = v_p = 0.$$

Unde etiam aequationis (32.) pars laeva evanescere debet sive, scribendo i ipsius i' loco, pro quolibet ipsius i valore fieri debet,

$$34^*.\quad \frac{\partial x_1}{\partial x_i}u_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_i}u_2 \dots + \frac{\partial x_m}{\partial x_i}u_m + u_i = 0.$$

Quae formula docet, si per m aequationes integretur aequatio differentialis (20.), earum aequationum ope fieri, ut ex aequationibus

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \dots\dots \quad u_m = 0$$

reliquae

$$u_{m+1} = 0, \quad u_{m+2} = 0, \quad \dots\dots \quad u_p = 0$$

sponte fluant. Q. D. E.

Si $p > 2m$, inter coëfficientes X_1, X_2 etc. certae quaedam locum habere debent relationes, cum determinando m functiones $x_1, x_2, \dots\dots x_m$ satisfieri debeat pluribus conditionibus, videlicet $p-m$ aequationibus,

$$0 = v_i = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_i} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_i} \dots\dots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial x_i} + X_i.$$

Quae relationes obtineri possunt e formula (32.). Nam secundum eam formulam aequationibus differentialibus (21.) sive aequationibus

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \dots\dots \quad u_p = 0$$

satisfit per numerum $2m$ aequationum, videlicet per m aequationes, quibus $x_1, x_2, \dots\dots x_m$ per reliquas variabiles determinantur, atque m aequationes differentiales $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, ... $u_m = 0$. Unde inter quantitates X_1, X_2 etc. tales locum habere debent relationes, ut de p aequationum (21.) numero $2m$ reliquae $p-2m$ sponte fluant sive, ope $2m$ aequationum differentialium $u_1=0$, $u_2=0$, ... $u_{2m}=0$ eliminatis $2m$ differentialibus $dx_1, dx_2, \dots\dots dx_{2m}$, reliquae $p-2m$ aequationes differentiales, $u_{2m+1}=0$, $u_{2m+2}=0$, ... $u_p=0$, identicae evadant. Secundum observationem olim a me factam in Diar. *Crell.* Vol. II. pag. 357, hae $p-2m$ aequationes post eam eliminationem formam induunt eandem atque propositae (21.), videlicet formam huiusmodi,

$$\begin{array}{rcllll}
F_1\,dt &=& \quad * & + f_{1,2}\,dx_{2m+2} & + f_{1,3}\,dx_{2m+3} \dots\dots & + f_{1,p-2m}\,dx_p, \\
F_2\,dt &=& f_{2,1}\,dx_{2m+1} & \quad * & + f_{2,3}\,dx_{2m+3} \dots\dots & + f_{2,p-2m}\,dx_p, \\
\dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\
F_{p-2m}\,dt &=& f_{p-2m,1}\,dx_{2m+1} & + f_{p-2m,2}\,dx_{2m+2} & \dots\dots\dots\dots & \quad * \quad ,
\end{array}$$

ubi $f_{i,k} = -f_{k,i}$. Quae aequationes ut identicae evadant, evanescere debent et $p-2m$ quantitates F_i et $\frac{(p-2m)(p-2m-1)}{2}$ quantitates $f_{i,k}$. Unde *locum habere debent* $\frac{(p-2m)(p-2m+1)}{1\,.\,2}$ *conditiones ut aequatio differentialis linearis primi ordinis inter p variabiles* (20.) *per* $m < \frac{1}{2}p$ *aequationes integrari possit, eaedemque sunt conditiones quibus efficitur, ut p aequationes lineares* (21.) *ex earum numero* $2m$ *fluant.* Si $p = 2m+1$, prodit una conditio iam a Cl. *Pfaff* olim exhibita, quae si $m = 1$ notam conditionem integrabilitatis suppeditat. Si $p = 2m+2$, locum habere debent tres conditiones, quas pro $m = 1$ accuratius examinemus.

Sit igitur propositum indagare conditiones, ut aequatio differentialis linearis inter *quatuor* variabiles,

$$35.\quad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0,$$

unica aequatione integrari possit. Qua aequatione si exprimitur una variabilium x_4 per x_1, x_2, x_3, proposita (35.) identica fieri debet, id quod aequationes poscit sequentes,

$$36.\quad \frac{\partial x_4}{\partial x_1} = -\frac{X_1}{X_4},\quad \frac{\partial x_4}{\partial x_2} = -\frac{X_2}{X_4},\quad \frac{\partial x_4}{\partial x_3} = -\frac{X_3}{X_4}.$$

Secunda et tertia earum aequationum suppeditat,

$$X_4^2 \frac{\partial^2 x}{\partial x_2 \partial x_3} = X_2 \left\{\frac{\partial X_4}{\partial x_3} - \frac{X_3}{X_4}\cdot\frac{\partial X_4}{\partial x_4}\right\} - X_4 \left\{\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{X_3}{X_4}\cdot\frac{\partial X_2}{\partial x_4}\right\}$$
$$= X_3 \left\{\frac{\partial X_4}{\partial x_2} - \frac{X_2}{X_4}\cdot\frac{\partial X_4}{\partial x_4}\right\} - X_4 \left\{\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{X_2}{X_4}\cdot\frac{\partial X_3}{\partial x_4}\right\}.$$

Unde ponendo $a_{i,k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$ similesque aequationes de tertia et prima, de prima et secunda aequationum (36.) deducendo obtinentur tres primae aequationum sequentium, quibus duas alias addidi ex iis provenientes,

$$37.\quad \begin{cases} 0 = \quad * \quad + a_{3,4} X_2 + a_{4,2} X_3 + a_{2,3} X_4, \\ 0 = a_{4,3} X_1 \quad * \quad + a_{1,4} X_3 + a_{3,1} X_4, \\ 0 = a_{2,4} X_1 + a_{4,1} X_2 \quad * \quad + a_{1,2} X_4, \\ 0 = a_{3,2} X_1 + a_{1,3} X_2 + a_{2,1} X_3 \quad * \quad, \\ 0 = a_{2,3} a_{1,4} + a_{3,1} a_{2,4} + a_{1,2} a_{3,4}. \end{cases}$$

Ad easdem autem relationes secundum propositionem generalem supra conditam pervenire debemus, si quaerimus conditiones ut quatuor aequationum linearium,

$$X_1 dt = \quad * \quad + a_{1,2} dx_2 + a_{1,3} dx_3 + a_{1,4} dx_4,$$
$$X_2 dt = a_{2,1} dx_1 \quad * \quad + a_{2,3} dx_3 + a_{2,4} dx_4,$$
$$X_3 dt = a_{3,1} dx_1 + a_{3,2} dx_2 \quad * \quad + a_{3,4} dx_4,$$
$$X_4 dt = a_{4,1} dx_1 + a_{4,2} dx_2 + a_{4,3} dx_3 \quad *$$

binae e duabus reliquis fluant. Quod re vera fieri, facile comprobatur. Aequationum (37.) quatuor primae sunt notae conditiones integrabilitatis aequationis differentialis linearis primi ordinis inter tres variabiles, ex eadem aequatione (35.) provenientis si successive x_1, x_2, x_3, x_4 constantes ponuntur. Quatuor illarum aequationum ternae cum quartam secum ducant, sequitur, *si tres aequationes,*

$$X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0,$$
$$X_1 dx_1 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0,$$
$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_4 dx_4 = 0,$$

habitis respective x_1, x_2, x_3 *pro Constantibus, conditioni integrabilitatis*

satisfaciant, hanc quoque aequationem,

$$X_1\,dx_1+X_2\,dx_2+X_3\,dx_3 = 0,$$

si in ea x_4 pro Constante habeatur, conditioni integrabilitatis satisfacturam esse, nec non aequationem, $X_1\,dx_1+X_2\,dx_2+X_3\,dx_3+X_4\,dx_4=0$, in qua omnes quatuor quantitates x_1, x_2, x_3, x_4 variabiles sunt, unica aequatione integrari posse. Ut ipsa absolvatur integratio, opus erit integratione completa trium aequationum differentialium primi ordinis inter duas variabiles, id quod simili ratione demonstratur atque in tractatibus Calculi Integralis probatur, ad integrandam aequationem differentialem linearem primi ordinis inter tres variabiles, conditioni integrabilitatis satisfacientem, requiri integrationem completam duarum aequationum differentialium primi ordinis inter duas variabiles. Quae res in tractatibus ita proponi solet, ut alteram ne condere quidem liceat aequationem differentialem, nisi iam antea altera complete integrata habeatur. At observo, si aequatio differentialis inter tres variabiles x_1, x_2, x_3, conditioni integrabilitatis satisfaciens, est $X_1\,dx_1+X_2\,dx_2+X_3\,dx_3 = 0$, pro duabus aequationibus inter duas variabiles integrandis sumi posse has, quae *separatim* tractari possint.

$$X_1\,dx_1+X_2\,dx_2 = 0, \qquad X_2^0\,dx_2+X_3^0\,dx_3 = 0,$$

quae e proposita proveniunt, prima habendo x_3 pro Constante, secunda ponendo $x_1=0$. Scilicet post integrationem secundae in locum ipsius x_2 substituenda est ea quantitatum x_1, x_2, x_3 functio, quae per integrationem primae aequiparatur valori variabilis x_2 qui ipsi $x_1=0$ respondet. Similiter, si proponitur integrare aequationem inter quatuor variabiles,

$$X_1\,dx_1+X_2\,dx_2+X_3\,dx_3+X_4\,dx_4 = 0,$$

conditionibus (37.) locum habentibus, pro tribus aequationibus inter duas variabiles, quae integrandae sunt, sumi possunt sequentes separatim tractandae,

$$X_1\,dx_1+X_2\,dx_2=0, \quad X_2^0\,dx_2+X_3^0\,dx_3=0, \quad X_3^{00}\,dx_3+X_4^{00}\,dx_4=0,$$

in quibus designant X_2^0 et X_3^0 valores in quos X_2 et X_3 abeunt pro $x_1=0$, porro X_3^{00} et X_4^{00} valores in quos X_3 et X_4 pro $x_1=x_2=0$ abeunt; deinde in prima aequatione x_3 et x_4, in secunda x_4 pro Constantibus habendae sunt. Integrata tertia aequatione, ipsi x_3 ea substituenda est quantitatum x_2, x_3, x_4 functio, quae per integrationem secundae aequat variabilis x_3 valorem ipsi $x_2=0$ respondentem; ac deinde ipsi x_2 ea quantitatum x_1, x_2, x_3, x_4 functio substituenda est, quae per aequationis primae integrationem aequat variabilis x_2 valorem ipsi $x_1=0$ respondentem.

Propositis p aequationibus differentialibus vulgaribus inter $p+1$ variabiles quibuscunque, aequationes m inter ipsas variabiles sunt integrales propositarum,

si efficiunt, ut harum numerus m e reliquis $p-m$ fluat; porro tale constituunt aequationum integralum systema, e quo per differentiationem aequationumque differentialium substitutionem aliae novae non obtineantur, si earum adiumento non plures quam m aequationes differentiales e reliquis fluunt. Antecedentibus vidimus, per m aequationes, quibus integretur aequatio differentialis vulgaris linearis inter p variabiles (20.), fieri ut e p aequationum differentialium vulgarium (21.) numero m reliquae $p-m$ sponte fluant. Unde si $p-m=m$ sive $p=2m$, qui est casus problematis *Pfaffiani*, sequitur, *quascunque* m aequationes, quibus integretur aequatio differentialis linearis primi ordinis inter $2m$ variabiles,

$$0 = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots + X_{2m}\,dx_{2m},$$

haberi posse pro integralibus systematis $2m$ aequationum differentialium vulgarium,

$$X_k\,dt = a_{k,1}\,dx_1 + a_{k,2}\,dx_2 \ldots + a_{k,2m}\,dx_{2m},$$

ex iisque per differentiationem novas deduci non posse aequationes integrales. Si $m < \frac{1}{2}p$ atque aequatio (20.) integrari potest m aequationibus, vidimus p aequationum (21.) tantum $2m$ a se independentes esse, reliquas $p-2m$ ex iis sponte fluere; unde ex arbitrio iis addere licet $p-2m$ aequationes differentiales, ut habeatur systema p aequationum differentialium inter $p+1$ variabiles. Eo casu aequationes m, quibus aequatio (20.) integrari supponitur, rursus haberi possunt pro aequationibus eius systematis integralibus, quaecunque sint $p-2m$ aequationes differentiales ipsis (21.) ex arbitrio adiectae, cum illae m aequationes efficiant, quod e (32.) sequebatur, ut m aequationes differentiales $u_{m+1}=0, u_{m+2}=0, \ldots u_{2m}=0$ ex aliis systematis aequationibus differentialibus, $u_1=0$, $u_2=0$, $\ldots$ $u_m=0$ obtineantur.

Designantibus A_1, A_2 etc. quascunque variabilium $x_1, x_2, \ldots x_p$ functiones, quoties aequationum differentialium,

$$dx_1 : dx_2 \ldots : dx_p = A_1 : A_2 \ldots A_p,$$

dantur aequationes integrales m, quarum differentiatione aliae novae non prodeunt, earumque ope exprimuntur $x_1, x_2, \ldots x_m$ ut functiones variabilium x_{m+1}, $x_{m+2}, \ldots x_p$, eas functiones satisfacere constat systemati aequationum differentialium partialium linearium primi ordinis sequenti,

$$38.\quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = A_{m+1}\dfrac{\partial x_1}{\partial x_{m+1}} + A_{m+2}\dfrac{\partial x_1}{\partial x_{m+2}} \ldots + A_p\dfrac{\partial x_1}{\partial x_p}, \\ A_2 = A_{m+1}\dfrac{\partial x_2}{\partial x_{m+1}} + A_{m+2}\dfrac{\partial x_2}{\partial x_{m+2}} \ldots + A_p\dfrac{\partial x_2}{\partial x_p}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ A_m = A_{m+1}\dfrac{\partial x_m}{\partial x_{m+1}} + A_{m+2}\dfrac{\partial x_m}{\partial x_{m+2}} \ldots + A_p\dfrac{\partial x_m}{\partial x_p}. \end{array} \right.$$

Qua de re pluribus egi in alia Commentatione Diar. *Crell.* Vol. XXIII. inserta. Systema (38.) ita est comparatum ut in quaque aequatione eiusdem functionis reperiantur differentialia partialia secundum diversas variabiles independentes sumta, atque differentialia partialia diversarum functionum secundum eandem variabilem independentem in diversis aequationibus sumta eodem afficiantur Coëfficiente. Eiusmodi systematis hoc, a cuius solutione problema *Pfaffianum* pendet,

$$39. \quad v_{m+1} = 0, \quad v_{m+2} = 0, \quad \ldots . \quad v_{2m} = 0,$$

quodammodo inversum est, sicuti e functionis v_i expressione (24.) patet; quippe in quaque huius systematis aequatione diversarum functionum differentialia reprehenduntur secundum eandem variabilem sumta, atque eiusdem functionis differentialia, secundum diversas variabiles independentes in diversis aequationibus sumta, eodem afficiuntur Coëfficiente. Secundum antecedentia e systemate (39.) sequitur aliud eius inversum formae systematis (38.). Nam ubi aequationes (2.) ad formam aequationum (9.) revocamus, sequitur ex antecedentibus, m aequationes quae systemati (39.) satisfaciant sive quibus (1.) integretur, ipsarum (9.) fieri aequationes integrales, quarum differentiatione aliae novae non prodeant, ideoque easdem systemati aequationum (38.) satisfacere. Unde haec obtinetur

Propositio.

„*E systemate aequationum differentialium partialium linearium primi ordinis huiusmodi,*

$$39^*. \quad \begin{cases} X_{m+1} = X_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial x_{m+1}} + X_2 \dfrac{\partial x_2}{\partial x_{m+1}} \ldots + X_m \dfrac{\partial x_m}{\partial x_{m+1}}, \\ X_{m+2} = X_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial x_{m+2}} + X_2 \dfrac{\partial x_2}{\partial x_{m+2}} \ldots + X_m \dfrac{\partial x_m}{\partial x_{m+2}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{2m} = X_1 \dfrac{\partial x_1}{\partial x_{2m}} + X_2 \dfrac{\partial x_2}{\partial x_{2m}} \ldots + X_m \dfrac{\partial x_m}{\partial x_{2m}}, \end{cases}$$

hoc sequitur alterum formae quodammodo inversae,

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{m+1} \frac{\partial x_1}{\partial x_{m+1}} + A_{m+2} \frac{\partial x_1}{\partial x_{m+2}} \ldots + A_{2m} \frac{\partial x_1}{\partial x_{2m}}, \\ A_2 &= A_{m+1} \frac{\partial x_2}{\partial x_{m+1}} + A_{m+2} \frac{\partial x_2}{\partial x_{m+2}} \ldots + A_{2m} \frac{\partial x_2}{\partial x_{2m}}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_m &= A_{m+1} \frac{\partial x_m}{\partial x_{m+1}} + A_{m+2} \frac{\partial x_m}{\partial x_{m+2}} \ldots + A_{2m} \frac{\partial x_m}{\partial x_{2m}}, \end{aligned}$$

ubi, posito $a_{k,k'} = \dfrac{\partial X_k}{\partial x_{k'}} - \dfrac{\partial X_{k'}}{\partial x_k}$ *ac designante R aggregatum, e* 1.3.5...

... (2m — 1) terminis huiusmodi

$$a_{1,2}\, a_{3,4} \ldots\ldots a_{2m-1,2m}$$

ratione supra descripta conflatum, fit

$$A_k = \frac{\partial R}{\partial a_{1,k}} X_1 + \frac{\partial R}{\partial a_{2,k}} X_2 \ldots + \frac{\partial R}{\partial a_{2m,k}} X_{2m},$$

omisso termino in X_k ducto."

Huius memorabilis propositionis si demonstrationem cupis ab aequationum differentialium vulgarium consideratione independentem, rem sic adornare licet.

Sit rursus

$$v_i = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_i} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_i} \ldots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial x_i} + X_i,$$

ac designantibus

$$y,\ y_1,\ \ldots\ y_{2m}$$

quantitates *indefinitas*, ponatur

$$U_k = X_k \cdot y - a_{k,1} y_1 - a_{k,2} y_2 \ldots - a_{k,2m} y_{2m},$$

$$Y_h = y_h - \frac{\partial x_h}{\partial x_{m+1}} y_{m+1} - \frac{\partial x_h}{\partial x_{m+2}} y_{m+2} \ldots - \frac{\partial x_h}{\partial x_{2m}} y_{2m},$$

$$u_k = U_k + a_{k,1} Y_1 + a_{k,2} Y_2 \ldots + a_{k,m} Y_m.$$

Eodem modo atque (32.) probavimus, demonstratur, quaecunque sint x_1, x_2, ... x_m reliquarum variabilium x_{m+1}, x_{m+2}, ... x_{2m} functiones, fieri

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_i} u_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_i} u_2 \ldots + \frac{\partial x_m}{\partial x_i} u_m + u_i = v_i y + \sum_{i'} \left\{ \left(\frac{\partial v_{i'}}{\partial x_i}\right) - \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_{i'}}\right) \right\} y_{i'}.$$

Partes ad dextram signi aequalitatis evanescunt, ubi pro x_1, x_2, ... x_m sumuntur functiones satisfacientes m aequationibus $v_i = 0$, quae sunt ipsae functiones in theoremate tradito propositae, quas a se independentes esse subintelligo. Hinc si quantitatum u_k expressiones substituuntur atque statuitur

$$L_{i,h} = \frac{\partial x_1}{\partial x_i} a_{1,h} + \frac{\partial x_2}{\partial x_i} a_{2,h} \ldots + \frac{\partial x_m}{\partial x_i} a_{m,h} + a_{i,h},$$

sequitur per m aequationes $v_i = 0$ obtineri m sequentes,

$$40. \quad 0 = \frac{\partial x_1}{\partial x_i} U_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_i} U_2 \ldots + \frac{\partial x_m}{\partial x_i} U_m + L_{i,1} Y_1 + L_{i,2} Y_2 \ldots + L_{i,m} Y_m.$$

Supponamus, quantitatum indefinitarum y, y_1 etc. functiones lineares U_1, U_2, ... U_{2m} a se independentes esse, sive quantitatem, supra per R designatam,

$$\Sigma\, a_{1,2}\, a_{3,4} \ldots a_{2m-1,2m}$$

neque per se neque substituendo functionum x_k valores evanescere. Quae se-

cundum supra tradita est conditio ut aequatio

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 \ldots\ldots + X_{2m}\,dx_{2m} = 0$$

non paucioribus quam m aequationibus integrari possit. Eo casu etiam m functiones ipsarum $Y_1,\ Y_2,\ \ldots.\ Y_m$ lineares, quas per H_i designabo,

$$L_{i,1}\,Y_1 + L_{i,2}\,Y_2 \ldots. + L_{i,m}\,Y_m = H_i,$$

a se independentes erunt, sive non dabuntur factores ab ipsis y_k independentes λ_1, λ_2 etc., qui efficiant

$$\lambda_1 H_{m+1} + \lambda_2 H_{m+2} \ldots. + \lambda_m H_{2m} = 0.$$

Nam si eiusmodi dantur factores, secundum (40.) aut $x_1, x_2, \ldots. x_i$ non a se independentes sunt aut datur aequatio inter functiones lineares $U_1, U_2, \ldots. U_m$, quod utrumque contra suppositionem est. Functiones autem a se independentes H_{m+1}, H_{m+2}, ... H_{2m} omnes simul evanescere non possunt nisi simul evanescunt omnes $Y_1,\ Y_2,\ \ldots.\ Y_m$. Iam igitur cum pro ipsarum y, y_1 etc. valoribus

$$y = R,\quad y_1 = A_1,\quad y_2 = A_2,\quad \ldots.\quad y_{2m} = A_{2m}$$

omnes simul evanescant $U_1,\ U_2,\ \ldots.\ U_{2m}$, siquidem quantitatum A_k, R valores sunt ipsi in Propositione tradita assignati, ideoque omnes secundum (40.) evanescant H_i, pro valoribus illis omnes quoque $Y_1,\ Y_2,\ \ldots.\ Y_m$ evanescere debent, sive pro ipsius h valoribus 1, 2, ... m fieri debet,

$$0 = A_h - \frac{\partial x_h}{\partial x_{m+1}} A_{m+1} - \frac{\partial x_h}{\partial x_{m+2}} A_{m+2} \ldots. - \frac{\partial x_h}{\partial x_{2m}} A_{2m},$$

quae est propositio demonstranda.

Propositionis antecedentis pro casu simplicissimo $m=2$ hoc addam exemplum:

„Ubi semper ponitur $a_{\alpha,\beta} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial X_\beta}{\partial x_\alpha}$, ex aequationibus

$$-X_3 = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_3} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_3},$$

$$-X_4 = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_4} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_4}$$

fluunt sequentes,

$$a_{3,4} X_2 + a_{4,2} X_3 + a_{2,3} X_4$$
$$= (a_{2,4} X_1 + a_{4,1} X_2 + a_{1,2} X_4) \frac{\partial x_1}{\partial x_3} + (a_{3,2} X_1 + a_{1,3} X_2 + a_{2,1} X_3) \frac{\partial x_1}{\partial x_4},$$

$$a_{4,3} X_1 + a_{1,4} X_3 + a_{3,1} X_4$$
$$= (a_{2,4} X_1 + a_{4,1} X_2 + a_{1,2} X_4) \frac{\partial x_2}{\partial x_3} + (a_{3,2} X_1 + a_{1,3} X_2 + a_{2,1} X_3) \frac{\partial x_2}{\partial x_4}."$$

Si $p > 2m$ atque variabilium independentium $x_{m+1},\ x_{m+2},\ \ldots.\ x_p$ functiones $x_1,\ x_2,\ \ldots.\ x_m$ ita determinari possunt, ut $p-m$ aequationibus $v_i = 0$ satis-

faciant, habentur complura *systemata* aequationum differentialium partialium, ad instar aequationum (38.) formata. Videlicet e numero m aequationum

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad \dots \quad v_p = 0$$

per Propositionem antecedentem deducere licet alterum m aequationum differentialium partialium systema (38.), eaque ratione aliud aliudque systema (38.) obtinebitur, prout aliae $p-2m$ e $p-m$ variabilibus independentibus Constantium loco habentur.

Ponamus iam esse $x_1, x_2, \dots x_m$ variabilium $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_p$ functiones *involventes Constantem Arbitrariam* α, sitque

$$41. \quad w = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \dots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial \alpha},$$

porro

$$v_i = X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_i} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_i} \dots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial x_i} + X_i,$$

$$u_k = X_k dt + \{a_{k,1} dx_1 + a_{k,2} dx_2 \dots + a_{k,p} dx_p\}$$

$$= X_k dt - dX_k + \frac{\partial X_1}{\partial x_k} dx_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_k} dx_2 \dots + \frac{\partial X_p}{\partial x_k} dx_p$$

$$= X_k dt - dX_k + \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_i + \sum_{hi} \frac{\partial X_h}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_h}{\partial x_i} dx_i.$$

Quae ubi substituuntur in formula,

$$dw - \left\{\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} dX_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} dX_2 \dots + \frac{\partial x_m}{\partial \alpha} dX_m\right\}$$

$$= X_1 d\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + X_2 d\frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \dots + X_m d\frac{\partial x_m}{\partial \alpha}$$

$$= \sum_{hi} X_h \frac{\partial^2 x_h}{\partial \alpha \cdot \partial x_i} dx_i,$$

obtinetur

$$42. \quad dw - w\, dt + \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} u_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} u_2 \dots + \frac{\partial x_m}{\partial \alpha} u_m$$

$$= \sum_i \left\{\left(\frac{\partial X_i}{\partial \alpha}\right) + \sum_h \left[\left(\frac{\partial X_h}{\partial \alpha}\right) \frac{\partial x_h}{\partial x_i} + X_h \frac{\partial^2 x_h}{\partial \alpha \partial x_i}\right]\right\} dx_i$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial \alpha}\right) dx_i,$$

siquidem uncis differentialia partialia includendo innuitur, ante differentiationes substitutos esse functionum $x_1, x_2, \dots x_m$ valores. Si m aequationibus, quibus $x_1, x_2, \dots x_m$ determinantur, integratur aequatio,

$$0 = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 \dots + X_p dp,$$

locum habere debent $p-m$ aequationes $v_i=0$, unde aequationis (42.) dextra pars evanescit sive fit

$$43.\qquad dw-w\,dt+\frac{\partial x_1}{\partial\alpha}u_1+\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}u_2\ldots\ldots+\frac{\partial x_m}{\partial\alpha}u_m=0.$$

Si $p\geqq 2m$, vidimus supra, m aequationibus illis fieri ut de m aequationibus differentialibus $u_k=0$ fluant $p-m$ reliquae $u_i=0$, ita ut m aequationes illae sint aequationes integrales systematis aequationum differentialium $u_k=0$, quarum $p-2m$ e reliquis fluunt. Formula (43.) docet, si insuper inter variabiles $t,\ x_{m+1},\ x_{m+2},\ \ldots\ldots x_p$ statuatur aequatio $w=\beta e^t$ sive

$$44.\qquad X_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\ldots\ldots+X_m\frac{\partial x_m}{\partial\alpha}=\beta e^t,$$

designante β Constantem Arbitrariam, ipsas m aequationes differentiales $u_k=0$ in earum $m-1$ redire, ideoque (44.) esse novam eiusdem systematis $u_k=0$ aequationem integralem. Si m aequationes, quibus aequatio

$$X_1\,dx_1+X_2\,dx_2\ldots\ldots+X_p\,dx_p=0$$

integratur, plures involvunt Constantes Arbitrarias, per (44.) totidem obtinentur systematis $u_k=0$ aequationes integrales, quas diversae ingrediuntur Constantes Arbitrariae β, et e quarum binis per solam divisionem eliminatur t. Quae manent aequationes integrales, quaecunque $p-2m$ aequationes differentiales adiiciantur systemati $u_k=0$, quippe quod tantum $2m$ aequationum differentialium vices gerit. Ubi Constantes Arbitrariae sunt numero m, habetur problematis *Pfaffiani* solutio completa, simulque m aequationes (44.) iunctae m aequationibus, quibus aequatio (20.) integratur, suppeditant systematis aequationum differentialium (21.) integrationem completam.

Si $p=2m$, aequationes Constantem Arbitrariam α involventes, quibus aequatio

$$X_1\,dx_1+X_2\,dx_2\ldots\ldots+X_{2m}\,dx_{2m}=0$$

integratur et quibus determinabantur functiones $x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots x_m$, sunt aequationes integrales systematis aequationum differentialium (2.), sive resolutione earum provenientium (4.):

$$dx_1:dx_2\ldots\ldots:dx_{2m}=A_1:A_2\ldots\ldots:A_{2m}.$$

Quarum Multiplicatorem, docent formulae (13.) et (44.), per illas m aequationes integrales induere valorem,

$$M=\left\{X_1\frac{\partial x_1}{\partial\alpha}+X_2\frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\ldots\ldots+X_m\frac{\partial x_m}{\partial\alpha}\right\}^{-m}.$$

Si $X_{2m} = -1$ atque omnes $X_1, X_2, \dots X_{2m-1}$ variabili x_{2m} vacant, vidimus supra Multiplicatorem Constanti aequari. Ac reapse eo casu evanescente dt e (44.) eruitur,

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \dots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial \alpha} = \beta,$$

quae ipsarum (4.) aequatio integralis est. Quae pro $m = 2$ cum formula (19.) convenit, quam supra alia via erui.

Methodum ad solvendum problema *Pfaffianum* ab ipso autore adhibitam, data occasione observo, per plures et altiores procedere integrationes quam methodus vera et genuina poscat. Quam novam methodum pro exemplo simplice explicabo. Ad aequationem differentialem

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0$$

per duas aequationes integrandam poscit *Pfaffiana* methodus integrationem completam systematis trium aequationum differentialium primi ordinis inter quatuor variabiles ac deinde unius aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles. Illius igitur systematis Integrali uno invento, secundum illam methodum restat integratio completa duarum aequationum differentialium primi ordinis inter tres variabiles sive unius aequationis differentialis secundi ordinis inter duas variabiles ac deinde aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles. At observo, si Integrali illo invento exprimatur x_4 per x_1, x_2, x_3, aequationem differentialem propositam abire in aliam linearem primi ordinis inter tres variabiles, conditioni integrabilitatis satisfacientem; cuius integrationem vidimus absolvi posse per integrationes separatas duarum aequationum differentialium primi ordinis inter duas variabiles. Unde in locum aequationis differentialis secundi ordinis tantum integrandae sunt duae aequationes differentiales separatae primi ordinis, quae est reductio maxime insignis; integrationi autem aequationis differentialis primi ordinis postremo praestandae omnino supersedetur. Tractatio huius rei gravissimae completa ac generalis alii Commentationi reservanda est.

Novum Principium Generale Mechanicum quod e Principio Ultimi Multiplicatoris fluit.

§. 22.

Sint x_i, y_i, z_i Coordinatae orthogonales puncti massa m_i praediti; sint vires massam m_i secundum directiones Coordinatarum sollicitantes X_i, Y_i, Z_i. Ubi systema n punctorum materialium $m_1, m_2, \dots m_n$ prorsus liberum est, inter tempus t atque Coordinatas punctorum habentur $3n$ aequationes differentiales secundi ordinis,

$$1.\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = \dfrac{1}{m_i} X_i, \\[2mm] \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = \dfrac{1}{m_i} Y_i, \\[2mm] \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = \dfrac{1}{m_i} Z_i. \end{cases}$$

Vires X_i, Y_i, Z_i suppositione maxime generali erunt functiones $3n$ Coordinatarum x_i, y_i, z_i, temporis t atque differentialium primorum Coordinatarum,

$$x_i' = \frac{dx_i}{dt}, \quad y_i' = \frac{dy_i}{dt}, \quad z_i' = \frac{dz_i}{dt},$$

quae sunt punctorum velocitates in Coordinatarum directiones proiectae. Secundum (5.) §. 14. systematis aequationum differentialium dynamicarum (1.) Multiplicator definitur formula,

$$2.\quad \frac{d \log M}{dt} + \Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_i'} + \frac{\partial Y_i}{\partial y_i'} + \frac{\partial Z_i}{\partial z_i'}\right) = 0,$$

indice i valente ad omnia puncta materialia systematis.

Quoties vires sollicitantes a solis massarum positionibus in spatio pendent sive praeterea etiam a tempore t, quantitates X_i, Y_i, Z_i ipsa x_i', y_i', z_i' omnino non involvunt, ideoque evanescente expressione

$$\Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_i'} + \frac{\partial Y_i}{\partial y_i'} + \frac{\partial Z_i}{\partial z_i'}\right),$$

statuere licet

$$M = 1.$$

Hinc secundum principium ultimi Multiplicatoris sequitur, si systema punctorum materialium liberum sit atque vires mobilia propellentes ab eorum velocitatibus non pendeant, ultimam integrationem, vel si vires etiam a tempore non explicite pendeant, *duas ultimas integrationes* revocari posse ad Quadraturas. Videlicet posteriore casu constat tempus t prorsus separari posse et post alias omnes integrationes transactas per Quadraturam inveniri.

Idem iam demonstrabo pro casu generali quo systema n punctorum materialium non est liberum, sed certis obnoxium est conditionibus, quae exprimantur per aequationes inter Coordinatas x_i, y_i, z_i locum habentes,

$$3.\quad \Pi = 0, \quad \Pi_1 = 0, \quad \text{etc.}$$

Aequationes differentiales dynamicas pro motu sic impedito praecepit ill. *Lagrange* haberi sequentes,

$$4.\quad \begin{cases} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i}\left\{X_i + \lambda\frac{\partial\Pi}{\partial x_i} + \lambda_1\frac{\partial\Pi_1}{\partial x_i}\text{ etc.}\right\}, \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i}\left\{Y_i + \lambda\frac{\partial\Pi}{\partial y_i} + \lambda_1\frac{\partial\Pi_1}{\partial y_i}\text{ etc.}\right\}, \\ \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i}\left\{Z_i + \lambda\frac{\partial\Pi}{\partial z_i} + \lambda_1\frac{\partial\Pi_1}{\partial z_i}\text{ etc.}\right\}, \end{cases}$$

factoribus λ, λ_1 etc. determinatis per aequationes lineares, quae obtinentur substituendo aequationes differentiales (4.) in aequationibus conditionalibus bis differentiatis,

$$\frac{d^2\Pi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\Pi_1}{dt^2} = 0, \quad \text{etc.}$$

Ad eas aequationes lineares formandas pono

$$5.\quad \begin{cases} U = \Sigma\left\{x_i'\frac{d.\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}}{dt} + y_i'\frac{d.\frac{\partial\Pi}{\partial y_i}}{dt} + z_i'\frac{d.\frac{\partial\Pi}{\partial z_i}}{dt}\right\}, \\ U_1 = \Sigma\left\{x_i'\frac{d.\frac{\partial\Pi_1}{\partial x_i}}{dt} + y_i'\frac{d.\frac{\partial\Pi_1}{\partial y_i}}{dt} + z_i'\frac{d.\frac{\partial\Pi_1}{\partial z_i}}{dt}\right\}, \\ \text{etc.} \qquad \text{etc.}, \end{cases}$$

fit

$$0 = \frac{d^2\Pi}{dt^2} = \Sigma\left\{\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}.\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{\partial\Pi}{\partial y_i}.\frac{d^2 y_i}{dt^2} + \frac{\partial\Pi}{\partial z_i}.\frac{d^2 z_i}{dt^2}\right\} + U,$$

$$0 = \frac{d^2\Pi_1}{dt^2} = \Sigma\left\{\frac{\partial\Pi_1}{\partial x_i}.\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{\partial\Pi_1}{\partial y_i}.\frac{d^2 y_i}{dt^2} + \frac{\partial\Pi_1}{\partial z_i}.\frac{d^2 z_i}{dt^2}\right\} + U_1,$$

$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Ubi in his aequationibus substituuntur formulae (4.) atque ponitur,

$$6.\quad \begin{cases} V = U + \Sigma\frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}X_i + \frac{\partial\Pi}{\partial y_i}Y_i + \frac{\partial\Pi}{\partial z_i}Z_i\right\}, \\ V_1 = U_1 + \Sigma\frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial\Pi_1}{\partial x_i}X_i + \frac{\partial\Pi_1}{\partial y_i}Y_i + \frac{\partial\Pi_1}{\partial z_i}Z_i\right\}, \\ \text{etc.} \qquad \text{etc.}, \end{cases}$$

porro

$$7.\quad (\alpha,\beta) = (\beta,\alpha) = \Sigma\frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial\Pi_\alpha}{\partial x_i}.\frac{\partial\Pi_\beta}{\partial x_i} + \frac{\partial\Pi_\alpha}{\partial y_i}.\frac{\partial\Pi_\beta}{\partial y_i} + \frac{\partial\Pi_\alpha}{\partial z_i}.\frac{\partial\Pi_\beta}{\partial z_i}\right\},$$

aequationes, quibus λ, λ_1 determinantur, evadunt sequentes,

$$8. \quad \begin{cases} 0 = V + (0,0)\lambda + (0,1)\lambda_1 \text{ etc.}, \\ 0 = V_1 + (1,0)\lambda + (1,1)\lambda_1 \text{ etc.}, \\ \quad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{cases}$$

His de factorum λ, λ_1 etc. valoribus praemissis, aequationum *Lagrangianarum* (4.) investigabo Multiplicatorem.

Ac primum observo, secundum ea quae de viribus sollicitantibus statuta sunt, in dextris partibus aequationum (4.) solos factores λ, λ_1 etc. implicare differentialia prima x'_i, y'_i, z'_i. Unde e (5.) §. 14. Multiplicator M definietur formula,

$$-\frac{d\log M}{dt} = \Sigma \frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial x'_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial y'_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial z'_i}\right\}$$
$$+ \Sigma \frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \lambda_1}{\partial x'_i} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial \lambda_1}{\partial y'_i} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial \lambda_1}{\partial z'_i}\right\}$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.},$$

quam posito

$$9. \quad A_{\alpha,\beta} = \Sigma \frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \lambda_\beta}{\partial x'_i} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial \lambda_\beta}{\partial y'_i} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial \lambda_\beta}{\partial z'_i}\right\},$$

sic exhibere licet

$$10. \quad d\log M = -\{A_{0,0} + A_{1,1} + \text{etc.}\}\, dt.$$

Ad quantitates $A_{0,0}$, $A_{1,1}$ etc. determinandas, aequationes (5.),

$$0 = V_\beta + (\beta,0)\lambda + (\beta,1)\lambda_1 \text{ etc.},$$

quarum Coëfficientes $(\beta,0)$, $(\beta,1)$ etc. solarum x_i, y_i, z_i functiones sunt, secundum omnes quantitates x'_i, y'_i, z'_i differentientur, aequationesque differentiationibus provenientes respective per quantitates

$$\frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i}, \quad \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i}, \quad \frac{1}{m_i}\cdot\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i}$$

multiplicatae consummentur: prodit

$$11. \quad 0 = u_{\alpha,\beta} + (\beta,0)A_{\alpha,0} + (\beta,1)A_{\alpha,1} \text{ etc.},$$

siquidem statuitur

$$u_{\alpha,\beta} = \Sigma \frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial V_\beta}{\partial x'_i} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial V_\beta}{\partial y'_i} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial V_\beta}{\partial z'_i}\right\}.$$

Cum secundum (6.) habeatur

$$\frac{\partial V_\beta}{\partial x'_i} = \frac{\partial U_\beta}{\partial x'_i}, \quad \frac{\partial V_\beta}{\partial y'_i} = \frac{\partial U_\beta}{\partial y'_i}, \quad \frac{\partial V_\beta}{\partial z'_i} = \frac{\partial U_\beta}{\partial z'_i},$$

quantitates $u_{\alpha,\beta}$ sic repraesentare licet,

$$u_{\alpha,\beta} = \Sigma \frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i}.\frac{\partial U_\beta}{\partial x'_i} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i}.\frac{\partial U_\beta}{\partial y'_i} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i}.\frac{\partial U_\beta}{\partial y'_i}\right\}.$$

At e (5.) obtinetur, evolutione differentialium $d.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial x_i}$ etc. facta,

$$12.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U_\beta}{\partial x'_i} = 2\,\dfrac{d.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial x_i}}{dt}, \\[2ex] \dfrac{\partial U_\beta}{\partial y'_i} = 2\,\dfrac{d.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial y_i}}{dt}, \\[2ex] \dfrac{\partial U_\beta}{\partial z'_i} = 2\,\dfrac{d.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial z_i}}{dt}, \end{cases}$$

quibus valoribus substitutis fit

$$13.\quad u_{\alpha,\beta} = 2\Sigma\frac{1}{m_i}\left\{\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i}.\frac{d.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial x_i}}{dt} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i}.\frac{d.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial y_i}}{dt} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i}.\frac{d.\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial z_i}}{dt}\right\}.$$

Cuius aequationis beneficio obtinentur quantitatum (α,β) per formulam (7.) definitarum differentialia,

$$14.\quad \frac{d.(\alpha,\beta)}{dt} = \frac{d.(\beta,\alpha)}{dt} = \tfrac{1}{2}\{u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha}\}.$$

In aequatione (11.) indici β valores 0, 1, 2 etc. tribuendo obtinentur aequationes lineares quibus quantitas $A_{\alpha,\alpha}$ determinatur. At quantitatum omnium sic inventarum $A_{\alpha,\alpha}$ aggregatum docui per formulam symbolicam concinnam exhiberi posse, quaecunque sint quantitates $u_{\alpha,\beta}$. Vocetur enim R earum aequationum linearium Determinans sive sit

$$\Sigma \pm (00)(11)(22)\ldots = R,$$

atque statuatur

$$\tfrac{1}{2}\{u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha}\}\,dt = \delta(\alpha,\beta) = \delta(\beta,\alpha):$$

sequitur per ratiocinia similia atque §. 16. adhibui,

$$-\{A_{0,0}+A_{1,1}+\text{etc.}\}\,dt = \delta \log R.$$

Unde cum secundum (14.) sit

$$\delta(\alpha,\beta) = d(\alpha,\beta) \quad \text{ideoque} \quad \delta \log R = d\log R,$$

eruitur e (10.),

$$-\{A_{0,0}+A_{1,1}+\text{etc.}\}\,dt = d\log M = d\log R,$$

id quod suppeditat

$$15.\quad M = R = \Sigma \pm (00)(11)(22)\ldots,$$

qui est Multiplicatoris quaesiti valor.

Operae pretium est adnotare, aequationem inventam $M=R$ non tantum ad casum valere quo functiones X_i, Y_i, Z_i, viribus sollicitantibus aequales, tempus t explicite continent, sed ad hunc quoque casum *quo tempus t ipsas explicite afficit aequationes conditionales* $\Pi=0$, $\Pi_1=0$ etc. Eo casu aequationes dynamicae *Lagrangianae* (4.) eandem servant formam, sed factoribus λ, λ_1 etc. alii competunt valores; quippe quantitatibus U, U_1 etc. ideoque etiam quantitatibus V, V_1 etc. quae aequationum linearium (8.), quibus factores λ, λ_1 etc. determinantur, terminos constantes constituunt, respective addendi sunt termini,

$$2\frac{d.\frac{\partial \Pi}{\partial t}}{dt}, \quad 2\frac{d.\frac{\partial \Pi_1}{\partial t}}{dt}, \quad \text{etc.}$$

At patet, inde non mutari aequationes (12.); unde aequationes quoque (13.) et (14.) immutatae manebunt ideoque formula pro aggregato $\Delta_{0,0}+\Delta_{1,1}$ etc. inventa ideoque etiam ipsius Multiplicatoris valor R.

Si vires sollicitantes X_i, Y_i, Z_i solarum functiones sunt Coordinatarum x_i, y_i, z_i, atque inter has solas dantur aequationes conditionales $\Pi=0$, $\Pi_1=0$ etc., valor $M=R$ inventus secundum principium ultimi Multiplicatoris hoc suppeditat theorema:

Novum Principium Generale Mechanicum.

„*Proponatur motus systematis n punctorum materialium, quae in datis superficiebus vel curvis aut dato quocunque modo inter se connexa manere debent, ita ut inter Coordinatas eorum locum habeant k aequationes conditionales; porro vires sollicitantes et magnitudine et directione solis punctorum positionibus datae sint: semper duas ultimas integrationes absolvere licet Quadraturis. Sint enim*

punctorum massae $m_1, m_2, \ldots. m_n$;

massae m_i *Coordinatae orthogonales* x_i, y_i, z_i, *earumque differentialia prima* $x_i'=\frac{dx_i}{dt}$, $y_i'=\frac{dy_i}{dt}$, $z_i'=\frac{dz_i}{dt}$;

sint aequationes conditionales $\Pi=0$, $\Pi_1=0$, ... $\Pi_{k-1}=0$ *et differentiatione prima ex iis provenientes* $\Pi'=0$, $\Pi_1'=0$, ... $\Pi_{k-1}'=0$, *ubi*

$$\Pi_\alpha' = \Sigma\left\{\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i}x_i' + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i}y_i' + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i}z_i'\right\};$$

inter $6n$ *quantitates* x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i' *praeter* $2k$ *aequationes* $\Pi_\alpha=0$,

$\Pi'_\alpha = 0$, *inventa sint* $6n - k - 2 = \mu$ *Integralia* $F_1 = \alpha_1$, $F_2 = \alpha_2$, ... $F_\mu = \alpha_\mu$, *designantibus* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ *Constantes Arbitrarias; restabit integratio unius aequationis differentialis primi ordinis inter duas quantitates u et v,*

$$v'du - u'dv = 0,$$

ubi u et v esse possunt ipsarum x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i *functiones quaecunque atque u' et v' designant valores differentialium* $\frac{du}{dt}$ *et* $\frac{dv}{dt}$, *adiumento aequationum datarum et integratione inventarum nec non ipsarum aequationum differentialium dynamicarum per ipsas u et v expressos. His praemissis, ponatur*

$$(\alpha, \beta) = \Sigma \frac{1}{m_i} \left\{ \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Pi_\beta}{\partial x_i} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \Pi_\beta}{\partial y_i} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial \Pi_\beta}{\partial z_i} \right\},$$

atque kk quantitatum (α, β) *formetur Determinans R; porro si vocatur* Δ *Determinans functionale* $6n$ *functionum*

$$\Pi,\ \Pi_1,\ \ldots\ \Pi_{k-1},\ \Pi',\ \Pi'_1,\ \ldots\ \Pi'_{k-1},$$
$$F_1,\ F_2,\ \ldots\ F_{6n-k-2},\ u,\ v,$$

$6n$ *quantitatum* x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i *respectu formatum, exprimantur R et* Δ *et ipsa per solas u et v; erit aequationis* $v'du - u'dv = 0$ *Multiplicator* $\frac{R}{\Delta}$, *unde nova habetur aequatio integralis,*

$$\int \frac{R}{\Delta}(v'du - u'dv) = \text{Const.},$$

ubi expressio sub integrationis signo est differentiale completum; denique si nova illa aequatione integrali exprimitur v per u, unde evadit etiam u' solius u functio, invenitur simplice Quadratura,

$$t + \text{Const.} = \int \frac{du}{w}.\text{"}$$

Sub forma antecedente principium novum mechanicum ante hos tres annos cum illustri Academia *Petropolitana* communicavi. Alias eiusdem formas infra tradam. Ultimam integrationem, qua t per Coordinatas exprimatur, Quadraturis absolvi, res erat nota et sponte patens. At inventum novum, penultimam quoque integrationem Quadraturis perfici posse, constituere mihi videbatur principium mechanicum.

Si tempus t vires sollicitantes sive etiam aequationes conditionales afficit, non amplius ipsum t a reliquis variabilibus separare licet, unde eo casu principium nostrum tantum omnium ultimam integrationem per Quadraturas absolvere docet. Supponendo, inventa esse $6n - 2k - 1$ Integralia,

$$F_1 = \alpha_1,\ F_2 = \alpha_2,\ \ldots\ F_{6n-2k-1} = \alpha_{6n-2k-1},$$

atque u et v esse ipsius t et $6n$ quantitatum x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i functiones, Determinans Δ formandum est $6n$ functionum,

$$F_1,\ F_2,\ \ldots.\ F_{2n-2k-1},\ \Pi,\ \Pi_1,\ \ldots.\ \Pi_{k-1},\ \Pi',\ \Pi'_1,\ \ldots.\ \Pi'_{k-1},\ u,\ v,$$

$6n+1$ quantitatum t, x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i respectu; eadem manente ipsius R significatione, rursus exprimenda erunt R, Δ, $u' = \frac{du}{dt}$, $v' = \frac{dv}{dt}$ per u et v, eritque aequatio integralis ultima,

$$\int \frac{R}{\Delta}(v'\,du - u'\,dv) = \text{Const.},$$

ubi expressio sub integrationis signo est differentiale completum.

Habemus hic exemplum, quo ad reductionem aequationum differentialium propositarum adhibentur Integralia ***particularia;*** nam ex aequationibus differentialibus (4.) sequuntur Integralia completa, $\Pi'_\alpha = C_\alpha$, $\Pi_\alpha = C_\alpha t + C'_\alpha$, designantibus C_α, C'_α Constantes Arbitrarias. Neque tamen sunt $\Pi'_\alpha = 0$, $\Pi_\alpha = 0$ aequationes integrales particulares ***quaecunque,*** sed tales pro quibus secundum §. 12. fit ut Multiplicator quo aequationes differentiales earum beneficio reductae gaudent e Multiplicatore propositarum (4.) deduci possit. Scilicet aequatio quidem integralis particularis est $\Pi'_\alpha = 0$, at functio Π'_α ita comparata est ut Constanti Arbitrariae aequiparata suppeditet Integrale completum; porro si reductioni adhibetur aequatio integralis particularis $\Pi'_\alpha = 0$ ex eaque nova deducitur aequatio integralis $\Pi_\alpha = 0$, rursus innotescit functio Π_α, quae Constanti Arbitrariae aequiparata non quidem aequationum differentialium propositarum (4.), sed reductarum tamen Integrale completum suppeditat. Quod secundum §. 12. poscitur et sufficit.

Designentur $3n$ quantitates $x_i\sqrt{m_i}$, $y_i\sqrt{m_i}$, $z_i\sqrt{m_i}$ per

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots.\ \xi_{3n},$$

fit e (7.),

$$(\alpha, \beta) = \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial \xi_2}\cdot\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial \xi_2}\ \ldots. + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial \xi_{3n}}\cdot\frac{\partial \Pi_\beta}{\partial \xi_{3n}}.$$

Unde secundum propositionem notam, in Commentatione ***de formatione atque proprietatibus Determinantium*** §. 13. probatam, quantitatum (α, β) Determinans exhibere licet ut aggregatum quadratorum Determinantium functionum Π, Π_1, ... Π_{k-1}, formatorum respectu quarumque k e numero quantitatum ξ_1, ξ_2, ... ξ_{3n} sumtarum, sive ponere licet

$$16.\qquad R = M = S.\left\{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_{m'}}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi_{m''}}\ \ldots.\ \frac{\partial \Pi_{k-1}}{\partial \xi_{m^{(k)}}}\right\}^2,$$

siquidem m', m'', ... $m^{(k)}$ designant quoscunque k diversos ex indicibus 1, 2, ... $3n$. Ex. gr. pro uno puncto, massa $= 1$ praedito, cuius Coordi-

natae orthogonales sunt x, y, z, et quod moveri debet in superficie cuius aequatio $\Pi = 0$, fit

$$M = R = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)^2;$$

si punctum moveri debet in curva, cuius aequationes sunt $\Pi = 0$, $\Pi_1 = 0$, fit

$$\begin{aligned} M = R = & \left\{\frac{\partial \Pi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial z} - \frac{\partial \Pi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial y}\right\}^2 \\ & + \left\{\frac{\partial \Pi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Pi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial z}\right\}^2 \\ & + \left\{\frac{\partial \Pi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Pi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial x}\right\}^2. \end{aligned}$$

Erat R Determinans aequationum linearium, quibus factores *Lagrangiani* λ, λ_1 etc. determinantur, qui igitur factores indeterminati aut infiniti evadere nequeunt nisi evanescat R. At docet formula (16.), non evanescere posse R nisi singula evanescant Determinantia functionalia

$$\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_{m'}}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi_{m''}}\cdots\frac{\partial \Pi_{k-1}}{\partial \xi_{m^{(k)}}}.$$

Id quod ubi *identice* fit, ipsarum Π, Π_1, ... Π_{k-1} una reliquarum functio est, quo casu aequationes conditionales aut sibi contradicunt aut una quae e reliquis sequitur est superflua. Singula Determinantia illa si non quidem identice evanescunt sed ipsarum aequationum $\Pi = 0$, $\Pi_1 = 0$, ... $\Pi_{k-1} = 0$ adiumento, id indicio est, earum aequationum unam reliquarum ope formam *Quadrati* induere. Eo casu per certas eliminationes et radicis extractionem transformari debent aequationes $\Pi = 0$ etc.; quam praeparationem semper factam esse supponi debet, ut aequationum dynamicarum *Lagrangianarum* usus esse possit.

Si ex antecedentibus semper supponere licet Determinans R non indefinite evanescere, fieri tamen potest ut R evanescat pro punctorum materialium positionibus particularibus determinatis. Quemadmodum si inter tres puncti Coordinatas una vel duae habentur aequationes conditionales repraesentantes superficiem aut curvam apice praeditam, evanescit R si punctum in eo apice collocatur. Ubi agitur de aequilibrio systematis punctorum materialium in eiusmodi positionibus particularibus collocatorum, pro quibus Determinans R evanescit, praecepta statica generalia aut deficiunt aut accuratioribus explicationibus indigent. Nec non si in certo temporis momento systema in motu suo ad tales positiones particulares pervenit, velocitatum intensitates et directiones mutationem finitam in temporis intervallo infinite parvo subeunt. Si, ut in rerum natura fieri solet,

conditiones quibus systema subiicitur non exprimuntur per aequationes, sed per inaequalitates $\Pi > 0$, $\Pi_1 > 0$ etc., inde ab eo temporis momento ipsae plerumque aequationes differentiales (4.) cum aliis commutari debent.

De Multiplicatore aequationum differentialium dynamicarum forma *Lagrangiana* secunda exhibitarum.

§. 23.

III. *Lagrange* aequationes differentiales dynamicas generales alia quoque forma memorabili exhibuit, Coordinatarum $3n$ loco, k aequationibus conditionalibus satisfacientium, introducendo $3n-k$ quantitates a se independentes

$$q_1, \; q_2, \; \ldots \; q_{3n-k}.$$

Quarum ipsae Coordinatae x_i, y_i, z_i tales esse debent functiones, quae substitutae in aequationibus conditionalibus $\Pi = 0$, $\Pi_1 = 0$ etc. sponte iis satisfaciant. Unde etiam aequationem $\Pi_\alpha = 0$ cuiuslibet variabilis q_m respectu differentiando habetur

$$1. \qquad \sum_i \left\{ \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right\} = 0.$$

Statuatur

$$2. \qquad \sum_i \left\{ X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right\} = Q_m;$$

consummando $3n$ aequationes (4.) §. pr. respective per $m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_m}$, $m_i \frac{\partial y_i}{\partial q_m}$, $m_i \frac{\partial z_i}{\partial q_m}$ multiplicatas, evanescunt secundum (1.) aggregata in factores λ, λ_1 etc. ducta, unde prodit

$$3. \qquad \sum_i m_i \left\{ \frac{d^2 x_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_m} \right\} = Q_m.$$

Ponendo $q'_m = \frac{dq_m}{dt}$ et considerando quantitates x'_i ut quantitatum q_m, q'_m functiones, quae dantur formula,

$$x'_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q'_2 \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_{3n-k}} q'_{3n-k},$$

sequitur

$$\frac{\partial x'_i}{\partial q'_m} = \frac{\partial x_i}{\partial q_m}.$$

Porro

$$\frac{\partial x'_i}{\partial q_m} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_m \partial q_1} q'_1 + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_m \partial q_2} q'_2 \ldots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_m \partial q_{3n-k}} q'_{3n-k} = \frac{d \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_m}}{dt}.$$

Eodem modo pro omnibus tribus Coordinatis fit

$$4.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'_i}{\partial q'_m} = \dfrac{\partial x_i}{\partial q_m}, & \dfrac{\partial y'_i}{\partial q'_m} = \dfrac{\partial y_i}{\partial q_m}, & \dfrac{\partial z'_i}{\partial q'_m} = \dfrac{\partial z_i}{\partial q_m}, \\[2ex] \dfrac{\partial x'_i}{\partial q_m} = \dfrac{d.\dfrac{\partial x_i}{\partial q_m}}{dt}, & \dfrac{\partial y'_i}{\partial q_m} = \dfrac{d.\dfrac{\partial y_i}{\partial q_m}}{dt}, & \dfrac{\partial z'_i}{\partial q_m} = \dfrac{d.\dfrac{\partial z_i}{\partial q_m}}{dt}. \end{cases}$$

Unde aequatio (3.) sic exhiberi potest,

$$Q_m = \sum_i m_i \left\{ \frac{dx'_i}{dt} \cdot \frac{\partial x'_i}{\partial q'_m} + \frac{dy'_i}{dt} \cdot \frac{\partial y'_i}{\partial q'_m} + \frac{dz'_i}{dt} \cdot \frac{\partial z'_i}{\partial q'_m} \right\}$$

$$= \frac{d.\sum_i m_i \left\{ x'_i \dfrac{\partial x'_i}{\partial q'_m} + y'_i \dfrac{\partial y'_i}{\partial q'_m} + z'_i \dfrac{\partial z'_i}{\partial q'_m} \right\}}{dt} - \sum_i m_i \left\{ x'_i \frac{\partial x'_i}{\partial q_m} + y'_i \frac{\partial y'_i}{\partial q_m} + z'_i \frac{\partial z'_i}{\partial q_m} \right\},$$

sive ponendo

$$T = \tfrac{1}{2} \sum m_i \{ x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i \},$$

fit

$$Q_m = \frac{d.\dfrac{\partial T}{\partial q'_m}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_m}.$$

Qua in formula ubi T et quantitates Q_m per $6n-2k$ quantitates q_1, q_2, ... q_{3n-k}, q'_1, q'_2, ... q'_{3n-k} exprimuntur atque indici m tribuuntur valores $1, 2, \ldots. 3n-k$, obtinentur $3n-k$ aequationes differentiales secundi ordinis inter tempus t atque $3n-k$ variabiles a se independentes q_m,

$$5.\quad \begin{cases} \dfrac{d.\dfrac{\partial T}{\partial q'_1}}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} - Q_1 = 0, \\[2ex] \dfrac{d.\dfrac{\partial T}{\partial q'_2}}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} - Q_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d.\dfrac{\partial T}{\partial q'_{3n-k}}}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial q_{3n-k}} - Q_{3n-k} = 0, \end{cases}$$

quae altera est forma *Lagrangiana* aequationum differentialium dynamicarum. Aequationum (5.) iam investigabo Multiplicatorem.

Sint aequationes dynamicae,

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots. \quad \varphi_{3n-k} = 0,$$

ubi φ_1, φ_2 etc. designent laevas partes aequationum (5.). Statuamus

$$6. \qquad T = \tfrac{1}{2}\Sigma\, a_{i,i'}\, q'_i q'_{i'},$$

utroque i et i' ad omnes indices 1, 2, ... $3n-k$ valente et designantibus quantitatibus $a_{i,i'} = a_{i',i}$ solarum q_1, q_2, ... q_{3n-k} functiones. Hinc fit e (5.),

$$\varphi_m = \frac{d \sum\limits_i a_{i,m}\, q'_i}{dt} - \tfrac{1}{2}\sum_{i,i'} \frac{\partial a_{i,i'}}{\partial q_m}\, q'_i q'_{i'} - Q_m,$$

unde ponendo $q''_i = \frac{d^2 q_i}{dt^2}$ eruitur,

$$7. \qquad \frac{\partial \varphi_m}{\partial q''_h} = a_{h,m} \quad \text{ideoque} \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial q''_h} = \frac{\partial \varphi_h}{\partial q''_m}.$$

Porro si vires sollicitantes X_i, Y_i, Z_i a quantitatibus x'_i, y'_i, z'_i non pendent ideoque etiam quantitates Q_m ipsa q'_1, q'_2 etc. non implicant, fit

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial q'_h} = \frac{d a_{h,m}}{dt} + \sum_i \frac{\partial a_{i,m}}{\partial q_h}\, q'_i - \sum_i \frac{\partial a_{i,h}}{\partial q_m}\, q'_i,$$

unde reiectis terminis se mutuo destruentibus fit

$$\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial \varphi_m}{\partial q'_h} + \frac{\partial \varphi_h}{\partial q'_m}\right\} = \frac{d a_{h,m}}{dt},$$

sive

$$8. \qquad \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial \varphi_m}{\partial q'_h} + \frac{\partial \varphi_h}{\partial q'_m}\right\} = \frac{d.\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial q''_h}}{dt} = \frac{d.\dfrac{\partial \varphi_h}{\partial q''_m}}{dt}.$$

At e propositione generali, quam sub finem §[i] 16. tradidi, ponendo $\lambda = 1$ sequitur, ubi formulae (8.) locum habeant, aequationum differentialium (5.) fieri Multiplicatorem

$$9. \qquad M_1 = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial q''_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial q''_2} \cdots\cdot \frac{\partial \varphi_{3n-k}}{\partial q''_{3n-k}} = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots\ldots a_{3n-k,\,3n-k}.$$

Si rursus $3n$ quantitatum $x_i\sqrt{m_i}$, $y_i\sqrt{m_1}$, $z_i\sqrt{m_i}$ loco ponimus $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots \xi_{3n}$, fit

$$10. \qquad T = \tfrac{1}{2}\{\xi'_1\xi'_1 + \xi'_2\xi'_2 \ldots\ldots \xi'_{3n}\xi'_{3n}\},$$

qua expressione in formula (6.) substituta obtinetur

$$11. \qquad a_{i,i'} = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial q_{i'}} \cdots\cdot + \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_{i'}}.$$

Harum quantitatum Determinans, secundum eandem propositionem quam §. pr. allegavi (*De Determ. form. et propr.* §. 13.), aequatur aggregato quadratorum Determinantium functionalium quarumque $3n-k$ e numero functionum ξ_1, ξ_2, ... ξ_{3n}, quantitatum q_1, q_2, ... q_{3n-k} respectu formatorum, sive fit

$$12. \quad M_1 = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{3n-k,\,3n-k}$$
$$= S\left\{\Sigma \pm \frac{\partial \xi_{m'}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \xi_{m''}}{\partial q_2} \dots \frac{\partial \xi_{m^{(3n-k)}}}{\partial q_{3n-k}}\right\}^2,$$

designantibus m', m'' etc. quoscunque $3n-k$ ex indicibus $1, 2, \dots 3n$.

In deducendis aequationibus differentialibus (5.) supposui, aequationes conditionales tempus t non explicite continere. Quod ubi fit, statuendum erit, functiones, quibus $3n$ quantitates x_i, y_i, z_i aequantur, praeter $3n-k$ quantitates q_m etiam ipsum t continere. At hinc non mutabuntur formulae (1.), (3.), (4.), ideoque ipsae aequationes (5.) immutatae manebunt. Unde altera quoque forma *Lagrangiana* aequationum differentialium dynamicarum ad hunc valet casum quo aequationes conditionales tempus explicite continent. Neque eo casu mutationem subeunt formulae (7.) et (8.), unde etiam valor Multiplicatoris inventus immutatus manet. Quod breviter adnotare sufficiat.

De Multiplicatore aequationum differentialium dynamicarum forma tertia exhibitarum. Multiplicatores trium formarum aequationum differentialium dynamicarum inter se comparantur. Principium ultimi multiplicatoris ad tertiam formam relatum.

§. 24.

Quantitatum $q'_1, q'_2, \dots q'_{3n-k}$ respectu functio T homogenea erat secundi gradus, unde fit

$$2T = q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} \dots + q'_{3n-k} \frac{\partial T}{\partial q'_{3n-k}},$$

sive

$$T = q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} \dots + q'_{3n-k} \frac{\partial T}{\partial q'_{3n-k}} - T.$$

Si variamus quantitates omnes, quarum T functio est, ponimusque

$$1. \quad \frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i,$$

sequitur e valore ipsius T praecedente,

$$2. \quad \delta T = \quad q'_1\, \delta p_1 + \; q'_2\, \delta p_2 \dots + q'_{3n-k}\, \delta p_{3n-k}$$
$$- \left\{\frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2} \delta q_2 \dots + \frac{\partial T}{\partial q_{3n-k}} \delta q_{3n-k}\right\},$$

ubi in dextra parte bini termini se mutuo destruentes, $\frac{\partial T}{\partial q'_i}\delta q'_i - \frac{\partial T}{\partial q'_i}\delta q'_i$, omissi sunt. Formula (2.) docet, si per $3n-k$ aequationes, e (6.) §. pr. fluentes,

$$3. \quad p_i = a_{i,1}\, q'_1 + a_{i,2}\, q'_2 \dots + a_{i,3n-k}\, q'_{3n-k},$$

quantitates q'_i per quantitates p_i et q_i exprimantur earumque valores in functione T substituantur, fore ipsius T differentialia partialia quantitatum q_i et p_i respectu sumta, quae uncis includendo distinguamus ab ipsius T differentialibus partialibus quantitatum q_i et q'_i respectu sumtis,

$$4.\quad \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right) = q'_i.$$

Harum formularum ope aequationes differentiales (5.) §. pr. exhibere licet ut systema $6n-2k$ aequationum differentialium primi ordinis inter t et quantitates $q_1, q_2, \ldots q_{3n-k}, p_1, p_2, \ldots p_{3n-k}$,

$$5.\quad \frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) + Q_i.$$

Hae formulae tertiam formam aequationum differentialium dynamicarum constituunt. Quas, pro casu quo $3n$ quantitates X_i, Y_i, Z_i sunt differentialia partialia eiusdem functionis U respective secundum x_i, y_i, z_i sumta, primus condidit celeb. ***Hamilton***, Astronomus Regius Hiberneusis. Eo casu fit e (2.) §. pr. $Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$, unde statuendo $T-U=H$, si vires non a velocitatibus pendent ideoque U ab ipsis p_i vacua est, aequationes differentiales dynamicae evadunt,

$$6.\quad \frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right).$$

Iam olim quidem ill. ***Poisson*** in celeberrimo opere de Constantium Arbitrariarum variatione id egerat, ut quantitatum q'_i loco in aequationibus differentialibus dynamicis ***Lagrangianis*** secundis introduceret quantitates p_i; quae aequationes si ea substitutione abeunt in

$$7.\quad \frac{dq_i}{dt} = A_i, \quad \frac{dp_i}{dt} = B_i,$$

bene idem cognoverat fore

$$\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_k}\right) = -\left(\frac{\partial B_k}{\partial p_i}\right), \quad \left(\frac{\partial A_i}{\partial p_k}\right) = \left(\frac{\partial A_k}{\partial p_i}\right), \quad \left(\frac{\partial B_i}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial B_k}{\partial q_i}\right),$$

unde sequebatur, omnes $6n-2k$ quantitates A_i et $-B_i$ esse differentialia partialia eiusdem functionis, ipsarum p_i et q_i respectu sumta. At meritum, eam functionem $H=T-U$ ipsam assignavisse eaque re aequationibus differentialibus dynamicis formam perfectissimam conciliavisse, celeb. ***Hamilton*** debetur.

Casu quo mobilium Coordinatae functionibus aequantur quae praeter quantitates q_i ipsum tempus t implicant, forma simplex aequationum (5.) perit,

qua de re hoc quidem loco transformationem *Hamiltonianam* ad eum casum non applicabo.

Facile invenitur aequationum (5.) Multiplicator M_2. Etenim si aequationes (5.) per formulas (7.) designamus, fit

$$\frac{d\log M_2}{dt}+\Sigma\left\{\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_i}\right)+\left(\frac{\partial B_i}{\partial p_i}\right)\right\}=0.$$

At ponendo

$$A_i=\left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right),\qquad B_i=-\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)+Q_i,$$

sequitur, si vires sollicitantes a velocitatibus non pendent ideoque functiones Q_i quantitates p_1, p_2 etc. non implicant,

$$\left(\frac{\partial A_i}{\partial q_i}\right)+\left(\frac{\partial B_i}{\partial p_i}\right)=0,$$

ideoque

$$8.\qquad M_2=1.$$

Si functiones Q_i quoque implicant quantitates p_i, definitur M_2 per formulam,

$$9.\qquad \frac{d\log M_2}{dt}+\frac{\partial Q_1}{\partial p_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\cdots\cdots+\frac{\partial Q_{3n-k}}{\partial p_{3n-k}}=0.$$

Iam tres Multiplicatores M, M_1, M_2, pro tribus aequationum differentialium dynamicarum formis inventos, inter se comparemus.

Forma secunda aequationum differentialium dynamicarum proveniebat e prima reducta per $2k$ aequationes integrales,

$$10.\qquad \begin{cases} \Pi=0, & \Pi_1=0, \;\ldots\ldots\; \Pi_{k-1}=0,\\ \Pi'=0, & \Pi'_1=0, \;\ldots\ldots\; \Pi'_{k-1}=0.\end{cases}$$

Quae aequationes integrales, licet non completae, ita tamen sunt comparatae ut aequationum differentialium reductarum Multiplicator e Multiplicatore propositarum per eandem formulam obtineatur ac si reductio per aequationes integrales completa facta esset (cf. §§. 10. et 12.). Cum per aequationes (10.) revocentur $6n$ variabiles x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i ad $6n-2k$ variabiles q_i et q'_i, secundum ea quae l. c. tradidi duorum Multiplicatorum Quotiens $\frac{M}{M_1}$ aequatur Determinanti $6n$ functionum

$$\begin{matrix} \Pi, & \Pi_1, & \ldots\ldots & \Pi_{k-1}, & q_1, & q_2, & \ldots\ldots & q_{3n-k},\\ \Pi', & \Pi'_1, & \ldots\ldots & \Pi'_{k-1}, & q'_1, & q'_2, & \ldots\ldots & q'_{3n-k},\end{matrix}$$

formato respectu $6n$ quantitatum x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i. Expressiones novarum variabilium q_1, q_2 etc. per x_i, y_i, z_i per aequationes (10.) diversas

subire possunt mutationes, quibus tamen illius Determinantis valor non mutatur (cf. §. 3. (12.)). Ponamus rursus, ut supra, $3n$ quantitates ξ_i loco quantitatum $\sqrt{m_i}\,x_i$, $\sqrt{m_i}\,y_i$, $\sqrt{m_i}\,z_i$, atque $3n$ quantitates ξ'_i loco quantitatum $\sqrt{m_i}\,x'_i$, $\sqrt{m_i}\,y'_i$, $\sqrt{m_i}\,z'_i$, valor ipsius $\frac{M}{M_1}$ etiam aequari poterit Determinanti earundem $6n$ functionum, formato quantitatum ξ_i et ξ'_i respectu, quippe quod ab illo Determinante functionali tantum discrepat factore constante (cubo producti massarum). Cum $3n$ quantitates ξ'_i non reprehendantur in $3n$ functionibus Π_m et q_m, Determinans Quotienti $\frac{M}{M_1}$ aequale induit formam producti,

$$\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi_2} \cdots \frac{\partial \Pi_{k-1}}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial \xi_{k+1}} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial \xi_{k+2}} \cdots \frac{\partial q_{3n-k}}{\partial \xi_{3n}}$$
$$\times \Sigma \pm \frac{\partial \Pi'}{\partial \xi'_1} \cdot \frac{\partial \Pi'_1}{\partial \xi'_2} \cdots \frac{\partial \Pi'_{k-1}}{\partial \xi'_k} \cdot \frac{\partial q'_1}{\partial \xi'_{k+1}} \cdot \frac{\partial q'_2}{\partial \xi'_{k+2}} \cdots \frac{\partial q'_{3n-k}}{\partial \xi'_{3n}}.$$

Cum vero insuper sit

$$\frac{\partial \Pi'_m}{\partial \xi'_i} = \frac{\partial \Pi_m}{\partial \xi_i}, \qquad \frac{\partial q'_m}{\partial \xi'_i} = \frac{\partial q_m}{\partial \xi_i},$$

utrumque in se ductum Determinans aequale evadit, unde eruitur

$$11. \qquad \frac{M}{M_1} = \left\{ \Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi_2} \cdots \frac{\partial \Pi_{k-1}}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial q_1}{\partial \xi_{k+1}} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial \xi_{k+2}} \cdots \frac{\partial q_{3n-k}}{\partial \xi_{3n}} \right\}^2.$$

Sint

$$m', \; m'', \; \ldots\ldots \; m^{(3n-k)}$$

indices diversi ex ipsorum $1, 2, \ldots\ldots 3n$ numero, supponere licet, ipsas $q_1, q_2, \ldots\ldots q_{3n-k}$ expressas esse per solas $3n-k$ quantitates

$$\xi_{m'}, \; \xi_{m''}, \; \ldots\ldots \; \xi_{m^{(3n-k)}};$$

tum autem Quotientis $\frac{M}{M_1}$ valor formam simpliciorem induit,

$$12. \qquad \frac{M}{M_1} = \left\{ \Sigma \pm \frac{\partial q_1}{\partial \xi_{m'}} \cdot \frac{\partial q_2}{\partial \xi_{m''}} \cdots \frac{\partial q_{3n-k}}{\partial \xi_{m^{(3n-k)}}} \right\}^2$$
$$\times \left\{ \Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_{m^{(3n-k+1)}}} \cdot \frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi_{m^{(3n-k+2)}}} \cdots \frac{\partial \Pi_{k-1}}{\partial \xi_{m^{(3n)}}} \right\}^2,$$

siquidem $m^{(3n-k+1)}$, $m^{(3n-k+2)}$, ... $m^{(3n)}$ designant k reliquos indicum $1, 2, \ldots\ldots 3n$. Unde tandem per formulam notam (*Determ. Funct.* §. 3. (12.)) sequitur,

$$13. \qquad M \left\{ \Sigma \pm \frac{\partial \xi_{m'}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \xi_{m''}}{\partial q_2} \cdots \frac{\partial \xi_{m^{(3n-k)}}}{\partial q_{3n-k}} \right\}^2$$
$$= M_1 \left\{ \Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_{m^{(3n-k+1)}}} \cdot \frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi_{m^{(3n-k+2)}}} \cdots \frac{\partial \Pi_{k-1}}{\partial \xi_{m^{(3n)}}} \right\}^2.$$

Quod antecedentibus suppositum est, novas variabiles $q_1, q_2, \dots q_{3n-k}$ per totidem quantitates $\xi_{m'}, \xi_{m''}$ etc. expressas esse, id fieri non potest, quoties ex aequationibus conditionalibus $\Pi = 0$ etc. aequatio inter easdem $3n-k$ quantitates $\xi_{m'}$ etc. sequitur; nam cum $3n-k$ quantitates q_1, q_2 etc. a se independentes sint, etiam $3n-k$ quantitates $\xi_{m'}$ etc., per quas exprimantur, a se independentes esse debent. Nihilo tamen minus pro eo quoque casu formula (13.) valet. Quoties enim ex aequationibus $\Pi = 0$ etc. fluit aequatio inter solas $3n-k$ quantitates $\xi_{m'}, \xi_{m''}, \dots, \xi_{m^{(3n-k)}}$, hae aequabuntur $3n-k$ functionibus quantitatum $q_1, q_2, \dots q_{3n-k}$ non a se independentibus, quarum functionum Determinans evanescere constat. (*Determ. Funct.* §. 6.) Porro si e k aequationibus $\Pi = 0$ etc. obtineri potest aequatio inter solas $3n-k$ quantitates $\xi_{m'}, \xi_{m''}, \dots \xi_{m^{(3n-k)}}$, fieri debet, ut ex iisdem reliquae k quantitates $\xi_{m^{(3n-k+1)}}$ etc. eliminari possint. At *si de k aequationibus $\Pi = 0$ etc. totidem quantitates eliminari possunt, functionum Π etc. Determinans earum quantitatum respectu formatum per ipsas aequationes evanescit* *). Unde casu de quo agitur, utroque Determinante ad dextram et laevam signi aequalitatis posito evanescente, aequatio (13.) iusta manet.

Si, quod secundum antecedentia licet, in aequatione (13.) pro systemate indicum $m', m'', \dots m^{(3n-k)}$ sumuntur quique $3n-k$ diversi indicum $1, 2, \dots 3n$, omnesque $\frac{3n.3n-1 \dots 3n-k+1}{1\,.\,3\,\dots\,k}$ aequationes provenientes consummantur, prodit aequatio

$$M\,S.\left\{\Sigma \pm \frac{\partial \xi_{m'}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \xi_{m''}}{\partial q_2} \dots \frac{\partial \xi_{m^{(3n-k)}}}{\partial q_{3n-k}}\right\}^2$$
$$= M_1\,S.\left\{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_{m'}} \cdot \frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi_{m''}} \dots \frac{\partial \Pi_{n-1}}{\partial \xi_{m^{(k)}}}\right\}^2,$$

ubi in altera summa loco indicum $m^{(3n-k+1)}, m^{(3n-k+2)}, \dots m^{(3n)}$, quippe qui aliam non habent significationem quam quorumque k diversorum ex indicibus

---

*) Ponamus enim, ex aequatione $\Pi = 0$ eliminari posse k quantitates ope reliquarum aequationum $\Pi_1 = 0, \Pi_2 = 0, \dots \Pi_{k-1} = 0$, per easdem induere debet Π formam producti μF, designante F functionem a k quantitatibus vacuam, ut ex aequationibus conditionalibus sequatur inter reliquas quantitates aequatio $F = 0$. Secundum §. 3. (12.) in Determinante functionum $\Pi, \Pi_1, \dots \Pi_{k-1}$ ipsum μF substituere licet functioni Π. Quoties autem $F = 0$, differentialia prima ipsius μF ita formare licet ac si factor μ constans esset, unde etiam in formando Determinante functionum $\mu F, \Pi_1, \Pi_2, \dots \Pi_{k-1}$ habere licet μ pro Constante. Quod igitur Determinans aequivalebit factori μ ducto in Determinans functionum $F, \Pi_1, \Pi_2, \dots \Pi_{k-1}$, ideoque evanescet, cum F ab ipsis quantitatibus vacua sit, quarum respectu Determinans functionale formatur.

1, 2, ... $3n$, scripsi m', m'', ... $m^{(k)}$. Aequatio antecedens perfecte congruit cum supra inventis. Nam secundum formulam (16.) §. 22. aequatur M summae ad dextram, secundum formulam (12.) §. 28. aequatur M_1 summae ad laevam signi aequalitatis positae.

Aequationum dynamicarum forma secunda in tertiam mutabatur introducendo variabilium q'_1, q'_2, ... q'_{3n-k} loco totidem alias p_1, p_2, ... p_{3n-k}. Unde secundum §. 9. tertiae formae Multiplicator M_2 e secundae Multiplicatore M_1 obtinetur formula,

$$\frac{M_1}{M_2} = \Sigma \pm \frac{\partial p_1}{\partial q'_1} \cdot \frac{\partial p_2}{\partial q'_2} \cdots \frac{\partial p_{3n-k}}{\partial q'_{3n-k}}.$$

Dantur autem novae quantitates p_i aequationibus linearibus,

$$p_i = a_{i,1} q'_1 + a_{i,2} q'_2 \cdots + a_{i,3n-k} q'_{3n-k}$$

posito secundum (11.) §. 28.

$$a_{i,i'} = \frac{\partial \xi_1}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \xi_1}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial q_{i'}} \cdots + \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \xi_{3n}}{\partial q_{i'}},$$

unde fit

$$\frac{M_1}{M_2} = \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{3n-k, 3n-k}.$$

Quod rursus cum supra inventis congruit, cum secundum (9.) §. pr. aequetur M_1 Determinanti ad dextram, secundum (8.) autem M_2 *unitati*. Per considerationes antecedentes videmus, e valore $M_2 = 1$, qui sponte patet, inveniri potuisse M_2 et M, supra via diversissima inventos. Qua methodorum diversitate cum Multiplicatoris tum Determinantium functionalium theoria haud parum illustratur.

Principium ultimi multiplicatoris ad formam aequationum differentialium dynamicarum tertiam relatum sic enunciari potest.

„Punctorum materialium systema subiectum sit conditionibus et sollicitetur viribus quibuscunque, a sola positione systematis in spatio pendentibus; qua positione determinata per μ quantitates independentes q_i, semisumma virium vivarum T exprimatur per quantitates q_i et $q'_i = \frac{dq_i}{dt}$; ad motum systematis definiendum, eliminato tempore, integrandae erunt $2\mu - 1$ aequationes differentiales primi ordinis, quarum inventa sint $2\mu - 2$ Integralia, totidem Constantes Arbitrarias involventia, ita ut integranda restet unica aequatio differentialis primi ordinis inter duas variabiles u et v,

$$v' du - u' dv = 0,$$

designantibus in hac aequatione u' et v' ipsarum u et v functiones quibus quotientes differentiales $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$ ope Integralium inventorum aequantur; erit huius aequationis differentialis primi ordinis inter duas variabiles ultimo loco integrandae Multiplicator aequalis Determinanti functionali 2μ quantitatum q_i et $\frac{\partial T}{\partial q_i'}$, ipsarum u, v atque $2\mu-2$ Constantium Arbitrariarum respectu formato.

Iam novum principium generale mechanicum exemplis applicabo.

De motu puncti versus centrum fixum attracti.

§. 25.

Pro motu libero puncti in plano ex ultimi multiplicatoris principio generali fluit haec

Propositio.

Proponantur pro motu puncti in plano aequationes differentiales,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=Y,$$

designantibus X et Y Coordinatarum puncti orthogonalium x et y functiones quascunque; si habentur aequationum differentialium propositarum duo Integralia

$$f(x,y,x',y')=\alpha,\quad \varphi(x,y,x',y')=\beta,$$

ubi α et β sunt Constantes Arbitrariae, dabitur orbita puncti formula

$$\int\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial y'}{\partial \beta}-\frac{\partial x'}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right)(y'\,dx-x'\,dy)=\gamma$$

sive etiam formula

$$\int\frac{y'\,dx-x'\,dy}{\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x'}}=\gamma,$$

ubi duorum Integralium inventorum ope exhibitis x' et y' per x, y, α, β quantitates sub integrationis signo differentialia completa fiunt atque γ tertiam Constantem Arbitrariam designat.

Aliam propositionem, qua puncti liberi in plano moti orbita Quadraturis definiri potest, si puncti velocitatis intensitas et directio per duo Integralia inventa determinatae sunt, iam ante multos annos cum illustri *Academia Parisiensi* com-

municavi, sed ea propositio tantum respiciebat casum quo vires Coordinatis parallelae X et Y eiusdem quantitatum x et y functionis aequantur differentialibus ipsarum x et y respectu sumtis, dum in propositione antecedente X et Y quantitatum x et y functiones quaecunque esse possunt.

Pro motu puncti in dato plano versus centrum fixum attracti duo constant Integralia principiis conservationis vis vivae et conservationis areae, quibus si principium ultimi multiplicatoris addis, per tria illa principia generalia a priori constat, eius motus determinationem solis Quadraturis absolvi. Quod facto calculo sic comprobatur.

Pro motu proposito habentur aequationes differentiales

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{xF(r)}{r}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{yF(r)}{r},$$

ubi x et y Coordinatae orthogonales sunt, quarum initium in centro attractionis est; porro $r = \sqrt{(xx+yy)}$ atque $F(r)$ intensitas vis attractivae pro distantia r. Posito

$$R = \int F(r)dr,$$

e principiis generalibus mechanicis conservationis vis vivae et areae statim habentur duo Integralia,

$$\begin{aligned} f &= \tfrac{1}{2}(x'x'+y'y')+R = \alpha, \\ \varphi &= \quad xy'-yx' \quad = \beta, \end{aligned}$$

designantibus α et β Constantes Arbitrarias. Unde fit,

$$\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x'} = xx'+yy'.$$

E duobus Integralibus appositis sequitur

$$xx'+yy' = \sqrt{\varrho},$$

posito

$$\varrho = 2r^2(\alpha - R) - \beta\beta.$$

Unde secundum principium ultimi Multiplicatoris dabitur puncti orbita per aequationem,

$$\int \frac{y'dx - x'dy}{\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x'}} = \int \frac{y'dx - x'dy}{\sqrt{\varrho}} = \gamma,$$

designante γ novam Constantem Arbitrariam. Ex aequationibus,

$$xy'-yx' = \beta, \qquad xx'+yy' = \sqrt{\varrho},$$

sequitur

$$x' = \frac{x\sqrt{\varrho}-\beta y}{rr}, \quad y' = \frac{x\sqrt{\varrho}+\beta x}{rr};$$

unde substituendo $x\,dx + y\,dy = r\,dr$ fit

$$\frac{y'dx - x'dy}{\sqrt{\varrho}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{rr} + \frac{\beta\,dr}{r\sqrt{\varrho}}.$$

Posito igitur $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, unde $y\,dx - x\,dy = -rr\,d\vartheta$, dabitur orbita per formulam,

$$\vartheta + \gamma = \beta\int\frac{dr}{r\sqrt{(2r^2(\alpha - R) - \beta\beta)}}.$$

Si lex attractionis est *Neutoniana*, ponendum est $F(r) = \frac{k^2}{rr}$, $R = -\frac{k^2}{r}$, designante k^2 vim attractivam pro unitate distantiae, institutaque integratione prodit aequatio sectionis conicae inter Coordinatas polares r, $\vartheta + \gamma$.

Aequationum differentialium antecedentium dextrae parti addamus *Coordinatarum x et y functiones homogeneas* $(-3)^{tae}$ *dimensionis*, X et Y, aequationum differentialium provenientium,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x\frac{F(r)}{r} + X,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y\frac{F(r)}{r} + Y,$$

semper aliquod obtineri poterit Integrale. Nam ex his aequationibus eruitur,

$$\tfrac{1}{2}d.\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)^2 = (x\,dy - y\,dx)(xY - yX) = x^2(xY - yX)\,d.\frac{y}{x}.$$

At est $x^2(xY - yX)$ functio variabilium x et y homogenea *nullae* dimensionis ideoque functio ipsius $\frac{y}{x}$, unde aequationis antecedentis pars utraque est differentiale completum, factaque integratione prodit

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(xy' - yx')^2 - V = \tfrac{1}{2}\beta^2,$$

siquidem β Constans Arbitraria est atque

$$V = \int x^2(xY - yX)\,d\frac{y}{x}.$$

Si X et Y sunt differentialia partialia functionis homogeneae $(-2)^{tae}$ dimensionis U, ipsarum x et y respectu sumta, principium conservationis vis vivae alterum suppeditat Integrale

$$f = \tfrac{1}{2}(x'x' + y'y') + R - U = \alpha,$$

siquidem α est altera Constans Arbitraria atque rursus

$$R = \int F(r)\,dr.$$

Functiones f et φ inventas substituendo fit

$$\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = (xx'+yy')(xy'-yx').$$

At ex Integralibus inventis eruitur

$$(xx'+yy')(xy'-yx') = \sqrt{\{2r^2(\alpha-R+U)-(2V+\beta^2)\}}.\sqrt{(2V+\beta^2)}.$$

quippe ponendo

$$2r^2(\alpha-R+U)-(2V+\beta^2) = \varrho,$$

fit

$$xy'-yx' = \sqrt{(2V+\beta^2)}, \qquad xx'+yy' = \sqrt{\varrho}.$$

Hinc sequitur

$$\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \sqrt{\varrho}.\sqrt{(2V+\beta^2)};$$

$$x' = \frac{x\sqrt{\varrho}-\sqrt{(2V+\beta^2)}.y}{rr},$$

$$y' = \frac{y\sqrt{\varrho}+\sqrt{(2V+\beta^2)}.x}{rr}.$$

Quibus formulis substitutis in tertio Integrali, quod principio ultimi multiplicatoris suppeditatur,

$$\int\frac{y'dx-x'dy}{\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x'}} = \gamma,$$

obtinetur formula quae puncti orbitam determinat,

$$\int\left(\frac{y\,dx-x\,dy}{rr\sqrt{(2V+\beta^2)}}+\frac{dr}{r\sqrt{\varrho}}\right) = \gamma,$$

sive ponendo rursus $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$,

$$\int\left(\frac{dr}{r\sqrt{\varrho}}-\frac{d\vartheta}{\sqrt{(2V+\beta^2)}}\right) = \gamma,$$

semper designante γ tertiam Constantem Arbitrariam. Cum sit U functio homogenea $(-2)^{ti}$ ordinis, erit

$$2U = -\left\{x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial U}{\partial y}\right\} = -\{xX+yY\},$$

unde

$$\begin{aligned} d.r^2U &= -\{xX+yY\}(x\,dx+y\,dy)+\{xx+yy\}(X\,dx+Y\,dy) \\ &= (xY-yX)(x\,dy-y\,dx). \end{aligned}$$

Eadem quantitas aequabatur ipsi dV, unde in formulis antecedentibus statuere licet

$$V = rrU,$$
$$\varrho = 2r^2(\alpha-R)-\beta^2.$$

Secundum suppositionem factam fit $r^2 U = V$ ipsius $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\vartheta$ functio, unde in aequatione orbitae,

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{(2r^2(\alpha - R) - \beta^2)}} = \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{(2V + \beta^2)}} + \gamma,$$

alterum integrale solius r, alterum solius ϑ functio est. Temporis expressio habetur per formulam

$$t + \tau = \int \frac{r\,dr}{xx' + yy'} = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{\varrho}} = \int \frac{r^2\,d\vartheta}{\sqrt{(2V + \beta^2)}},$$

in qua τ est nova Constans Arbitraria.

In motu antecedentibus considerato vis $F(r)$, qua punctum versus centrum fixum attrahitur, aucta est alia vi, quae secundum axes orthogonales disposita differentialibus partialibus $\frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial U}{\partial y}$ aequatur. Eadem vis secundum radii vectoris directionem eique perpendiculariter disposita evadit

$$P = \frac{1}{r}\left\{x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y}\right\}, \qquad Q = \frac{1}{r}\left\{y\frac{\partial U}{\partial x} - x\frac{\partial U}{\partial y}\right\}.$$

Secundum suppositionem de functionis U indole factam statui potest

$$r^2 U = V = \Psi(\vartheta),$$

designante $\Psi(\vartheta)$ functionem anguli ϑ quem radius vector cum axe fixo format. Qua expressione substituta positoque $\frac{d\Psi(\vartheta)}{d\vartheta} = \Psi'(\vartheta)$, eruitur

$$P = -\frac{2}{r^3}\Psi(\vartheta), \qquad Q = -\frac{1}{r^3}\Psi'(\vartheta).$$

Si iam ponitur

$$\beta\int \frac{dr}{r\sqrt{\varrho}} = \beta\int \frac{dt}{r^2} = \beta\int \frac{d\vartheta}{\sqrt{(2\Psi(\vartheta) + \beta^2)}} = \Theta,$$

docent formulae antecedentibus inventae, illis viribus P et Q ad vim attractivam $F(r)$ accedentibus orbitae aequationem polarem eam mutationem subire ut angulus ϑ in angulum Θ mutetur. At simul videmus, *illa virium P et Q accessione relationem inter radium vectorem et tempus omnino immutatam manere.* Quae curiosa propositio valet etiam si non quod antecedentibus supposui motus in plano fit. Sit enim U ipsarum x, y, z functio homogenea $(-2)^{\text{tae}}$ dimensionis, ac proponantur aequationes differentiales,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r}F(r) + \frac{\partial U}{\partial x},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r}F(r) + \frac{\partial U}{\partial y},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{z}{r}F(r) + \frac{\partial U}{\partial z};$$

rursus $\int F(r)\,dr = R$ ponendo sequitur,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2(-R + U + \alpha),$$
$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} = -rF(r) - 2U.$$

Quibus additis fit

$$d\left\{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right\} = d.r\frac{dr}{dt} = \{2(\alpha - R) - rF(r)\}\,dt,$$

unde multiplicando per $2r\frac{dr}{dt}$ et integrando prodit,

$$r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2r^2(\alpha - R) + \varepsilon,$$

ideoque

$$t + \tau = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{\{2r^2(\alpha - R) + \varepsilon\}}},$$

qua in formula τ et ε Constantes Arbitrariae sunt. Patet autem quod demonstrandum erat, in hac formula nullum functionis U vestigium remansisse. Addo, si U gaudeat forma particulari,

$$U = \frac{1}{r^2}\left\{f\left(\frac{x}{r}\right) + \varphi\left(\frac{y}{r}\right)\right\},$$

designantibus f et φ functiones quascunque, eum ipsum motum, qui in plano non continetur, totum Quadraturis determinari posse.

Motus puncti in spatio pendet a *quinque* aequationibus differentialibus primi ordinis inter *sex* quantitates x, y, z, x', y', z'; unde *quatuor* Integralibus egemus ut problema ad aequationem differentialem primi ordinis inter duas variabiles revocetur, quae ope principii ultimi multiplicatoris per solas Quadraturas integrabitur. At quoties vires sollicitantes diriguntur versus axem fixum viriumque intensitates non pendent ab angulo quem planum per axem et mobile ductum cum plano fixo per eundem axem transeunte facit, problema ad motum puncti in plano revocari potest, et nonnisi *duobus* Integralibus opus erit ut totum absolvatur Quadraturis. Designantibus enim x, v, ζ puncti Coor-

dinatas orthogonales positoque

$$vv+\zeta\zeta = yy,$$

sint aequationes differentiales, quibus motus puncti definitur,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = Y\frac{v}{y}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = Y\frac{\zeta}{y},$$

ubi secundum suppositionem factam et X et Y solarum x et y functiones esse debent: erit

$$v\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{d^2v}{dt^2} = 0,$$

unde sequitur,

$$v\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{dv}{dt} = \alpha,$$

designante α Constantem Arbitrariam. Fit autem,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\sqrt{(vv+\zeta\zeta)}}{dt^2} = \frac{(v\,d\zeta-\zeta\,dv)^2}{\sqrt{(vv+\zeta\zeta)^3}.dt^2} + \frac{v\,d^2v+\zeta\,d^2\zeta}{\sqrt{(vv+\zeta\zeta)}.dt^2},$$

ideoque

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\alpha\alpha}{y^3} + Y.$$

Unde aequationes differentiales propositae evadunt sequentes,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\alpha\alpha}{y^3} + Y.$$

Cf. ***Diar. Crell. Vol. XXIV. pag. 16 sqq.*** Ponendo,

$$v = y\cos f, \quad \zeta = y\sin f,$$

fit

$$v\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{dv}{dt} = yy\frac{df}{dt} = \alpha,$$

unde Constans α aequabitur plani per punctum mobile et axem fixum ducti velocitati rotatoriae initiali, multiplicatae per quadratum distantiae initialis puncti ab axe. Duobus Integralibus inter x, y, x', y' inventis, tertium integrale principio ultimi Multiplicatoris suppeditatur. Quorum Integralium ope si $y' = \frac{dy}{dt}$ per y exprimitur, cum rotationis angulus f tum tempus t Quadraturis determinantur ope formularum,

$$f = \alpha\int\frac{dt}{y^2} = \alpha\int\frac{dy}{y^2y'}, \qquad t = \int\frac{dy}{y'}.$$

Unde in casu proposito cognitis ***duobus*** Integralibus tria reliqua a solis Quadraturis pendent. Consideretur ex. gr. motus puncti versus centrum fixum

attracti; posito $r = \sqrt{(xx+yy)}$, secundum antecedentia erit

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r}F(r); \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r}F(r) + \frac{\alpha\alpha}{y^3}.$$

Quae aequationes in eas redeunt, quas supra integravi, ponendo

$$Y = \frac{\alpha\alpha}{y^3}, \quad U = -\frac{\alpha\alpha}{2yy} = -\frac{\alpha\alpha}{2rr\sin\vartheta^2},$$

unde

$$V = \Psi(\vartheta) = -\frac{\alpha\alpha}{2\sin\vartheta^2},$$

$$\Theta = \int\frac{\beta.d\vartheta}{\sqrt{(2\Psi(\vartheta)+\beta^2)}} = \int\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{(\beta^2\sin\vartheta^2-\alpha^2)}},$$

ideoque,

$$\cos\Theta = \frac{\beta}{\sqrt{(\beta^2-\alpha^2)}}\cos\vartheta.$$

Si r et ϑ sunt puncti attracti Coordinatae polares in plano fixo in quo illud revera movetur, in aequatione orbitae, quam in hoc plano describit, angulus Θ loco ipsius ϑ substitui debet ut eruatur orbita descripta in plano mobili per axem ipsarum x ducto. Relationem inter r et t pro motu in utroque plano eandem manere, ex ipsa natura rei patet. Plani angulus rotatorius f datur per formulam,

$$df = \frac{\alpha\, dt}{yy} = \frac{\alpha\, dt}{rr\sin^2\vartheta} = \frac{d\Theta}{\sin^2\vartheta} = \frac{\alpha\beta.d\Theta}{\alpha^2\cos\Theta^2+\beta^2\sin\Theta^2},$$

unde, designante ε Constantem Arbitrariam,

$$\operatorname{tang}(f+\varepsilon) = \frac{\beta}{\alpha}\operatorname{tang}\Theta.$$

Si per centrum attractionis ex arbitrio axis fixus ducitur, in formulis antecedentibus axem Coordinatarum x pro axe fixo sumendo motus puncti attracti componitur e motu puncti in plano per ipsum et axem fixum ducto eiusque plani rotatione circa axem fixum. Statuatur $\alpha = \beta\sin\delta$, erit

$$\cos\vartheta = \cos\delta\cos\Theta, \quad \operatorname{tang}\Theta = \sin\delta\operatorname{tang}(f+\varepsilon), \quad \sin\vartheta\sin(f+\varepsilon) = \sin\Theta.$$

E centro attractionis describatur superficies sphaerica, cuius intersectio cum axe fixo, cum radio vectore et cum plano orbitae puncti attracti sit A, P et circulus maximus PQ; porro in sphaera e A ad circulum maximum PQ demittatur perpendicularis AO: in triangulo rectangulo sphaerico AOP erit

$$AO = \delta, \quad AP = \vartheta, \quad PO = \Theta, \quad OAP = f+\varepsilon.$$

Cuius constructionis ope formulae antecedentes geometrice comprobari possunt.

Si punctum versus centra fixa quotcunque in eadem recta disposita secundum *Neutonianam* sive aliam quamcunque legem attrahitur, quibus attractionis viribus accedere potest vis constans rectae parallela, e duobus Integralibus, quae antecedentibus poscebantur ut reliquae integrationes omnes Quadraturis absolverentur, alterum conservationis vis vivae principio suppeditatur. Si abest vis constans atque duo tantum sunt centra attrahentia lexque attractionis est *Neutoniana*, alterum Integrale *Eulerus* invenit. Eo igitur casu motus ille principio conservationis areae certi cuiusdam axis respectu valentis, principio conservationis vis vivae, Integrali *Euleriano*, tandem principio ultimi multiplicatoris ad Quadraturas revocatur. Quod iam accuratius exponam.

Motus puncti versus duo centra fixa secundum legem *Neutonianam* attracti.

§. 26.

Punctum inter utrumque centrum medium sumatur pro initio Coordinatarum, recta centra iungens pro axe Coordinatarum x, sit porro y distantia mobilis ab hoc axe. Si massae centrorum sunt m et m' atque a semidistantia centrorum, secundum antecedentia valebunt inter x et y aequationes differentiales sequentes,

$$1.\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{m(x-a)}{\{(x-a)^2+yy\}^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{m'(x+a)}{\{(x+a)^2+yy\}^{\frac{3}{2}}}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{my}{\{(x-a)^2+yy\}^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{m'y}{\{(x+a)^2+yy\}^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{\alpha\alpha}{y^3}, \end{cases}$$

designante α Constantem Arbitrariam. Porro angulus rotationis plani per axem et mobile ducti datur formula,

$$2.\quad df = \frac{\alpha\, dt}{yy}.$$

A principio conservationis vis vivae integrale suppeditatur hoc,

$$3.\quad \tfrac{1}{2}(x'x'+y'y') = \frac{m}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{m'}{\{(x+a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{\alpha\alpha}{2y^2} + \beta,$$

designante β alteram Constantem Arbitrariam. Integrale *Eulerianum* invenitur deducendo ex aequationibus (1.) sequentem,

$$d(xy'-yx') = -\frac{may\,dt}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{m'ay\,dt}{\{(x+a)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha^2x\,dt}{y^3},$$

unde fit

$$\tfrac{1}{2}d.(xy'-yx')^2 = -\frac{may\{(x-a)dy-ydx\}}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}+\frac{m'ay\{(x+a)dy-ydx\}}{\{(x+a)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}$$
$$+\frac{a^2x(xdy-ydx)}{y^3}-\frac{ma^2ydy}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}-\frac{m'a^2ydy}{\{(x+a)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Hinc aequationum (1.) alteram substituendo fiut

$$\tfrac{1}{2}d.(xy'-yx')^2 = -\tfrac{1}{2}ma\frac{d.\left(\frac{y}{x-a}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{y}{x-a}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}+\tfrac{1}{2}m'a\frac{d.\left(\frac{y}{x+a}\right)^2}{\left\{1+\left(\frac{y}{x+a}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$
$$-\tfrac{1}{2}\alpha^2 d.\left(\frac{x}{y}\right)^2+\alpha^2 y'dy'-\alpha^2\alpha^2\frac{dy}{y^3}.$$

Cuius aequationis termini singuli cum differentialia completa sint, obtinetur Integrale,

$$4.\quad (xy'-yx')^2+\text{Const.}$$
$$=\frac{2ma(x-a)}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}}-\frac{2m'a(x+a)}{\{(x+a^2)+y^2\}^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^2x^2}{y^2}+\alpha^2y'^2+\frac{a^2\alpha^2}{y^2}.$$

Si ponitur

$$5.\quad \begin{cases} L = \dfrac{2m}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{2m'}{\{(x+a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{\alpha\alpha}{y^2}+2\beta, \\ M = \dfrac{2ma(x-a)}{\{(x-a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{2m'a(x+a)}{\{(x+a)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{\alpha^2}{y^2}(a^2-x^2+y^2)+\gamma, \end{cases}$$

duo Integralia inventa evadunt

$$6.\quad x'x'+y'y' = L,\quad (xy'-yx')^2-\alpha^2y'y' = M,$$

sive

$$f=\beta,\quad \varphi=\gamma,$$

siquidem statuitur

$$f = \tfrac{1}{2}(x'x'+y'y')-\tfrac{1}{2}L+\beta,$$
$$\varphi = (xy'-yx')^2-\alpha^2y'y'-M+\gamma.$$

Si duorum Integralium ope et x' et y' per x et y exhibentur, secundum principium ultimi multiplicatoris obtinetur tertium Integrale,

$$\int\frac{y'dx-x'dy}{\frac{\partial f}{\partial x'}.\frac{\partial\varphi}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y'}.\frac{\partial\varphi}{\partial x'}} = \text{Const.}$$

At cum et L et M ab ipsis x' et y' vacua sint, fit

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = x',\qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = y',$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'} = -2y(xy'-yx'),\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 2x(xy'-yx')-2\alpha^2y'.$$

Quibus formulis substitutis eruitur

$$\frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y'}-\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = 2(xx'+yy')(xy'-yx')-2a^2x'y'$$
$$= -2\{xy(x'x'-y'y')+(aa-xx+yy)x'y'\}.$$

Unde tertium Integrale evadit

$$7.\quad \int\frac{y'dx-x'dy}{xy(x'x'-y'y')+(aa-xx+yy)x'y'} = \varepsilon,$$

designante ε Constantem Arbitrariam.

In formula antecedente expressio sub integrationis signo posita, quantitatum x' et y' valoribus substitutis, evadere debet differentiale completum. Qui valores ut eruantur et commoda substitutio fiat, adhibeo methodum in calculis algebraicis usitatam, videlicet addo aequationes (6.), altera multiplicata factore λ, quem hac conditione determino, ut aequationis provenientis pars laeva evadat quadratum functionis ipsorum x' et y' linearis. Ea ratione venit

$$8.\quad (x^2-a^2+\lambda)y'y'-2xy\,x'y'+(y^2+\lambda)x'x' = M+\lambda L,$$

quantitate λ determinata per aequationem

$$9.\quad 0 = (\lambda+yy)(\lambda+xx-aa)-xxyy$$
$$= \lambda^2+\lambda(xx+yy-aa)-aayy.$$

Huius aequationis quadraticae radices vocemus λ' et λ'', erit

$$10.\quad aayy=-\lambda'\lambda'',\quad xx+yy=aa-\lambda'-\lambda'',\quad aaxx=(aa-\lambda')(aa-\lambda'').$$

Hinc quadrata distantiarum puncti mobilis a centris attractionum fiunt

$$(x\pm a)^2+y^2 = 2a^2-\lambda'-\lambda''\pm 2\sqrt{((aa-\lambda')(aa-\lambda''))},$$

ideoque ipsae distantiae

$$11\quad \{(x\pm a)^2+yy\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(aa-\lambda')}\pm\sqrt{(aa-\lambda'')}.$$

Porro fit

$$\lambda'-aa\pm ax = -\sqrt{(aa-\lambda')}\{\sqrt{(aa-\lambda')}\mp\sqrt{(aa-\lambda'')}\},$$
$$\lambda''-aa\pm ax = \pm\sqrt{(aa-\lambda'')}\{\sqrt{(aa-\lambda')}\mp\sqrt{(aa-\lambda'')}\},$$

ideoque

$$12.\quad \begin{cases} \dfrac{\lambda'-aa\pm ax}{\{(x\mp a)^2+yy\}^{\frac{1}{2}}} = -\sqrt{(aa-\lambda')}, \\ \dfrac{\lambda''-aa\pm ax}{\{(x\mp a)^2+yy\}^{\frac{1}{2}}} = \pm\sqrt{(aa-\lambda'')}. \end{cases}$$

Si has formulas substituimus in (5.), sequitur, quantitatem $M+\lambda'L$ solius λ', quantitatem $M+\lambda''L$ solius λ'' functionem esse. Etenim si advocamus formulas

e (10.) fluentes

$$13.\quad \begin{cases} \dfrac{a^2-x^2-\lambda'}{y^2} = \dfrac{y^2+\lambda''}{y^2} = 1-\dfrac{a^2}{\lambda'}, \\ \dfrac{a^2-x^2-\lambda''}{y^2} = \dfrac{y^2+\lambda'}{y^2} = 1-\dfrac{a^2}{\lambda''}, \end{cases}$$

e (5.), (12.), (13.) eruitur

$$14.\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}(M+\lambda'L) = -(m+m')\sqrt{(aa-\lambda')}+\alpha\alpha\left(1-\dfrac{aa}{2\lambda'}\right)+\beta\lambda'+\tfrac{1}{2}\gamma, \\ \tfrac{1}{2}(M+\lambda''L) = \quad (m-m')\sqrt{(aa-\lambda'')}+\alpha\alpha\left(1-\dfrac{aa}{2\lambda''}\right)+\beta\lambda''+\tfrac{1}{2}\gamma. \end{cases}$$

Ipsae quibus x' et y' determinantur aequationes e (8.) prodeunt substituendo ipsius λ valores λ' et λ''. Quae aequationes per $-a^2$ multiplicatae, formulis (10.) substitutis, evadunt

$$\lambda''(a^2-\lambda')y'y'+2\sqrt{(-\lambda'\lambda''(a^2-\lambda')(a^2-\lambda''))}-\lambda'(a^2-\lambda'')x'x'$$
$$= -a^2(M+\lambda'L),$$
$$\lambda'(a^2-\lambda'')y'y'+2\sqrt{(-\lambda'\lambda''(a^2-\lambda')(a^2-\lambda''))}-\lambda''(a^2-\lambda')x'x'$$
$$= -a^2(M+\lambda''L),$$

sive extractis radicibus,

$$15.\quad \begin{cases} \sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'))}.y'+\sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda''))}.x' = a\sqrt{-(M+\lambda'L)}, \\ \sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda''))}.y'-\sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'))}.x' = a\sqrt{(M+\lambda''L)}. \end{cases}$$

Easdem aequationes (10.) differentiando sequitur

$$2a(y'dx-x'dy) = y'd.\sqrt{((a^2-\lambda')(a^2-\lambda''))}-x'd.\sqrt{(-\lambda'\lambda'')}$$
$$= \frac{-d\lambda'}{\sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda'))}}\{\sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda''))}.y'-\sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'))}.x'\}$$
$$\frac{-d\lambda''}{\sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda''))}}\{\sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'))}.y'+\sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda''))}.x'\}.$$

Unde formulas (15.) substituendo prodit:

$$16.\quad 2(y'dx-x'dy) = -\frac{\sqrt{(M+\lambda''L)}.d\lambda'}{\sqrt{(-\lambda'(aa-\lambda'))}}-\frac{\sqrt{-(M+\lambda'L)}.d\lambda''}{\sqrt{(\lambda''(aa-\lambda''))}}.$$

Aequationibus (15.) in se ductis et rursus (10.) advocatis eruitur

$$17.\quad xy(y'y'-x'x')+(x^2-y^2-a^2)x'y' = \sqrt{(-(M+\lambda'L)(M+\lambda''L))}.$$

Per hanc formulam ubi dividimus antecedentem (16.), prodit

$$18.\quad \frac{y'dx-x'dy}{xy(x'x'-y'y')+(a^2-x^2+y^2)x'y'}$$
$$= \frac{-d\lambda'}{2\sqrt{(\lambda'(a^2-\lambda')(M+\lambda'L))}}+\frac{d\lambda''}{2\sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'')(M+\lambda''L))}}.$$

Hanc supra vidimus expressionem secundum principium ultimi Multiplicatoris fieri debere differentiale completum. Ac revera, quantitatum $\frac{1}{2}(M+\lambda' L)$ et $\frac{1}{2}(M+\lambda'' L)$ valoribus (14.) substitutis, in ea expressione differentiale $d\lambda'$ per solius λ', differentiale $d\lambda''$ per solius λ'' functionem multiplicatum reprehenditur. Unde, formula (18.) substituta in (7.), tertium integrale per duas Quadraturas obtinetur.

Si formulas adiicere placet, quibus t et f per λ' et λ'' solarum ope Quadraturarum determinantur, differentietur aequatio (9.), posito $\lambda = \lambda'$, unde prodit

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda'-\lambda'')d\lambda' + 2\lambda' x\,dx - 2(a^2-\lambda')y\,dy \\ &= (\lambda'-\lambda'')d\lambda' - \frac{2}{a}\sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda'))}\{\sqrt{(-\lambda'(a^2-\lambda''))}\,dx + \sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'))}\,dy\} \\ &= (\lambda'-\lambda'')d\lambda' + 2\sqrt{(\lambda'(a^2-\lambda')(M+\lambda' L))}\,.\,dt. \end{aligned}$$

Hinc, si aequationem differentialem

$$19. \qquad \frac{d\lambda'}{\sqrt{(\lambda'(a^2-\lambda')(M+\lambda' L))}} = \frac{d\lambda''}{\sqrt{(\lambda''(a^2-\lambda'')(M+\lambda'' L))}}$$

advocamus, obtinemus

$$20. \qquad dt = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda'}\,d\lambda'}{\sqrt{((a^2-\lambda')(M+\lambda' L))}} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\lambda''}\,d\lambda''}{\sqrt{((a^2-\lambda'')(M+\lambda'' L))}},$$

$$21. \qquad df = \frac{-\alpha a^2\,dt}{\lambda'\lambda''}$$

$$= \frac{1}{2}\alpha a^2\left\{-\frac{1}{\sqrt{\lambda'^2}}\cdot\frac{d\lambda'}{\sqrt{((a^2-\lambda')(M+\lambda' L))}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda''^2}}\cdot\frac{d\lambda''}{\sqrt{((a^2-\lambda'')(M+\lambda'' L))}}\right\}.$$

His formulis videmus, ad variabilium t et f valores per Quadraturas inveniendos non opus esse ut antea variabilium λ' et λ'' altera per alteram expressa habeatur.

De corporis solidi ictu impulsi rotatione circa punctum fixum.

§. 27.

Exemplum applicationis principii ultimi multiplicatoris ad motum non liberum suppeditet rotatio solidi circa punctum eius fixum, si corpus solo ponitur ictu impulsum esse, nulla accedente vi acceleratrice. Valet pro eo motu principium conservationis virium vivarum nec non cuiuslibet plani respectu principium conservationis arearum. Quibus si additur principium ultimi multiplicatoris, per sola principia generalia problema olim difficillimum ad Quadraturas reducetur.

Sint ξ, v, ζ Coordinatae orthogonales ad axes relatae in solido fixos, in spatio mobiles, quorum initium punctum fixum sit circa quod solidum rotatur. Sint x, y, z Coordinatae orthogonales eodem initio gaudentes, ad axes in spatio fixos relatae. In aequationibus, quae inter utrasque Coordinatas locum habent,

$$1.\quad x = \alpha\xi + \beta v + \gamma\zeta, \quad y = \alpha_1\xi + \beta_1 v + \gamma_1\zeta, \quad z = \alpha_2\xi + \beta_2 v + \beta_2\zeta,$$

sunt ξ, v, ζ Constantes, novem Coëfficientes α, β etc. variabiles, inter quas relationes notae intercedunt, quibus illae ad quantitates tres revocari possunt *). Adhibita differentialium notatione *Lagrangiana* e (1.) sequitur

$$x' = \alpha'\xi + \beta' v + \gamma'\zeta, \quad y' = \alpha_1'\xi + \beta_1' v + \gamma_1'\zeta, \quad z' = \alpha_2'\xi + \beta_2' v + \gamma_2'\zeta.$$

Ponamus

$$\begin{aligned} \beta\gamma' + \beta_1\gamma_1' + \beta_2\gamma_2' &= -\{\gamma\beta' + \gamma_1\beta_1' + \gamma_2\beta_2'\} = a, \\ \gamma\alpha' + \gamma_1\alpha_1' + \gamma_2\alpha_2' &= -\{\alpha\gamma' + \alpha_1\gamma_1' + \alpha_2\gamma_2'\} = b, \\ \alpha\beta' + \alpha_1\beta_1' + \alpha_2\beta_2' &= -\{\beta\alpha' + \beta_1\alpha_1' + \beta_2\alpha_2'\} = c; \end{aligned}$$

ex aequationibus

$$\alpha\alpha' + \alpha_1\alpha_1' + \alpha_2\alpha_2' = 0, \quad \beta\alpha' + \beta_1\alpha_1' + \beta_2\alpha_2' = -c, \quad \gamma\alpha' + \gamma_1\alpha_1' + \gamma_2\alpha_2' = b,$$

quarum prima e formula $\alpha\alpha + \alpha_1\alpha_1 + \alpha_2\alpha_2 = 1$ sequitur, fluit

$$\alpha' = -\beta c + \gamma b, \quad \alpha_1' = -\beta_1 c + \gamma_1 b, \quad \alpha_2' = -\beta_2 c + \gamma_2 b,$$

eodemque modo obtinetur

$$\begin{aligned} \beta' &= -\gamma a + \alpha c, & \gamma' &= -\alpha b + \beta a, \\ \beta_1' &= -\gamma_1 a + \alpha_1 c, & \gamma_1' &= -\alpha_1 b + \beta_1 a, \\ \beta_2' &= -\gamma_2 a + \alpha_2 c, & \gamma_2' &= -\alpha_2 b + \beta_2 a. \end{aligned}$$

Quibus valoribus substitutis eruitur,

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(cv - b\zeta) + \beta(a\zeta - c\xi) + \gamma(b\xi - av), \\ y' &= \alpha_1(cv - b\zeta) + \beta_1(a\zeta - c\xi) + \gamma_1(b\xi - av), \\ z' &= \alpha_2(cv - b\zeta) + \beta_2(a\zeta - c\xi) + \gamma_2(b\xi - av). \end{aligned}$$

---

*) Formulae (1.) si Coordinatarum orthogonalium transformationem exprimunt, fit $\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'' = \pm\alpha$ etc., $\alpha(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') + \beta(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') + \gamma(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') = \pm 1$. At in hac rotationis quaestione, iam alibi adnotavi, semper signum $+$ sumendum esse. Ponamus enim inter binorum corporum puncta correlationem dari talem, ut alterius corporis puncto, cuius Coordinatae sunt ξ, v, ζ, respondeat alterius corporis punctum cuius Coordinatae ad *easdem* axes relatae valoribus x, y, z gaudeat: prout in illis formulis signum $+$ aut $-$ locum habet, erunt corpora aut *congruentia* aut uti dicitur *symmetrica*. Casu posteriore autem fieri non potest ut alterum corpus in alterius positione collocetur, neque igitur rotatione alterum in alterius locum pervenire potest.

Unde sequitur

2. $x'x'+y'y'+z'z'=(cv-b\zeta)^2+(a\zeta-c\xi)^2+(b\xi-av)^2$.

Porro e (1.) proveniunt formulae,

$$\alpha_2 y-\alpha_1 z=\beta\zeta-\gamma v,\quad \alpha z-\alpha_2 x=\beta_1\zeta-\gamma_1 v,\quad \alpha_1 x-\alpha y=\beta_2\zeta-\gamma_2 v,$$
$$\beta_2 y-\beta_1 z=\gamma\xi-\alpha\zeta,\quad \beta z-\beta_2 x=\gamma_1\xi-\alpha_1\zeta,\quad \beta_1 x-\beta y=\gamma_2\xi-\alpha_2\zeta,$$
$$\gamma_2 y-\gamma_1 z=\alpha v-\beta\xi,\quad \gamma z-\gamma_2 x=\alpha_1 v-\beta_1\xi,\quad \gamma_1 x-\gamma y=\alpha_2 v-\beta_2\xi.$$

Unde substitutis ipsorum x', y', z' valoribus eruitur,

$$3.\ \begin{cases} yz'-zy'=(\beta\zeta-\gamma v)(cv-b\zeta)+(\gamma\xi-\alpha\zeta)(a\zeta-c\xi)+(\alpha v-\beta\xi)(b\xi-av),\\ zx'-xz'=(\beta_1\zeta-\gamma_1 v)(cv-b\zeta)+(\gamma_1\xi-\alpha_1\zeta)(a\zeta-c\xi)+(\alpha_1 v-\beta_1\xi)(b\xi-av),\\ xy'-yx'=(\beta_2\zeta-\gamma_2 v)(cv-b\zeta)+(\gamma_2\xi-\alpha_2\zeta)(a\zeta-c\xi)+(\alpha_2 v-\beta_2\xi)(b\xi-av).\end{cases}$$

Axes Coordinatarum ξ, v, ζ semper ita in ipso solido disponere licet ut, designante dm solidi elementum cuius Coordinatae sunt ξ, v, ζ, sit

$$S.v\zeta\,dm=0,\quad S.\zeta\xi\,dm=0,\quad S.\xi v\,dm=0,$$

summis ad omnia elementa materialia corporis extensis. Unde ponendo

$$A=S(vv+\zeta\zeta)dm,\quad B=S(\zeta\zeta+\xi\xi)dm,\quad C=S(\xi\xi+vv)dm,$$

fit e (2.) et (3.),

$$4.\quad T=\tfrac{1}{2}S\{x'x'+y'y'+z'z'\}\,dm=\tfrac{1}{2}\{Aaa+Bbb+Ccc\},$$

$$5.\ \begin{cases} L=S(yz'-zy')dm=-\{\alpha.Aa+\beta.Bb+\gamma.Cc\},\\ M=S(zx'-xz')dm=-\{\alpha_1.Aa+\beta_1.Bb+\gamma_1.Cc\},\\ N=S(xy'-yx')dm=-\{\alpha_2.Aa+\beta_2.Bb+\gamma_2.Cc\}.\end{cases}$$

Quibus in formulis secundum principia conservationis virium vivarum et arearum quatuor quantitates T, L, M, N aequantur Constantibus Arbitrariis.

Novem Coëfficientes α, β etc. per tres angulos q_1, q_2, q_3 exprimamus ope formularum notissimarum, quas olim *Eulerus* in *Introductione in Anal. Infin.* dedit,

$$6.\ \begin{cases} \alpha=\cos q_1\sin q_2\sin q_3+\cos q_2\cos q_3,\\ \alpha_1=\cos q_1\cos q_2\sin q_3-\sin q_2\cos q_3,\\ \alpha_2=-\sin q_1\sin q_3;\\ \beta=\cos q_1\sin q_2\cos q_3-\cos q_2\sin q_3,\\ \beta_1=\cos q_1\cos q_2\cos q_3+\sin q_2\sin q_3,\\ \beta_2=-\sin q_1\cos q_3;\\ \gamma=\sin q_1\sin q_2,\\ \gamma_1=\sin q_1\cos q_2,\\ \gamma_2=\cos q_1.\end{cases}$$

E quibus formulis sequitur:

$$\begin{aligned}
\alpha' &= -\gamma \sin q_3 . q'_1 + \alpha_1 . q'_2 + \beta . q'_3, \\
\alpha'_1 &= -\gamma_1 \sin q_3 . q'_1 - \alpha . q'_2 + \beta_1 . q'_3, \\
\alpha'_2 &= -\gamma_2 \sin q_3 . q'_1 \qquad\qquad + \beta_2 . q'_3, \\
\beta' &= -\gamma \cos q_3 . q'_1 + \beta_1 . q'_2 - \alpha . q'_3, \\
\beta'_1 &= -\gamma_1 \cos q_3 . q'_1 - \beta . q'_2 - \alpha_1 . q'_3, \\
\beta'_2 &= -\gamma_2 \cos q_3 . q'_1 \qquad\qquad - \alpha_2 . q'_3, \\
\gamma' &= \cos q_1 \sin q_2 . q'_1 + \gamma_1 . q'_2, \\
\gamma'_1 &= \cos q_1 \cos q_2 . q'_1 - \gamma . q'_2, \\
\gamma'_2 &= -\sin q_1 . q'_1 .
\end{aligned}$$

Unde eruitur

$$7. \quad \begin{cases} a = \quad \beta\gamma' + \beta_1\gamma'_1 + \beta_2\gamma'_2 = \quad \cos q_3 . q'_1 - \sin q_1 \sin q_3 . q'_2, \\ b = -\{\alpha\gamma' + \alpha_1\gamma'_1 + \alpha_2\gamma'_2\} = -\sin q_3 . q'_1 - \sin q_1 \cos q_3 . q', \\ c = \quad \alpha\beta' + \alpha_1\beta'_1 + \alpha_2\beta'_2 = \quad \cos q_1 . q'_1 - q'_3 . \end{cases}$$

Quas quantitates in aequatione (4.) substituendo evadit virium vivarum semisumma T quantitatum q_1, q_2, q_3, q'_1, q'_2, q'_3 functio. Quam ipsorum q'_1, q'_2, q'_3 respectu differentiando prodit

$$8. \quad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial q'_1} = p_1 = \cos q_3 . Aa - \sin q_3 . Bb, \\ \dfrac{\partial T}{\partial q'_2} = p_2 = -\sin q_1 \sin q_3 . Aa - \sin q_1 \cos q_3 . Bb + \cos q_1 . Cc, \\ \dfrac{\partial T}{\partial q'_3} = p_3 = -Cc. \end{cases}$$

Hae quantitates autem aequantur sequentibus,

$$9. \quad \begin{cases} p_1 = -L \cos q_2 + M \sin q_2, \\ p_2 = -N, \\ p_3 = (L \sin q_2 + M \cos q_2) \sin q_1 + N \cos q_1, \end{cases}$$

sicuti patet substituendo quantitatum L, M, N expressiones (5.) et Coëfficientium α, β etc. valores (6.). Ponendo

$$10. \quad \frac{p_3 \cos q_1 + p_2}{\sin q_1} = u,$$

e formulis (8.) fluunt sequentes,

$$\begin{aligned}
Aa &= \quad \cos q_3 . p_1 - \sin q_3 . u, \\
Bb &= -\sin q_3 . p_1 - \cos q_3 . u, \\
Cc &= -p_3 .
\end{aligned}$$

Quibus formulis quadratis ac respective per A, B, C divisis consummatisque, obtinetur post faciles reductiones,

$$11. \quad 2T = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)(p_1 p_1 + uu) + \frac{1}{C} p_3 p_3$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\{(p_1 p_1 - uu)\cos 2q_3 - 2p_1 u \sin 2q_3\}.$$

Cum T, L, M, N Constantibus aequentur, per quatuor aequationes (9.) et (11.) sex variabiles q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3 ad duas revocare licet. Quomodocunque hae duae variabiles eligantur, aequatio differentialis primi ordinis inter eas locum habens principio ultimi multiplicatoris ad Quadraturas revocabitur. At duas variabiles eligere convenit tales, per quas reliquae commode exprimantur, quales sunt p_1 et p_3. Cum solidum *nullis* viribus accelatricibus sollicitetur, aequationum dynamicarum forma tertia §. 24. tradita suppeditat

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_1}, \qquad \frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial T}{dq_3},$$

unde aequatio differentialis inter p_1 et p_3, quae integranda restat, fit

$$12. \quad \frac{\partial T}{\partial q_3} dp_1 - \frac{\partial T}{\partial q_1} dp_3 = 0.$$

Partibus dextris aequationum (9.) et (11.) in laevam translatis, aequationem (11.) denotemus per $\Pi = 0$, aequationes (9.) per $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$, $\Pi_3 = 0$, erit secundum theoremata generalia §§. 24. et 3. tradita aequationis differentialis (12.) Multiplicator

$$\mu = \frac{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial T} \frac{\partial \Pi_2}{\partial N} \frac{\partial \Pi_1}{\partial L} \frac{\partial \Pi_3}{\partial M}}{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi}{\partial q_3} \frac{\partial \Pi_1}{\partial q_2} \frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2} \frac{\partial \Pi_3}{\partial q_1}}.$$

Cuius fractionis ipsorumque $\frac{\partial T}{\partial q_3}$ et $\frac{\partial T}{\partial q_1}$ valores sic determino.

Ipsa T non nisi in Π, ipsa N nonnisi in Π_2 invenitur, porro fit $\frac{\partial \Pi}{\partial T} = 2$, $\frac{\partial \Pi_2}{\partial N} = 1$, unde numerator fractionis antecedentis eruitur

$$2\Sigma \pm \frac{\partial \Pi_1}{\partial L} \cdot \frac{\partial \Pi_3}{\partial M} = -2\sin q_1.$$

E variabilibus p_2, q_1, q_2, q_3 functio Π_2 unicam p_2 implicat, functio Π_1 unicam q_2, functio Π_3 solas q_1 et q_2; porro fit $\frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2} = 1$, unde fractionis antecedentis denominator evadit,

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \Pi_3}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial q_3}.$$

Fit autem

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_2} = -\{L\sin q_2 + M\cos q_2\}$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_1} = -\{L\sin q_2 + M\cos q_2\}\cos q_1 + N\sin q_1 = -u,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_3} = 2\frac{\partial T}{\partial q_3}.$$

Unde aequationis differentialis (12.) Multiplicator fit

$$13.\qquad \mu = \frac{\sin q_1}{(L\sin q_2 + M\cos q_2)u}\cdot\frac{1}{\frac{\partial T}{\partial q_3}}.$$

At e (9.) et (10.), brevitatis causa posito

$$h = LL + MM + NN,$$

sequitur

$$14.\quad\begin{cases} L\sin q_2 + M\cos q_2 = \sqrt{(LL+MM-p_1p_1)} = \sqrt{(h-NN-p_1p_1)}, \\ u = (L\sin q_2 + M\cos q_2)\cos q_1 - N\sin q_1 = \sqrt{(h-p_1p_1-p_3p_3)}, \\ (h-p_1p_1)\sin q_1 = (L\sin q_2 + M\cos q_2)p_3 - Nu. \end{cases}$$

Quibus in ipsius μ valore (13.) substitutis sequitur

$$15.\qquad \mu.\frac{\partial T}{\partial q_3} = \frac{1}{h-p_1p_1}\left\{\frac{p_3}{\sqrt{(h-p_1p_1-p_3p_3)}} - \frac{N}{\sqrt{(h-NN-p_1p_1)}}\right\}.$$

Restat ut quantitates $\frac{\partial T}{\partial q_3}$ et $\frac{\partial T}{\partial q_1}$ solis p_1 et p_3 exhibeantur.

Quantitatis u valor (10.) cum quantitatem q_3 non implicet, e (11.) sequitur

$$16.\qquad 2\frac{\partial T}{\partial q_3} = \left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\{(p_1p_1-uu)\sin 2q_3 + 2p_1u\cos 2q_3\}.$$

Eius quantitatis quadratum e (11.) fit

$$\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)^2(p_1p_1+uu)^2 - \left\{4T - \left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)(p_1p_1+uu) - \frac{2}{C}p_3p_3\right\}^2.$$

Unde ponendo

$$K = 2T - \frac{1}{A}(p_1p_1+uu) - \frac{1}{C}p_3p_3,$$

$$K_1 = \frac{1}{B}(p_1p_1+uu) + \frac{1}{C}p_3p_3 - 2T,$$

sive

$$17.\quad\begin{cases} K = 2T - \frac{h}{A} + \left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)p_3p_3, \\ K_1 = \frac{h}{B} - 2T + \left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right)p_3p_3, \end{cases}$$

sequitur

$$18.\quad \frac{\partial T}{\partial q_3} = -\sqrt{(KK_1)}.$$

Cum elementum dt natura temporis numquam regredientis semper positivum sit, docet formula $dp_3 = -\frac{\partial T}{\partial q_3}dt$, radicale $\sqrt{(KK_1)}$ negativo signo afficiendum esse, uti in (18.), quamdiu p_3 crescat, positivo quam diu p_3 decrescat.

Ipsum $\frac{\partial T}{\partial q_1}$ e (11.) eruimus

$$19.\quad \frac{\partial T}{\partial q_1} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial q_1}\left\{\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)u+\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)(u\cos 2q_3+p_1\sin 2q_3)\right\}.$$

Fit autem e (10.) et (9.),

$$\frac{\partial u}{\partial q_1} = -\frac{p_3+p_2\cos q_1}{\sin q_1^2} = -\frac{L\sin q_2+M\cos q_2}{\sin q_1}$$

ideoque e (13.) et (18.) obtinetur

$$20.\quad \mu\frac{\partial u}{\partial q_1} = -\frac{1}{u\frac{\partial T}{\partial q_3}} = \frac{1}{u\sqrt{(KK_1)}}.$$

Porro ex aequationibus (11.), (16.), (18.) fit

$$4T-\frac{2}{C}p_3p_3=\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\{(uu-p_1p_1)\cos 2q_3+2p_1u\sin 2q_3\}+\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)(p_1p_1+uu),$$

$$2\sqrt{(KK_1)}=\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\{2p_1u\cos 2q_3+(uu-p_1p_1)\sin 2q_3\},$$

unde

$$\frac{u\left(4T-\frac{2}{C}p_3p_3\right)-2p_1\sqrt{(KK_1)}}{uu+p_1p_1}=\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)u+\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)(u\cos 2q_3+p_1\sin 2q_3).$$

Hinc valore $uu+p_1p_1=h-p_3p_3$ substituto, e (19.) et (20.) eruitur,

$$21.\quad \mu\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{u\left(2T-\frac{p_3p_3}{C}\right)-p_1\sqrt{(KK_1)}}{(h-p_3p_3)u\sqrt{(KK_1)}}.$$

Unde iam aequatio differentialis

$$\mu\frac{\partial T}{\partial q_3}dp_1-\mu\frac{\partial T}{\partial q_1}dp_3 = 0,$$

quae per se integrabilis esse debet, per formulas (15.) et (21.) evadit

$$22.\quad 0 = -\frac{N\,dp_1}{(h-p_1p_1)(h-NN-p_1p_1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{p_3\,dp_1}{(h-p_1p_1)(h-p_1p_1-p_3p_3)^{\frac{1}{2}}}$$
$$+\frac{p_1\,dp_3}{(h-p_3p_3)(h-p_1p_1-p_3p_3)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\left(2T-\frac{p_3p_3}{C}\right)dp_3}{(h-p_3p_3)\sqrt{(KK_1)}}.$$

Quatuor terminorum dextrae partis primum et quartum differentialia completa esse patet, cum primus solam p_1, quartus secundum (17.) solam p_3 implicet. Ponendo $p_1 = \sqrt{(h-NN)}.\sin\varphi$, primus terminus fit

$$\frac{-N\,d\varphi}{h\cos\varphi^2+N^2\sin\varphi^2} = -\frac{1}{\sqrt{h}}\,d.\operatorname{arc\,tang}\frac{N\operatorname{tang}\varphi}{\sqrt{h}},$$

unde valorem $\operatorname{tang}\varphi = \frac{p_1}{\{h-NN-p_1p_1\}^{\frac{1}{2}}}$ restituendo evadit primus terminus

$$23.\quad \frac{-N\,dp_1}{(h-p_1p_1)(h-NN-p_1p_1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{h}}\,d.\operatorname{arc\,tang}\frac{Np_1}{\sqrt{h}\sqrt{(h-NN-p_1p_1)}}.$$

Si in dextra parte huius formulae in locum Constantis N ponitur quantitas p_3, prodit expressio, utriusque p_1 et p_3 respectu symmetrica; unde si ipsam quoque quantitatem p_3 pro variabili habemus atque utriusque p_1 et p_3 respectu differentiationem instituimus, provenire debet aggregatum duorum terminorum, qui de expressione ad laevam aequationis (23.) posita derivantur, alter ponendo p_3 ipsius N loco, alter ponendo p_1 ipsius N simulque p_3 ipsius p_1 loco; unde de formula (23.) deducitur haec,

$$24.\quad \left(\frac{p_3\,dp_1}{h-p_1p_1}+\frac{p_1\,dp_3}{h-p_3p_3}\right)\frac{1}{(h-p_3p_3-p_1p_1)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{h}}\,d.\operatorname{arc\,tang}\frac{p_1p_3}{\sqrt{h}\sqrt{(h-p_1p_1-p_3p_3)}}.$$

Quae docet, aequationis (22.) terminos secundum et tertium iuxta sumtos et ipsos differentiale completum constituere. Formulas (17.), (23.) et (24.) in aequatione differentiali (22.) substituendo et integrando prodit Integrale *quintum*,

$$25.\quad \text{Const.} = -\frac{1}{\sqrt{h}}\operatorname{arc\,tang}\frac{Np_1}{\sqrt{h}\sqrt{(h-NN-p_1p_1)}}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{h}}\operatorname{arc\,tang}\frac{p_1p_3}{\sqrt{h}\sqrt{(h-p_1p_1-p_3p_3)}}$$
$$-\int\frac{\left(2T-\frac{p_3p_3}{C}\right)dp_3}{(h-p_3p_3)\sqrt{\left(2T-\frac{h}{A}+\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)p_3p_3\right)}\sqrt{\left(\frac{h}{B}-2T+\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right)p_3p_3\right)}}.$$

Tempus t, quod unice determinandum restat, per p_3 exprimitur ope formulae

26. $$t + \text{Const.} = -\int \frac{dp_3}{\frac{\partial T}{\partial q_3}} = \int \frac{dp_3}{\sqrt{(KK_1)}}$$

$$= \int \frac{dp_3}{\sqrt{\left(2T - \frac{h}{A} + \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right)p_3 p_3\right)} \sqrt{\left(\frac{h}{B} - 2T + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)p_3 p_3\right)}}.$$

Ita problema rotationis propositum iam ***sine plani invariabilis usu*** perfecte integratum est.

Quod planum si adhibere placet atque pro Coordinatarum x et y plano sumere, fit

$$L = 0, \quad M = 0.$$

Unde e (10.), (9.) et (11.) fit $u = -N \sin q_1$, porro

$$p_1 = 0, \quad p_2 = -N = -\sqrt{h}, \quad p_3 = N \cos q_1,$$

$$\frac{2T}{N^2} = \frac{1}{A} \sin q_1^2 \sin q_3^2 + \frac{1}{B} \sin q_1^2 \cos q_3^2 + \frac{1}{C} \cos q_1^2.$$

In dextra parte formulae (25.) terminus secundus evanescit, tertius immutatus manet, primus autem ***indeterminati*** speciem induit. At observo e (9.) haberi

$$\frac{N p_1}{\sqrt{h} . \sqrt{(h - NN - p_1 p_1)}} = \frac{N \operatorname{tang}(q_2 - \alpha)}{\sqrt{(N^2 + L^2 + M^2)}},$$

siquidem ponitur $\frac{L}{M} = \operatorname{tang} \alpha$. Hinc si ponimus $L = 0$, $M = 0$ atque Constantem $\frac{\alpha}{\sqrt{h}}$ Constanti Arbitrariae adiicimus, formula (25.) evadit

$$\text{Const.} = \frac{q_2}{N} + \int \frac{\left(2T - \frac{p_3 p_3}{C}\right) dp_3}{(h - p_3 p_3)\sqrt{(KK_1)}},$$

ubi K et K_1 valores (17.) immutatos servant. Nec non temporis t expressio immutata manet

$$t + \text{Const.} = \int \frac{dp_3}{\sqrt{(KK_1)}}.$$

Formularum antecedentium ope variabiles omnes maxima concinnitate exhiberi possunt per functiones ellipticas quarum argumentum tempori t proportionale est. Quod egregie expositum invenis in Commentatione inaugurali Cl. ***A. S. Rueb*** Roterodamensis „de motu gyratorio corporis rigidi", Traiecti ad Rhenum a. 1834 publicata.

In his quaestionibus de rotatione solidi atque de motu puncti versus duo centra fixa attracti data opera analysi usus sum inelegantiori, ut demonstretur, ea problemata ope principii ultimi multiplicatoris etiam absque artificiis, quae non ita in promtu sunt, ad finem perduci posse.

De problemate trium corporum in eadem recta motorum. Substitutio *Euleriana*. Theoremata de viribus homogeneis.

§. 28.

Paucis adhuc agam de tribus corporibus se mutuo attrahentibus in eademque recta motis, quippe quod problema varia de Multiplicatore proposita exemplo illustrandi occasionem commodam praebebit. Ope principii conservationis virium vivarum quaestio in aequationis differentialis secundi ordinis integrationem redit. At *Eulerus* olim absque Integrali ab illo principio suppeditato reductionem problematis ad aequationem differentialem secundi ordinis per substitutionem memorabilem effecit. Cf. *Nov. Comm. Ac. Petrop. Vol. XI. pg. 144 sqq., Nova Acta Vol III. pg. 141 sqq.* Quam rem hic ita repetam ut simul per idoneam variabilium electionem formularum symmetriae consulam.

Sint m, m', m'' tria eiusdem rectae puncta massis m, m', m'' praedita sitque m' inter m et m''. Designante O rectae punctum fixum, ponatur

$$Om = x, \quad Om' = x_1, \quad Om'' = x_2.$$

Si directionem motus, qua punctum a m ad m', a m' ad m'' fertur, positivam, directionem oppositam, qua punctum a m'' ad m', a m' ad m movetur, negativam dicimus, statuo x, x_1, x_2 quantitates positivas aut negativas esse, prout a puncto fixo O ad puncta m, m', m'' directio positiva aut negativa est. Ubi massae m, m', m'' se mutuo secundum legem *Neutonianam* attrahunt, fit

$$1. \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \quad * \quad + \dfrac{m'}{(x_1-x)^2} + \dfrac{m''}{(x_2-x)^2}, \\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \dfrac{-m}{(x_1-x)^2} + \quad * \quad + \dfrac{m''}{(x_2-x_1)^2}, \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = \dfrac{-m}{(x_2-x)^2} - \dfrac{m'}{(x_2-x_1)^2} \quad * \quad . \end{cases}$$

Trium massarum se mutuo attrahentium centrum gravitatis statuamus in quiete manere, quod salva generalitate licet, ipsumque ponamus centrum gravitatis esse punctum fixum O. Hinc tres quantitates x, x, x_2 duabus aliis u et v exprimi possunt per substitutiones lineares,

$$2. \quad x = \alpha u + \beta v, \quad x_1 = \alpha' u + \beta' v, \quad x_2 = \alpha'' u + \beta'' v,$$

in quibus α, β, etc. designant Constantes quascunque satisfacientes duabus aequationibus,

$$3.\quad m\alpha + m'\alpha' + m''\alpha'' = 0,\quad m\beta + m'\beta' + m''\beta'' = 0.$$

Quibus ex arbitrio addamus tertiam,

$$4.\quad m\alpha\beta + m'\alpha'\beta' + m''\alpha''\beta'' = 0,$$

porro ponamus

$$m\alpha\alpha + m'\alpha'\alpha' + m''\alpha''\alpha'' = \mu,$$
$$m\beta\beta + m'\beta'\beta' + m''\beta''\beta'' = \nu.$$

Substitutis (2.) in aequationibus differentialibus (1.) et additis tribus aequationibus respective per $m\alpha$, $m'\alpha'$, $m''\alpha''$ vel per $m\beta$, $m'\beta'$, $m''\beta''$ multiplicatis, obtinetur

$$5.\quad \begin{cases} \mu\dfrac{d^2u}{dt^2} = \dfrac{m'm''(\alpha'-\alpha'')}{(x_2-x_1)^2} + \dfrac{m''m(\alpha-\alpha'')}{(x_2-x)^2} + \dfrac{mm'(\alpha-\alpha')}{(x_1-x)^2}, \\ \nu\dfrac{d^2v}{dt^2} = \dfrac{m'm''(\beta'-\beta'')}{(x_2-x_1)^2} + \dfrac{m''m(\beta-\beta'')}{(x_2-x)^2} + \dfrac{mm'(\beta-\beta')}{(x_1-x)^2}. \end{cases}$$

Sit

$$6.\quad \begin{cases} \alpha''-\alpha' = a, & \alpha''-\alpha = a', & \alpha'-\alpha = a'', \\ \beta''-\beta' = b, & \beta''-\beta = b', & \beta'-\beta = b''; \end{cases}$$

unde

$$7.\quad \begin{cases} a+a'' = a', \qquad b+b'' = b', \\ m'm''.ab + m''m.a'b' + mm'.a''b'' = 0\ ^{*)}; \end{cases}$$

obtinentur inter u et v aequationes differentiales,

$$8.\quad \begin{cases} \mu\dfrac{d^2u}{dt^2} = -\dfrac{m'm''a}{(au+bv)^2} - \dfrac{m''ma'}{(a'u+b'v)^2} - \dfrac{mm'a''}{(a''u+b''v)^2}, \\ \nu\dfrac{d^2v}{dt^2} = -\dfrac{m'm''b}{(au+bv)^2} - \dfrac{m''mb'}{(a'u+b'v)^2} - \dfrac{mm'b''}{(a''u+b''v)^2}. \end{cases}$$

Aequationibus (8.) respective per $\dfrac{du}{dt}$ et $\dfrac{dv}{dt}$ multiplicatis et additis factaque integratione obtinetur aequatio, conservationem virium vivarum exprimens,

$$9.\quad \tfrac{1}{2}\left\{\mu\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \nu\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right\} = \frac{m'm''}{au+bv} + \frac{m''m}{a'u+b'v} + \frac{mm'}{a''u+b''v} - h,$$

designante h Constantem Arbitrariam.

---

*) Haec aequatio sequitur e formula identica,

$$(m+m'+m'')(m\alpha\beta+m'\alpha'\beta'+m''\alpha''\beta'')-(m\alpha+m'\alpha'+m''\alpha'')(m\beta+m'\beta'+m''\beta'')$$
$$= m'm''ab+m''ma'b'+mm'a''b''.$$

Quantitates μ et ν ipsis a, b, etc. determinantur per formulas,

$$10. \quad \begin{cases} (m+m'+m'')\mu = m'm''a^2+m''ma'^2+mm'a''^2, \\ (m+m'+m'')\nu = m'm''b^2+m''mb'^2+mm'b''^2 \text{ *)}. \end{cases}$$

Ponamus

$$11. \quad \mu = \nu = 1,$$

inter quatuor quantitates a, b, a'', b'' locum habebunt tres aequationes,

$$12. \quad \begin{cases} m+m'+m'' = m''(m+m')a^2+2m''m\,a\,a''+m(m'+m'')a''^2, \\ m+m'+m'' = m''(m+m')b^2+2m''m\,b\,b''+m(m'+m'')b''^2, \\ 0 = m''(m+m')ab+m''m(ab''+a''b)+m(m'+m'')a''b''. \end{cases}$$

Quae demonstrant, quantitates a et a'', b et b'' haberi posse pro Coordinatis punctorum in terminis positorum quarumcunque binarum semidiametrorum coniugatarum sectionis conicae, cuius aequatio est

$$m+m'+m'' = m''(m+m')x^2+2m''m\,xy+m(m'+m'')y^2.$$

Si pro diametris coniugatis axes principales sumere placet, quantitates a, b, etc. determinandae erunt per aequationes,

$$13. \quad a = A\cos\varepsilon, \quad a'' = A\sin\varepsilon, \quad b = B\sin\varepsilon, \quad b'' = -B\cos\varepsilon,$$

ubi, posito br. c.

$$m''(m+m')+m(m''+m') = n,$$

et nova quantitate M introducta, angulus ε et quantitates A et B dantur per formulas,

$$14. \quad \begin{cases} M\cos 2\varepsilon = m'(m''-m), \qquad M\sin 2\varepsilon = 2mm'', \\ A = \sqrt{\dfrac{m+m'+m''}{\frac{n+M}{2}}}, \qquad B = \sqrt{\dfrac{m+m'+m''}{\frac{n-M}{2}}}. \end{cases}$$

Determinatis a, b, etc. invenitur

$$15. \quad \begin{cases} \alpha = \alpha'-a'', \quad \alpha'' = \alpha'+a, \quad \beta = \beta'-b'', \quad \beta'' = \beta'+b, \\ \alpha' = \dfrac{ma''-m''a}{m+m'+m''}, \quad \beta' = \dfrac{mb''-m''b}{m+m'+m''}. \end{cases}$$

De substitutione hic a me adhibita pluribus egi in Commentatione *„sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps."*

---

*) Hae aequationes sequuntur e formulis identicis,

$$(m+m'+m'')(m\alpha^2+m'\alpha'^2+m''\alpha''^2)-(m\alpha+m'\alpha'+m''\alpha'')^2$$
$$= m'm''.\,a^2+m''m.\,a'^2+mm'.\,a''^2,$$
$$(m+m'+m'')(m\beta^2+m'\beta'^2+m''\beta''^2)-(m\beta+m'\beta'+m''\beta'')^2$$
$$= m'm''.\,b^2+m''m.\,b'^2+mm'.\,b''^2.$$

His de coëfficientibus substitutionis linearis (2.) obiter adnotatis, iam novas variabiles r, φ, s, η introduco ope substitutionis,

$$16.\quad \begin{cases} u = r\cos\varphi, \quad v = r\sin\varphi, \\ s = \sqrt{r}\,.\,\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{udu+vdv}{\sqrt[4]{(u^2+v^2)}\,.\,dt}, \\ \eta = \sqrt{r^3}\,.\,\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{udv-vdu}{\sqrt[4]{(u^2+v^2)}\,.\,dt}. \end{cases}$$

Ex aequationibus differentialibus (8.), posito $\mu = \nu = 1$, sequitur

$$17.\quad \begin{cases} \sqrt{r^3}\,.\,\dfrac{ds}{dt} = \frac{1}{2}s^2+\eta^2-\Phi, \\ \sqrt{r^3}\,.\,\dfrac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{2}\eta s+\Phi', \end{cases}$$

siquidem ponitur $\Phi' = \dfrac{d\Phi}{d\varphi}$ atque

$$18.\quad \Phi = \frac{m'm''}{a\cos\varphi+b\sin\varphi}+\frac{m''m}{a'\cos\varphi+b'\sin\varphi}+\frac{mm'}{a''\cos\varphi+b''\sin\varphi}.$$

E formulis (16.) et (17.) patet, *determinationem motus propositi pendere ab integratione duarum aequationum differentialium primi ordinis inter tres variabiles* φ, s, η,

$$19.\quad d\varphi : ds : d\eta = \eta : \tfrac{1}{2}s^2+\eta^2-\Phi : -\tfrac{1}{2}s\eta+\Phi'.$$

Quas aequationes differentiales, quia a Constante generali h vacuae sunt, simpliciores censere licet iis quae, non adhibitis substitutionibus (16.) aut earum similibus, adiumento aequationis (9.) per unius variabilis eliminationem obtinentur. Integratis (19.) suppeditabit formula (9.) valorem ipsius r. Nimirum cum sit

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{r}\{s^2+\eta^2\},$$

fit e (9.),

$$20.\quad r = \frac{1}{h}\{\Phi-\tfrac{1}{2}(s^2+\eta^2)\}.$$

Denique tempus t invenitur formula

$$21.\quad dt = \frac{\sqrt{r}}{s}dr = \frac{\sqrt{r^3}}{\eta}.d\varphi.$$

Iam aequationum differentialium (19.) investigabo Multiplicatorem N.

Si adhibemus formulam differentialem, qua generaliter Multiplicatorem definivi, fit

$$-\frac{\eta\, d\log N}{d\varphi} = \frac{\partial\eta}{\partial\varphi}+\frac{\partial(\frac{1}{2}s^2+\eta^2-\Phi)}{\partial s}+\frac{\partial(-\frac{1}{2}s\eta+\Phi')}{\partial\eta} = \tfrac{1}{2}s,$$

ideoque e (16.),

$$22. \quad d\log N = -\tfrac{1}{2}\frac{s}{\eta}d\varphi = -\frac{dr}{r}; \qquad N = \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Unde substituendo (20.) et factorem constantem $\sqrt{h}$ reiiciendo, *fit aequationum differentialium* (19.) *Multiplicator*

$$N = \frac{1}{\sqrt{\{\Phi - \frac{1}{2}(v^2+\eta^2)\}}}.$$

Qui Multiplicatoris valor valet, quaecunque anguli φ sit functio Φ, qua aequationes differentiales (19.) afficiuntur.

Multiplicatorem etiam per praecepta generalia Cap. II. tradita hoc modo indagare licet. Scilicet aequationum differentialium (8.) Multiplicator est *unitas*. Unde aequationum differentialium

$$23. \quad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{s}{\sqrt{r}}, \quad \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{\eta}{\sqrt{r^3}}, \\ \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{r^3}}\{\tfrac{1}{2}s^2+\eta^2-\Phi\}, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{r^3}}\{-\tfrac{1}{2}\eta s+\Phi'\} \end{cases}$$

Multiplicator aequatur unitati divisae per quantitatum r, φ, s, η Determinans, variabilium u, v, $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ respectu formatum. Quod Determinans, cum quantitatum r et φ valores ab ipsis $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$ vacui sint, aequatur producto Determinantis quantitatum r et φ ipsorum u et v respectu et Determinantis quantitatum s et η ipsorum $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$ respectu formati. Quorum Determinantium alterum fit $\frac{1}{r}$, alterum r, unde aequationum (23.) Multiplicator et ipse $= 1$ invenitur. Deinde si Integralis (20.) ope eliminatur variabilis r simulque de aequationibus differentialibus (23.) prima reiicitur, Multiplicator aequationum differentialium, ea eliminatione ad minorem numerum pauciores que variabiles reductarum, secundum §. 10. aequatur differentiali partiali $\frac{\partial r}{\partial h}$, designante h Constantem Arbitrariam qua Integrale (20.) afficitur. Quod differentiale partiale e (20.) fit $-\frac{r}{h}$. Denique aequationum differentialium (19.) Multiplicator invenitur dividendo per $\sqrt{r^3}$, quippe per quod multiplicandum erat ut quantitates ad dextram aequationum (19.) prodirent; unde factore constante $-\frac{1}{h}$ reiecto prodit aequationum (19.) Multiplicator $\frac{1}{\sqrt{r}}$, uti supra.

Cognito ipsius N valore, si aequationum differentialium (19.) integratione prima exprimitur variabilis η per r, s et Constantem Arbitrariam α, principio ultimi multiplicatoris obtinetur alterum Integrale

$$\int \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \cdot \frac{\eta\, ds + \{\Phi - \frac{1}{2}s^2 - \eta^2\}\, d\varphi}{\sqrt{\{\Phi - \frac{1}{2}(s^2 + \eta^2)\}}} = \beta,$$

ubi sub integrationis signo post valorem ipsius η substitutum differentiale completum habetur atque β Constantem Arbitrariam designat. *Eulerus* integrationem primam, etsi succederet, in hac quaestione parvi adiumenti fore putavit, cum de ulteriore integratione desperandum esset. At novo principio generali ultimi multiplicatoris ipsam ulteriorem integrationem absolvere licuit, dum de prima integratione nihil constet.

Evanescente h habetur aequatio integralis particularis,

$$24. \qquad \Phi = \tfrac{1}{2}(ss + \eta\eta),$$

unde una tantum integranda manet aequatio differentialis primi ordinis inter duas variabiles s et φ,

$$25. \qquad \frac{ds}{d\varphi} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(2\Phi - ss)} = 0.$$

Cuius aequationis differentialis Multiplicator M definitur formula

$$\frac{d \log M}{d\varphi} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\partial . \sqrt{(2\Phi - ss)}}{ds} = \tfrac{1}{2}\,\frac{s}{\sqrt{(2\Phi - ss)}} = \frac{s}{2\eta} = \tfrac{1}{2}\,\frac{d \log r}{d\varphi},$$

unde $\beta M = \sqrt{r}$. Invento aequationis differentialis (25.) Integrali eiusque ope expressa φ per s et α, fit $M^{-1} = \frac{\partial s}{\partial \alpha}$, ideoque

$$26. \qquad r = \frac{\beta^2}{\left(\frac{\partial s}{\partial \alpha}\right)^2},$$

designantibus α et β Constantes Arbitrarias.

Formulae prorsus analogae habentur, si mutuae attractiones non distantiarum quadratis inversis sed aliis quibuscunque potestatibus proportionales sunt. Observo tamen, casu quo trium corporum quae in eadem recta moventur mutuae attractiones *cubis* distantiarum inverse proportionales sint, motum totum tantum ab *unica Quadratura* pendere.

Si vires sollicitantes in motu systematis liberi functiones Coordinatarum homogeneae quaecunque sunt, generaliter per substitutiones antecedentibus similes systematis aequationum differentialium ordinem *unitate* diminuere licet, quantitate cui Coordinatae proportionales statuuntur eliminata. Quam, docet theoria

nostra, aequationum differentialium iis substitutionibus reductarum Multiplicatore determinari, ideoque, si illae complete integratae sint, Determinante functionali, quo earum Multiplicator detur, variabilis quoque eliminatae valorem absque Quadratura suppeditari. Si principium conservationis virium vivarum valet, eo ipso variabilis eliminata determinari potest, unde vice versa aequationum differentialium reductarum Multiplicatorem eruere earumque ultimam integrationem reducere licet ad Quadraturas. Excipiendus est casus particularis, quo Constans Arbitraria, quae valori semisummae virium vivarum accedit, nihilo aequiparatur. Eo casu aequationum differentialium reductarum habetur Integrale particulare, unde ordinem systematis earum denuo unitate diminuere licet; quantitas eliminata autem rursus determinabitur Multiplicatore systematis aequationum differentialium bis reductarum. Hinc sequens nanciscimur theorema:

„Sint vires, quibus systema liberum n punctorum materialium sollicitatur, „functiones Coordinatarum homogeneae, valeatque principium conservationis „virium vivarum; casu particulari, quo Constans Arbitraria valori virium „vivarum adiicienda nihilo aequatur, systematis aequationum differentialium „ordo *duabus* unitatibus diminui sive problema revocari potest ad integra„tionem $6n-3$ aequationum differentialium primi ordinis inter $6n-2$ va„riabiles; quibus complete integratis obtinetur valor $(6n-1)^{\text{tae}}$ variabilis *per „differentiationes* secundum Constantes Arbitrarias institutas, qui valor in „novam Constantem Arbitrariam ducitur; $6n^{\text{ta}}$ variabilis principio conser„vationis virium vivarum determinatur, postremo tempus ut semper obti„netur Quadratura."

Quae hac Analysi demonstrantur.

Sit x una $3n$ Coordinatarum, sit m massa puncti ad quod ea pertinet, ponatur $\frac{dx}{dt}=x'$, habeanturque $3n$ aequationes differentiales $m\frac{dx'}{dt}=X$, designante X functionem $3n$ Coordinatarum homogeneam i^{ti} ordinis. Ad quantitates analogas denotandas indices subscriptos adhibebo. Summationibus semper ad omnes $3n$ Coordinatas extensis, pono

$$\Sigma mxx=rr,\quad x=rq,\quad x'=p\sqrt{r^{i+1}},\quad r'=\varrho\sqrt{r^{i+1}},\quad X=r^iQ,$$

unde quantitates Q erunt solarum quantitatum q functiones et ipsae homogeneae i^{ti} ordinis. His statutis obtinetur

$$27.\quad\begin{cases} q'=\frac{dq}{dt}=\frac{x'}{r}-\frac{xr'}{r^2}=\sqrt{r^{i-1}}.(p-q\varrho), \\ p'=\frac{dp}{dt}=\frac{X}{m\sqrt{r^{i+1}}}-\frac{i+1}{2}.\frac{x'r'}{\sqrt{r^{i+3}}}=\sqrt{r^{i-1}}.\left(\frac{Q}{m}-\tfrac{1}{2}(i+1)p\varrho\right), \\ \Sigma mqp=\varrho. \end{cases}$$

Hinc inter variabilem r et $6n$ variabiles q et p obtinentur $6n$ aequationes differentiales primi ordinis,

$$28.\quad dr:dq:dq_1\ldots\ldots:dp:dp_1\ldots\ldots$$
$$= r\varrho : p-q\varrho : p_1-q_1\varrho\ldots\ldots : \frac{Q}{m}-\frac{i+1}{2}p\varrho : \frac{Q_1}{m_1}-\frac{i+1}{2}p_1\varrho\ldots\ldots,$$

in quibus suppono ipsius ϱ substitutum esse valorem Σmqp. Si de parte dextra $r\varrho$, de laeva dr reiicitur, abeunt formulae (28.) in $6n-1$ aequationes differentiales inter $6n$ variabiles q et p.

Sequitur e (28.):

$$dr:\tfrac{1}{2}d\Sigma mqq = r:1-\Sigma mqq,$$

unde, designante c Constantem Arbitrariam, fit

$$29.\quad r^2(1-\Sigma mqq) = c.$$

Valente principio virium vivarum, designet K functionem ipsarum q homogeneam $(i+1)$ti ordinis $=\frac{1}{i+1}\Sigma qQ = \int \Sigma Q dq$, atque h alteram Constantem Arbitrariam, obtinetur

$$30.\quad r^{i+1}(K-\tfrac{1}{2}\Sigma mpp) = h.$$

Vocemus M Multiplicatorem aequationum differentialium (28.), erit

$$d\log M + \frac{U dr}{r\varrho} = 0,$$

siquidem U designat summam quantitatum $r\varrho$, $p-q\varrho$ etc., $\frac{Q}{m}-\frac{i+1}{2}p\varrho$ etc., respective secundum variabiles r, q etc., p etc. differentiatarum. Quae summa, cum sit $\frac{\partial\varrho}{\partial q}=mp$, $\frac{\partial\varrho}{\partial p}=mq$, evadit

$$U = \varkappa\varrho, \quad \text{ubi} \quad \varkappa = 1-\tfrac{1}{2}(i+3)(3n+1),$$

unde sequitur

$$31.\quad d\log M = -\varkappa\, d\log r, \quad M = r^{-\varkappa}.$$

In quaestione proposita non adhibendum est Integrale completum (29.), sed particulare pro quo fit $c=0$; substitutiones enim adhibitae suppeditant aequationem

$$32.\quad \Sigma mqq = 1,$$

cuius ope $3n$ variabiles q ad alias $3n-1$ variabiles w reducere licet. Vocemus H Determinans functionale $3n-1$ quantitatum w et quantitatis $1-\Sigma mqq$, $3n$ variabilium q respectu formatum, sintque aequationes differentiales reductae,

$$33.\quad dr:dw:dw_1\ldots\ldots:dp:dp_1\ldots\ldots$$
$$= r\varrho : W : W_1\ldots\ldots : P : P_1\ldots\ldots$$

secundum regulas generales fit aequationum (32.) Multiplicator

$$N = \frac{M}{Hr^2} = \frac{1}{Hr^{\varkappa+2}}.$$

Qui satisfacere debet aequationi

$$33.\quad d\log N + \frac{d\log r}{\varrho}\left\{\varrho + \frac{\partial W}{\partial w} + \frac{\partial W_1}{\partial w_1}\dots + \frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial P_1}{\partial p_1}\dots\right\} = 0.$$

Si vocamus L Multiplicatorem $6n-2$ aequationum differentialium primi ordinis, inter $3n-1$ variabiles w et $3n$ variabiles p locum habentium,

$$34.\quad dw : dw_1 \dots : dp : dp_1 \dots = W : W_1 \dots : P : P_1 \dots,$$

determinatur L formula

$$0 = d\log L + \frac{dw}{W}\left\{\frac{\partial W}{\partial w} + \frac{\partial W_1}{\partial w_1}\dots + \frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial P_1}{\partial p_1}\dots\right\},$$

unde, cum e (32.) sit $\frac{dw}{W} = \frac{d\log r}{\varrho}$, e (33.) sequitur,

$$d\log L = d\log Nr,$$

ideoque aequationum (34.) fit Multiplicator

$$35.\quad L = rN = \frac{1}{H.r^{\varkappa+1}} = \frac{1}{H.r^{2-\frac{1}{2}(i+3)(3n+1)}}.$$

Aequationibus (34.) complete integratis, quantitas L per theoremata initio huius Commentationis proposita obtinetur formatione Determinantis functionalis, ideoque variabilis r ope aequationis (35.) absque Quadratura per variabiles w et p determinabitur. Si conservatio virium vivarum valet, dabitur r aequatione (30.), unde eo casu dato variabilis r valore vice versa aequationum differentialium (34.) suppeditatur Multiplicator

$$36.\quad L = \frac{1}{H.(K-\frac{1}{2}\Sigma mpp)^{\frac{1}{i+1}(3n-1)+\frac{1}{2}(3n+1)}}.$$

Seorsim examinemus casum particularem $h = 0$, quo fieri non potest ut ipsius r per quantitates w et p determinatio ex aequatione (30.) petatur. Eo casu ope aequationum

$$\Sigma mqq = 1, \quad \tfrac{1}{2}\Sigma mpp = K$$

poterunt $6n$ quantitates q et p ad $6n-2$ alias quantitates v reduci. Sint aequationes differentiales reductae,

$$37.\quad dr : dv_1 : dv_2 \dots : dv_{6n-2} = r\varrho : V_1 : V_2 \dots : V_{6n-2},$$

sitque G Determinans functionale $6n-2$ quantitatum v duarumque Σmqq et $K - \frac{1}{2}\Sigma mqq$, $6n$ variabilium q et p respectu formatum: secundum regulas generales Cap. II. traditas erit aequationum differentialium reductarum (37.)

Multiplicator

$$\mu = \frac{M}{G.r^{i+3}} = \frac{1}{G.r^{\varkappa+i+3}},$$

denominatore r^{i+3} inde proveniente, quod in aequationibus (29.) et (30.) functiones Constantibus Arbitrariis c et h aequatae per r^2 et r^{i+1} multiplicantur. Eadem ratione, qua supra Multiplicatorem L e N deduxi, sequitur, $6n-3$ aequationum differentialium primi ordinis inter $6n-2$ variabiles v locum habentium,

$$38. \quad dv_1 : dv_2 \ldots . : dv_{6n-2} = V_1 : V_2 \ldots . : V_{6n-2}$$

Multiplicatorem fieri

$$39. \quad \nu = \mu r = \frac{1}{G.r^{\varkappa+i+2}} = \frac{1}{G}.r^{\frac{1}{2}(i+3)(3n-1)}.$$

Aequationibus (38.) complete integratis, Multiplicator ν Determinante functionali datur, ideoque ope formulae (39.) variabilis r valor per quantitates v sine Quadratura determinatur. Qui insuper in Constantem Arbitrariam ducendus est, quippe proportionalis est potestati Multiplicatoris, quem factore constante arbitrario afficere licet.

Principium ultimi Multiplicatoris applicatur ad systema liberum punctorum materialium in medio resistente motum. De cometa in aethere resistente circa solem moto.

§. 29.

Determinatio multiplicatoris etiam in quibusdam problematis mechanicis succedit, in quibus viribus sollicitantibus aliae accedunt e medii resistentia natae, veluti in motu puncti in medio resistente circa centrum fixum, versus quod secundum legem *Neutonianam* attrahitur.

Sint rursus puncti massa m_i praediti Coordinatae orthogonales x_i, y_i, z_i, sit $x_i' = \frac{dx_i}{dt}$, $y_i' = \frac{dy_i}{dt}$, $z_i' = \frac{dz_i}{dt}$, atque puncti velocitas

$$v_i = \sqrt{(x_i'x_i' + y_i'y_i' + z_i'z_i')}.$$

Si puncta moventur in medio, quod cuiusque motui in directione tangentis orbitae eius resistit, viribus massam m_i secundum Coordinatarum directiones sollicitantibus X_i, Y_i, Z_i, quae solarum Coordinatarum et, si placet, temporis t functiones esse supponuntur, accedunt vires resistentia medii provenientes,

$$-m_i f_i V_i . \frac{x_i'}{v_i}, \quad -m_i f_i V_i . \frac{y_i'}{v_i}, \quad -m_i f_i V_i . \frac{z_i'}{v_i},$$

ubi V_i est solius v_i functio resistentiae legem exprimens atque f_i, si forma corporis m_i non respicitur, est solarum x_i, y_i, z_i functio aequalis densitati medii

in puncto m_i, divisae per massam m_i et multiplicatae per Constantem superficiei corporis m_i proportionalem. Est igitur motus systematis liberi punctorum materialium determinandus per systema aequationum differentialium secundi ordinis huiusmodi,

$$1.\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = \dfrac{1}{m_i} X_i - f_i V_i . \dfrac{x'_i}{v_i}, \\ \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = \dfrac{1}{m_i} Y_i - f_i V_i . \dfrac{y'_i}{v_i}, \\ \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = \dfrac{1}{m_i} Z_i - f_i V_i . \dfrac{z'_i}{v_i}. \end{cases}$$

Quarum aequationum differentialium Multiplicator M, cum functiones X_i, Y_i, Z_i, f_i ab ipsis x'_i, y'_i, z'_i vacuae supponantur, definitur per formulam differentialem,

$$\frac{d \log M}{dt} = \Sigma f_i \left\{ \frac{\partial . V_i v_i^{-1} . x'_i}{\partial x'_i} + \frac{\partial . V_i v_i^{-1} . y'_i}{\partial y'_i} + \frac{\partial . V_i v_i^{-1} . z'_i}{\partial z'_i} \right\},$$

sive

$$2.\quad \frac{d \log M}{dt} = \Sigma f_i \left\{ 2 V_i v_i^{-1} + \frac{\partial V_i}{\partial v_i} \right\}.$$

Si motus in plano fit, aequationis (2.) loco habetur

$$\frac{d \log M}{dt} = \Sigma f_i \left\{ V_i v_i^{-1} + \frac{\partial V_i}{\partial v_i} \right\}.$$

Si motus in eadem recta fit, habetur

$$\frac{d \log M}{dt} = \Sigma f_i \frac{\partial V_i}{\partial v_i},$$

unde fit $M = 1$, si V_i est constans.

Sit $V_i = v_i$ sitque medium uniforme ideoque quantitates f_i constantes; sequitur e (2.):

$$3.\quad M = e^{3 \Sigma f_i . t} \;*).$$

Haec docet formula, *si motus fiat in medio uniformi, cuius resistentia velocitati directe proportionalis sit, atque vires sollicitantes X_i, Y_i, Z_i a solis Coordinatis pendeant, post omnia inter quantitates x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i inventa Integralia ultimo loco t per Coordinatam aliquam sine nova Quadratura exprimi posse.* Sint enim pro numero n punctorum materialium $6n-1$ Integralia inventa,

$$F_1 = \alpha_1, \quad F_2 = \alpha_2, \quad \ldots . \quad F_{6n-1} = \alpha_{6n-1},$$

*) Pro motu in plano fit eo casu $M = e^{2 \Sigma f_i . t}$, pro motu in eadem recta, $M = e^{\Sigma f_i . t}$.

ubi α_1, α_2 etc. sunt Constantes Arbitrariae; sit x una quaecunque Coordinatarum atque Δ Determinans functionum F_1, F_2 etc., quantitatum respectu omnium x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i praeter x formatum: sequitur e (3.) secundum Multiplicatoris definitionem initio huius Commentationis traditam,

$$4. \qquad 3t\Sigma f_i + \tau = \log\frac{\Delta}{x'},$$

designante τ novam Constantem Arbitrariam. Si virium sollicitantium expressiones X_i, Y_i, Z_i praeter mobilium Coordinatas ipsam quoque variabilem t continent, hanc non amplius separare licet; at docet formula (3.), *constante Multiplicatore M ultimam integrationem absolvi Quadraturis.*

Ponamus, systema punctorum materialium sive liberum sive certis conditionibus subiectum si in medio non resistente moveretur *conservatione arearum* gaudere, valebunt pro motu in medio resistente tres aequationes,

$$5. \qquad \begin{cases} d.\Sigma m_i(y_i z'_i - z_i y'_i) = -\Sigma m_i f_i \dfrac{V_i}{v_i}(y_i z'_i - z_i y'_i)\,dt, \\ d.\Sigma m_i(z_i x'_i - x_i z'_i) = -\Sigma m_i f_i \dfrac{V_i}{v_i}(z_i x'_i - x_i z'_i)\,dt, \\ d.\Sigma m_i(x_i y'_i - y_i x'_i) = -\Sigma m_i f_i \dfrac{V_i}{v_i}(x_i y'_i - y_i x'_i)\,dt. \end{cases}$$

Hinc si rursus $V_i = v_i$ et quantitates f_i omnes eidem Constanti f aequantur, sequitur

$$6. \qquad \begin{cases} \Sigma m_i(y_i z'_i - z_i y'_i) = a e^{-ft}, \\ \Sigma m\,(z_i x'_i - x_i z'_i) = b e^{-ft}, \\ \Sigma m_i(x_i y'_i - y_i x'_i) = c e^{-ft}, \end{cases}$$

designantibus a, b, c Constantes Arbitrarias. Patet e formulis (6.), *si elementa omnia sphaerica eiusdemque densitatis et magnitudinis supponantur, atque systema eorum in motu in vacuo conservatione arearum gauderet, eandem locum habere, si motus fiat in medio uniformi cuius resistentia velocitati proportionalis est, eandemque fore plani invariabilis positionem; summam arearum autem inde a tempore $t=0$ descriptarum et per massas multiplicatarum non sicuti in vacuo proportionalem fore tempori t, sed quantitati*

$$1 - \frac{1}{e^{ft}},$$

designante f Constantem positivam, ideoque tempore in infinitum crescente ad limitem crescere finitum. Ubi systema liberum est ideoque e (6.) et (3.) constat ipsius M valor per quantitates x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i expressus, docet

principium ultimi Multiplicatoris, praeter tria cognita Integralia prima (6.) adhuc *ultimum Integrale, inter quantitates x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i locum habens, Quadraturis absolvi posse.*

Iam unius puncti liberi consideremus motum planum in medio resistente. Qui motus definitur duabus aequationibus differentialibus secundi ordinis,

$$7. \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = X - f.\frac{x' V}{v}, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = Y - f.\frac{y' V}{v}, \end{cases}$$

ubi X, Y, f Coordinatarum orthogonalium x et y, atque V velocitatis $v = \sqrt{(x'x' + y'y')}$ functiones supponuntur. Aequationum (7.) Multiplicator M definitur formula differentiali,

$$8. \quad \frac{d \log M}{dt} = f\left\{\frac{\partial . x' v^{-1} V}{\partial x'} + \frac{\partial . y' v^{-1} V}{\partial y'}\right\} = f\left\{v^{-1} V + \frac{dV}{dv}\right\}.$$

Ponamus vim sollicitantem constanter dirigi versus centrum fixum, quod sit initium Coordinatarum, sive esse $X : Y = x : y$, sequitur e (7.):

$$9. \quad \frac{d \log(xy' - yx')}{dt} = -f.\frac{V}{v}.$$

Unde si $V = v^n$, e (8.) et (9.) eruitur, quaecunque sit functio f,

$$10. \quad M = \frac{1}{(xy' - yx')^{n+1}}.$$

Si vis attractiva est functio radii vectoris r sive distantiae a centro attractionis, quam functionem designemus per

$$F'(r) = \frac{d F(r)}{dr} = -\frac{X dx + Y dy}{dr},$$

Multiplicatorem pro lege resistantiae adhuc generaliori assignare licet. Scilicet eo casu e (7.) sequitur formula,

$$11. \quad d\{\tfrac{1}{2} vv + F(r)\} = -f.vV.dt.$$

Qua iuncta aequationi (9.) patet, si a et b Constantes sint, assignari posse integrale expressionis

$$fV\left(av + \frac{b}{v}\right)dt = -a d\{\tfrac{1}{2} vv + F(r)\} - b d \log(xy' - yx').$$

Expressione ad laevam aequiparata huic,

$$f\left(\frac{V}{v} + \frac{dV}{dv}\right)dt = d \log M,$$

eruitur

$$12. \quad V = v^{b-1} e^{\frac{1}{2} a v v}.$$

Qua resistentiae lege supposita fit

$$13.\quad M = \frac{e^{-a[\frac{1}{2}vv+F(r)]}}{(xy'-yx')^b}.$$

Pro motibus incitatissimis, sicuti sunt cometarum, resistentiae lex formula (12.) expressa non a rerum natura abhorrere videtur, praesertim si Constanti a valor perparvus tribuitur.

Introducendo Coordinatas polares sit

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad r' = \frac{dr}{dt},\quad \varphi' = \frac{d\varphi}{dt},$$

unde

$$vv = r'r' + rr\varphi'\varphi',$$
$$xy' - yx' = rr\varphi' = r\sqrt{(vv - r'r')}.$$

Ponamus

$$\tfrac{1}{2}vv + F(r) = \tfrac{1}{2}(x'x' + y'y') + F(r) = \alpha,$$
$$xy' - yx' = rr\varphi' = \beta,$$

fit

$$\alpha = \tfrac{1}{2}r'r' + \tfrac{1}{2}\frac{\beta\beta}{rr} + F(r),$$

unde

$$14.\quad r' = \sqrt{\left(2\alpha - \frac{\beta\beta}{rr} - 2F(r)\right)}.$$

Hinc cum sit $r'dt = dr$, sequitur e (9.) et (11.):

$$15.\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dr} = -\dfrac{fvV}{\sqrt{\left(2\alpha - \frac{\beta\beta}{rr} - 2F(r)\right)}}, \\[2ex] \dfrac{d\beta}{dr} = -\dfrac{\beta f v^{-1} V}{\sqrt{\left(2\alpha - \frac{\beta\beta}{rr} - 2F(r)\right)}}. \end{cases}$$

Si motus propositus est motus cometae circa solem, atque densitas aetheris solem circumdantis functioni distantiae a sole aequatur, fit f solius r functio. Porro cum sit V solius v functio, ope aequationis

$$v = \sqrt{(2\alpha - 2F(r))},$$

quantitates vV et $v^{-1}V$ per α et r exprimere licet. Unde idonea variabilium electione effectum est, *ut motus cometae circa solem in aethere resistente tantum pendeat ab integratione duarum aequationum differentialium primi ordinis inter tres variabiles α, β, r; qua transacta si determinantur α et β per r, obtinentur φ et t per Quadraturas,*

$$16.\quad \begin{cases} \varphi = \int \dfrac{\beta\, dr}{rr\sqrt{\left(2\alpha - \frac{\beta\beta}{rr} - 2F(r)\right)}}, \\[2ex] t = \int \dfrac{dr}{\sqrt{\left(2\alpha - \frac{\beta\beta}{rr} - 2F(r)\right)}}. \end{cases}$$

Antecedentia valent, quaecunque sit resistentiae lex sive quaecunque sit V ipsius v functio. *Ubi autem aetheris, in quo cometa circa solem movetur, resistentia potestati velocitati cuicunque proportionalis est sive etiam legem generaliorem sequitur expressam formula $V = v^{b-1}e^{\frac{1}{2}avv}$, in qua a et b Constantes quascunque designant, sive aether uniformis sive cum distantia a sole secundum quamcunque legem variabilis sit, quaecunque sit vis attractiva solis, unico cognito Integrali reliquae tres integrationes per Quadraturas absolvuntur.* Nimirum determinata V per formulam (12.), constat per formulam (13.) aequationum differentialium propositarum (7.) Muliplicator M; eo autem cognito etiam dabitur Multiplicator M_1 aequationum differentialium, quae e (7.) obtinentur loco ipsarum x, y, x', y' quantitates $r, \varphi, \alpha, \beta$ introducendo,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\left(2\alpha - \frac{\beta\beta}{rr} - 2F(r)\right)}},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\beta}{rr}, \quad \frac{d\alpha}{dt} = -fvV, \quad \frac{d\beta}{dt} = -\beta f v^{-1} V.$$

Etenim aequatur $\frac{M_1}{M}$ Determinanti quantitatum x, y, x', y', variabilium $r, \varphi, \alpha, \beta$ respectu formato, unde si reputamus, ipsarum x et y expressiones quantitates α et β non continere, fit

$$M_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial y'}{\partial \beta} - \frac{\partial x'}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right).M$$

$$= \frac{rM}{\frac{\partial \alpha}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial y'} - \frac{\partial \alpha}{\partial y'}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x'}} = \frac{rM}{xx'+yy'} = \frac{M}{r'}.$$

Si uti in (15.) variabilem r loco ipsius t pro independente adhibemus, Multiplicator antecedens in r' ducendus est, unde in ipsum M redimus, qui ponendo $V = v^{b-1}e^{\frac{1}{2}avv}$ secundum (13.) invenitur

$$17.\quad M = \beta^{-b}e^{-a\alpha}.$$

Qui valor cum non afficiatur variabilibus φ et t iisque non magis afficiantur differentialium $\frac{d\alpha}{dr}$ et $\frac{d\beta}{dr}$ valores (15.), erit $M = \beta^{-b}e^{-a\alpha}$ etiam Multiplicator

duarum aequationum differentialium primi ordinis (15.), inter tres variabiles r, α, β locum habentium.

Quod ut directe pateat, pono

$$18. \quad r\gamma = \frac{\beta}{v} = \frac{\beta}{\sqrt{(2\alpha - 2F(r))}},$$

unde

$$r' = \sqrt{\left(2\alpha + 2F(r) - \frac{\beta\beta}{rr}\right)} = v\sqrt{(1-\gamma\gamma)},$$

$$r\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha} = \frac{-\beta}{v^3}, \quad r\frac{\partial\gamma}{\partial\beta} = \frac{1}{v}.$$

Ubi insuper brevitatis causa vocamus R solius r functionem

$$19. \quad r^{-(b-1)}f.e^{-aF(r)} = R,$$

fit

$$20. \quad rvf.MV = rv^b\beta^{-b}.fe^{\lambda avv-a\alpha} = R.\gamma^{-b}.$$

Quibus substitutis si elementum independens dr Multiplicatori M proportionale statuimus, aequationes differentiales (9.) evadunt:

$$21. \quad dr:d\alpha:d\beta = \beta^{-b}e^{-a\alpha}: -R.\frac{\gamma^{-b}}{\sqrt{(1-\gamma\gamma)}}.\frac{\partial\gamma}{\partial\beta}:R\frac{\gamma^{-b}}{\sqrt{(1-\gamma\gamma)}}.\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}.$$

Quam patet ita comparatam esse formulam ut, dextris partibus vocatis A, B, C, fiat

$$22. \quad \frac{\partial A}{\partial r}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{\partial C}{\partial\beta} = \frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{\partial C}{\partial\beta} = 0,$$

sicuti fieri debet.

Sint u et w duae quaecunque variabilium r, α, β functiones atque obtineatur e (15.) sive e (21.),

$$dr:du:dw = \beta^{-b}e^{-a\alpha}:D:E.$$

Sit porro inventum aequationum differentialium (15.) sive (21.) Integrale, Constante Arbitraria c affectum, cuius ope exprimantur r, α, β per c, u, w, ponaturque

$$\frac{\partial r}{\partial c}\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial u}.\frac{\partial\beta}{\partial w}-\frac{\partial\alpha}{\partial w}.\frac{\partial\beta}{\partial u}\right\}+\frac{\partial r}{\partial u}\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial w}.\frac{\partial\beta}{\partial c}-\frac{\partial\alpha}{\partial c}.\frac{\partial\beta}{\partial w}\right\}+\frac{\partial r}{\partial w}\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial c}.\frac{\partial\beta}{\partial u}-\frac{\partial\alpha}{\partial u}.\frac{\partial\beta}{\partial c}\right\}=\Delta;$$

sequitur e principio ultimi Multiplicatoris altera aequatio integralis,

$$\int\Delta\{E\,du - D\,dw\} = \text{Const.},$$

ubi, et ipsis D et E per u, w, c expressis, sub integrationis signo differentiale completum subest.

De multiplicatore aequationum differentialium isoperimetricarum.

§. 30.

Sit U data functio variabilis independentis t, dependentium x, y, z etc. et quotientium earum differentialium x', x'' etc., y', y'' etc., z', z'' etc. etc. Si proponitur problema, functiones x, y, z etc. ita determinandi, ut integrale

$$\int U\, dt$$

maximum minimumve evadat seu generalius, ut eius integralis variatio evanescat, constat problematis solutionem pendere ab integratione systematis aequationum differentialium,

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial x'}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial x''}}{dt^2} \text{ etc.},$$

$$0 = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial y'}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial y''}}{dt^2} \text{ etc.},$$

$$0 = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial z'}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial z''}}{dt^2} \text{ etc. etc.}$$

Quas in sequentibus vocabo *aequationes differentiales isoperimetricas*, cum problema, quod ab earum integratione pendet, nomine licet improprio isoperimetrici appellari soleat. Quaeram aequationum differentialium isoperimetricarum Multiplicatorem.

Inchoabo a casu quo ipsa U praeter variabilem independentem t unicam continet functionem incognitam x una cum eius differentialibus $x', x'', \ldots\ldots x^{(n)}$. Eo casu unica integranda est aequatio differentialis $2n^{ti}$ ordinis,

$$1. \quad 0 = V = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial x'}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial x''}}{dt^2} \ldots\ldots \pm \frac{d^n\frac{\partial U}{\partial x^{(n)}}}{dt^n}.$$

Ex aequatione (1.) si eruitur quantitatis $x^{(2n)}$ valor

$$x^{(2n)} = A,$$

huius aequationis Multiplicator M secundum (5.) §. 14. definitur formula differentiali,

$$\frac{d\log M}{dt} = -\frac{\partial A}{\partial x^{(2n-1)}} = \frac{\frac{\partial V}{\partial x^{(2n-1)}}}{\frac{\partial V}{\partial x^{(2n)}}}.$$

E $n+1$ expressionis V terminis bini ultimi soli continent quantitatem $x^{(2n-1)}$, solus ultimus quantitatem $x^{(2n)}$, unde fit

$$
2.\quad \begin{cases} (-1)^n \dfrac{\partial V}{\partial x^{(2n-1)}} = \dfrac{\partial . \dfrac{d^n \frac{\partial U}{\partial x^{(n)}}}{dt^n}}{\partial x^{(2n-1)}} - \dfrac{\partial . \dfrac{d^{n-1} \frac{\partial U}{\partial x^{(n-1)}}}{dt^{n-1}}}{\partial x^{(2n-1)}}, \\[2ex] (-1)^n \dfrac{\partial V}{\partial x^{(2n)}} = \dfrac{\partial . \dfrac{d^n \frac{\partial U}{\partial x^{(n)}}}{dt^n}}{\partial x^{(2n)}}. \end{cases}
$$

Quantitatum ad dextram valores suppeditat formula generalis, quam in variis occasionibus utilem hic apponam.

Sit W functio quaecunque variabilis independentis t, dependentis x atque ipsius x quotientium differentialium x', x'' etc.; fit

$$
\delta \frac{d^m W}{dt^m} = \frac{d^m . \delta W}{dt^m} = \frac{d^m \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} \delta t + \frac{\partial W}{\partial x} \delta x + \frac{\partial W}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial W}{\partial x''} \delta x'' \text{ etc.} \right\}}{dt^m}.
$$

Factis differentiationibus et ubique substituta formula

$$
\frac{d^i . \delta x^{(h)}}{dt^i} = \delta \frac{d^i x^{(h)}}{dt^i} = \delta x^{(h+i)},
$$

eruitur quantitas in $\delta x^{(\varkappa)}$ ducta,

$$
3.\quad \frac{\partial . \frac{d^m W}{dt^m}}{\partial x^{(\varkappa)}} = \frac{d^m . \frac{\partial W}{\partial x^{(\varkappa)}}}{dt^m} + m \frac{d^{m-1} . \frac{\partial W}{\partial x^{(\varkappa-1)}}}{dt^{m-1}} + \frac{m(m-1)}{1.2} . \frac{d^{m-2} . \frac{\partial W}{\partial x^{(\varkappa-2)}}}{dt^{m-2}} + \text{etc.},
$$

quae formula, si $m \geqq \varkappa$, usque ad terminum

$$
\frac{m.(m-1)(m-2)\ldots.(m-\varkappa+1)}{1.2\ldots.\varkappa} . \frac{d^{m-\varkappa} . \frac{\partial W}{\partial x}}{dt^{m-\varkappa}},
$$

si $m \leqq \varkappa$, usque ad terminum

$$
\frac{\partial W}{\partial x^{(\varkappa-m)}}
$$

continuanda est. Posteriore casu formula (3.) etiam hoc modo exhiberi potest,

$$
4.\quad \frac{\partial . \frac{d^m W}{dt^m}}{\partial x^{(\varkappa)}} = \frac{\partial W}{\partial x^{(\varkappa-m)}} + m \frac{d . \frac{\partial W}{\partial x^{(\varkappa-m+1)}}}{dt} + \frac{m(m-1)}{1.2} . \frac{d^2 . \frac{\partial W}{\partial x^{(\varkappa-m+2)}}}{dt^2} + \text{etc.}
$$

Formulae antecedentes (3.) et (4.) immutatae manent, si functio W praeter variabilem dependentem x eiusque quotientes differentiales alias dependentes y, z, etc. earumque quotientes differentiales continet. Si functionem W plures variabiles independentes dependentesque earumque differentialia partialia affi-

ciunt, eamque secundum diversas variabiles independentes diversis vicibus iteratis complete differentiamus, huius quoque differentialis completi differentialia partialia simili ratione inveniuntur.

Ponamus ipsius x differentiale n^{tum} altissimum esse quod in expressione W obveniat, sequitur e (4.), si $\varkappa = m+n$,

$$5. \qquad \frac{\partial . \frac{d^m W}{dt^m}}{\partial x^{(m+n)}} = \frac{\partial W}{\partial x^{(n)}},$$

si $\varkappa = m+n-1$,

$$6. \qquad \frac{\partial . \frac{d^m W}{dt^m}}{\partial x^{(m+n-1)}} = \frac{\partial W}{\partial x^{(n-1)}} + m \frac{d . \frac{\partial W}{\partial x^{(n)}}}{dt}.$$

Unde ponendo $m = n$, $m = n-1$ prodit

$$\frac{\partial . \frac{d^n . \frac{\partial U}{\partial x^{(n)}}}{dt^n}}{\partial x^{(2n)}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}}, \qquad \frac{\partial . \frac{d^{n-1} . \frac{\partial U}{\partial x^{(n-1)}}}{dt^{n-1}}}{\partial x^{(2n-1)}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n-1)}},$$

$$\frac{\partial . \frac{d^n . \frac{\partial U}{\partial x^{(n)}}}{dt^n}}{\partial x^{(2n-1)}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n-1)}} + n \frac{d . \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}}}{dt}.$$

Quibus valoribus in formulis (2.) substitutis eruitur

$$(-1)^n \frac{\partial V}{\partial x^{(2n)}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}},$$

$$(-1)^n \frac{\partial V}{\partial x^{(2n-1)}} = n \frac{d . \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}}}{dt},$$

unde iam

$$\frac{d \log M}{dt} = n \frac{d \log \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}}}{dt}; \qquad M = \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}} \right\}^n.$$

Multiplicatoris M valore invento, principio ultimi Multiplicatoris ultima integratio Quadraturis absolvi potest. Sit ex. gr.

$$U = \sqrt{(E + 2Fx' + G'x'x')},$$

ubi E, F, G ipsarum t et x datae functiones sunt, unde eruitur

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x' \partial x'} = \frac{EG - FF}{\{E + 2Fx' + Gx'x'\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Hinc, proposita aequatione differentiali,

$$\frac{d.\frac{\partial U}{\partial x'}}{dt} - \frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

si per primam integrationem x' per t, x et Constantem Arbitrariam α expressa datur, altera integratio dabitur formula

$$\int \frac{\frac{\partial x'}{\partial \alpha}(EG-FF)(x'dt-dx)}{\{E+2Fx'+Gx'x'\}^{\frac{1}{2}}} = \text{Const.},$$

ubi sub integrationis signo differentiale completum subest.

§. 31.

Iam statuamus, functionem U praeter variabilem independentem t pluribus affici dependentibus earumque quotientibus differentialibus, omnium autem variabilium differentialia altissima ad eundem n^{tum} ordinem ascendere. Sint variabiles dependentes tres x, y, z; tres integrandae sunt aequationes differentiales

$$1. \quad X=0, \quad Y=0, \quad Z=0,$$

posito

$$2. \quad \begin{cases} (-1)^n X = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d.\frac{\partial U}{\partial x'}}{dt} + \frac{d^2.\frac{\partial U}{\partial x''}}{dt^2} \dots (-1)^n \frac{d^n.\frac{\partial U}{\partial x^{(n)}}}{dt^n}, \\ (-1)^n Y = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d.\frac{\partial U}{\partial y'}}{dt} + \frac{d^2.\frac{\partial U}{\partial y''}}{dt^2} \dots (-1)^n \frac{d^n.\frac{\partial U}{\partial y^{(n)}}}{dt^n}, \\ (-1)^n Z = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{d.\frac{\partial U}{\partial z'}}{dt} + \frac{d^2.\frac{\partial U}{\partial z''}}{dt^2} \dots (-1)^n \frac{d^n.\frac{\partial U}{\partial z^{(n)}}}{dt^n}. \end{cases}$$

Ex aequationibus (1.) altissimorum quibus afficiuntur differentialium $x^{(2n)}$, $y^{(2n)}$, $z^{(2n)}$ petantur valores, per differentialia inferiora ipsasque variabiles x, y, z, t expressi, quibus respective secundum quantitates $x^{(2n-1)}$, $y^{(2n-1)}$, $z^{(2n-1)}$ differentiatis fiat

$$3. \quad \frac{\partial x^{(2n)}}{\partial x^{(2n-1)}} = u, \quad \frac{\partial y^{(2n)}}{\partial y^{(2n-1)}} = v_1, \quad \frac{\partial z^{(2n)}}{\partial z^{(2n-1)}} = w_2,$$

unde aequationum differentialium (3.) Multiplicator M secundum (5.) §. 14. erit

$$4. \quad \frac{d \log M}{dt} = -\{u+v_1+w_2\}.$$

Quantitates u, v_1, w_2 determinandae sunt ternis aequationum linearium systematis, quae solis terminis ad dextram positis inter se differunt,

$$
5.\quad \begin{cases}
\frac{\partial X}{\partial x^{(2n)}} u + \frac{\partial X}{\partial y^{(2n)}} v + \frac{\partial X}{\partial z^{(2n)}} w = -\frac{\partial X}{\partial x^{(2n-1)}}, \\
\frac{\partial Y}{\partial x^{(2n)}} u + \frac{\partial Y}{\partial y^{(2n)}} v + \frac{\partial Y}{\partial z^{(2n)}} w = -\frac{\partial Y}{\partial x^{(2n-1)}}, \\
\frac{\partial Z}{\partial x^{(2n)}} u + \frac{\partial Z}{\partial y^{(2n)}} v + \frac{\partial Z}{\partial z^{(2n)}} w = -\frac{\partial Z}{\partial x^{(2n-1)}}, \\
\frac{\partial X}{\partial x^{(2n)}} u_1 + \frac{\partial X}{\partial y^{(2n)}} v_1 + \frac{\partial X}{\partial z^{(2n)}} w_1 = -\frac{\partial X}{\partial y^{(2n-1)}}, \\
\frac{\partial Y}{\partial x^{(2n)}} u_1 + \frac{\partial Y}{\partial y^{(2n)}} v_1 + \frac{\partial Y}{\partial z^{(2n)}} w_1 = -\frac{\partial Y}{\partial y^{(2n-1)}}, \\
\frac{\partial Z}{\partial x^{(2n)}} u_1 + \frac{\partial Z}{\partial y^{(2n)}} v_1 + \frac{\partial Z}{\partial z^{(2n)}} w_1 = -\frac{\partial Z}{\partial y^{(2n-1)}}, \\
\frac{\partial X}{\partial x^{(2n)}} u_2 + \frac{\partial X}{\partial y^{(2n)}} v_2 + \frac{\partial X}{\partial z^{(2n)}} w_2 = -\frac{\partial X}{\partial z^{(2n-1)}}, \\
\frac{\partial Y}{\partial x^{(2n)}} u_2 + \frac{\partial Y}{\partial y^{(2n)}} v_2 + \frac{\partial Y}{\partial z^{(2n)}} w_2 = -\frac{\partial Y}{\partial z^{(2n-1)}}, \\
\frac{\partial Z}{\partial x^{(2n)}} u_2 + \frac{\partial Z}{\partial y^{(2n)}} v_2 + \frac{\partial Z}{\partial z^{(2n)}} w_2 = -\frac{\partial Z}{\partial z^{(2n-1)}}.
\end{cases}
$$

Ponamus

$$
6.\quad \begin{cases}
\frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}} = A, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^{(n)} \partial y^{(n)}} = B, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^{(n)} \partial z^{(n)}} = C, \\
\frac{\partial^2 U}{\partial y^{(n)} \partial z^{(n)}} = D, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^{(n)} \partial x^{(n)}} = E, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n)} \partial y^{(n)}} = F, \\
\frac{\partial^2 U}{\partial y^{(n-1)} \partial z^{(n)}} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^{(n-1)} \partial y^{(n)}} = a, \\
\frac{\partial^2 U}{\partial z^{(n-1)} \partial x^{(n)}} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n-1)} \partial z^{(n)}} = b, \\
\frac{\partial^2 U}{\partial x^{(n-1)} \partial y^{(n)}} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^{(n-1)} \partial x^{(n)}} = c.
\end{cases}
$$

In formulis (5.) et (6.) §. pr. ipsi W substituendo sex functiones $\frac{\partial U}{\partial x^{(n)}}$, $\frac{\partial U}{\partial y^{(n)}}$, $\frac{\partial U}{\partial z^{(n)}}$, $\frac{\partial U}{\partial x^{(n-1)}}$, $\frac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}}$, $\frac{\partial U}{\partial z^{(n-1)}}$, pro ipsa x autem functiones x, y, z sumendo sequitur

$$7.\quad\begin{cases}
\dfrac{\partial X}{\partial x^{(2n)}} = A, & \dfrac{\partial Y}{\partial x^{(2n)}} = F, & \dfrac{\partial Z}{\partial x^{(2n)}} = E,\\[2mm]
\dfrac{\partial X}{\partial y^{(2n)}} = F, & \dfrac{\partial Y}{\partial y^{(2n)}} = B, & \dfrac{\partial Z}{\partial y^{(2n)}} = D,\\[2mm]
\dfrac{\partial X}{\partial z^{(2n)}} = E, & \dfrac{\partial Y}{\partial z^{(2n)}} = D, & \dfrac{\partial Z}{\partial z^{(2n)}} = C;\\[2mm]
\dfrac{\partial X}{\partial x^{(2n-1)}} = n\dfrac{dA}{dt}, & \dfrac{\partial Y}{\partial x^{(2n-1)}} = n\dfrac{dF}{dt}+c, & \dfrac{\partial Z}{\partial x^{(2n-1)}} = n\dfrac{dE}{dt}-b,\\[2mm]
\dfrac{\partial X}{\partial y^{(2n-1)}} = n\dfrac{dF}{dt}-c, & \dfrac{\partial Y}{\partial y^{(2n-1)}} = n\dfrac{dB}{dt}, & \dfrac{\partial Z}{\partial y^{(2n-1)}} = n\dfrac{dD}{dt}+a,\\[2mm]
\dfrac{\partial X}{\partial z^{(2n-1)}} = n\dfrac{dE}{dt}+b, & \dfrac{\partial Y}{\partial z^{(2n-1)}} = n\dfrac{dD}{dt}-a, & \dfrac{\partial Z}{\partial z^{(2n-1)}} = n\dfrac{dC}{dt}.
\end{cases}$$

Hos valores substituendo tria systemata aequationum linearium (5.) evadunt,

$$8.\quad\begin{cases}
Au+Fv+Ew = -n\dfrac{dA}{dt},\\
Fu+Bv+Dw = -n\dfrac{dF}{dt}-c,\\
Eu+Dv+Cw = -n\dfrac{dE}{dt}+b,\\[2mm]
Au_1+Fv_1+Ew_1 = -n\dfrac{dF}{dt}+c,\\
Fu_1+Bv_1+Dw_1 = -n\dfrac{dB}{dt},\\
Eu_1+Dv_1+Cw_1 = -n\dfrac{dD}{dt}-a,\\[2mm]
Au_2+Fv_2+Ew_2 = -n\dfrac{dE}{dt}-b,\\
Fu_2+Bv_2+Dw_2 = -n\dfrac{dD}{dt}+a,\\
Eu_2+Dv_2+Cw_2 = -n\dfrac{dC}{dt}.
\end{cases}$$

Quorum systematum Determinans commune si vocatur

$$9.\quad R = ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF,$$

eorum resolutione algebraica obtinetur,

$$10.\quad \begin{cases} -Ru = n\left\{\frac{\partial R}{\partial A}\cdot\frac{dA}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial F}\cdot\frac{dF}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial E}\cdot\frac{dE}{dt}\right\}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial F}c-\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial E}b,\\ -Rv_1 = n\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial F}\cdot\frac{dF}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial B}\cdot\frac{dB}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial D}\cdot\frac{dD}{dt}\right\}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial D}a-\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial F}c,\\ -Rw_2 = n\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial E}\cdot\frac{dE}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial D}\cdot\frac{dD}{dt}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial C}\cdot\frac{dC}{dt}\right\}+\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial E}b-\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial D}a. \end{cases}$$

Quibus formulis additis termini per a, b, c multiplicati se mutuo destruunt, unde prodit

$$\frac{d\log M}{dt} = -\{u+v_1+w_2\} = n\frac{dR}{Rdt},$$

ideoque

$$M = R^n = \{ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 + 2DEF\}^n.$$

Quo valore invento, si per omnia praeter unum Integralia inventa problema in aequationem differentialem primi ordinis inter duas variabiles redit, huius quoque Multiplicator constabit.

Adiumento theorematum generalium in fine §ⁱ 16. propositorum antecedentia extendere licet ad casum quo functio U praeter variabilem independentem numerum quemlibet dependentium continet, singularum differentialibus altissimis omnibus ad eundem ordinem ascendentibus. At si diversarum variabilium dependentium differentialia altissima in functione U non omnia ad eundem ordinem ascendunt, Multiplicatoris aequationum differentialium isoperimetricarum determinatio difficilior est. Scilicet nascitur difficultas eo quod casu quem innui aequationes differentiales isoperimetricae formam normalem exuant, qua altissima diversarum variabilium differentialia per differentialia inferiora ipsasque variabiles determinantur. Reductio ad formam normalem cum molestissima ac saepe inextricabilibus difficultatibus obnoxia sit, demonstrabo sequentibus, quomodo generaliter eruere liceat formulam differentialem qua Multiplicator definiatur, etiamsi ipsa reductio effecta non supponatur. Quae formula in problemate isoperimetrico generali proposito ipsum Multiplicatoris valorem suppeditabit.

De reductione aequationum differentialium ad formam normalem et formula symbolica qua reductarum Multiplicator definiatur. Aequationum differentialium isoperimetricarum ad formam normalem reductarum Multiplicator.

§. 32.

Datae sint inter variabilem independentem t atque n dependentes x_1, x_2, ... x_n totidem aequationes differentiales

$$1.\quad F_1 = 0,\quad F_2 = 0,\quad \ldots\ldots\quad F_n = 0,$$

non ea forma normali praeditae quae permittat, ut differentialium singularum variabilium altissimorum valores per differentialia inferiora ipsasque variabiles exprimantur. Cuiusmodi habentur aequationes, si in earum una pluribusve altissima differentialia sive omnino desunt sive ex iis reliquarum adiumento aequationum eliminari possunt. Eo casu iteratis aequationum (1.) differentiationibus formandum est systema *aequationum auxiliarium*, quarum ope totidem differentialia eliminando forma normalis eruatur. Varios modos, quibus ea operatio institui potest, in alia Commentatione tradam, quippe quae quaestio multis egregiis theorematis nititur, quae uberiorem expositionem poscunt. Hic observare sufficiat, si ad aequationes auxiliares formandas aequatio $F_i = 0$ sit λ_i vicibus iteratis differentianda, ponaturque

$$\frac{d^{\lambda_i} F_i}{dt^{\lambda_i}} = \varphi_i,$$

numeros λ_i ita comparatos esse debere, ut ex aequationibus

$$2. \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad \varphi_n = 0$$

altissimorum differentialium in iis obvenientium

$$x_1^{(p_1)}, \quad x_2^{(p_2)}, \quad \ldots\ldots \quad x_n^{(p_n)}$$

peti possint valores per differentialia inferiora ipsasque variabiles expressi. Unde aequationes (2.) per se consideratae constituere debent aequationum differentialium systema forma normali gaudens, multo tamen altioris ordinis quam qui systemati aequationum differentialium propositarum proprius est. Aequationes enim propositas atque auxiliares praeter ipsas (2.) omnes habere licet pro aequationum (2.) Integralibus earum reductioni inservientibus. Quae Integralia, licet particularia, talia sunt, ut aequationum differentialium eorum ope reductarum Multiplicator e Multiplicatore aequationum (2.) erui possit. Etenim si tantum aequationes (2.) proponerentur, loco aequationum

$$\frac{d^{\lambda_i-1} F_i}{dt^{\lambda_i-1}} = 0, \quad \frac{d^{\lambda_i-2} F_i}{dt^{\lambda_i-2}} = 0, \quad \ldots\ldots \quad F_i = 0$$

ad reductionem adhiberi possent aequationum (2.) Integralia completa

$$\frac{d^{\lambda_i-1} F_i}{dt^{\lambda_i-1}} = c_1^{(i)}, \quad \frac{d^{\lambda_i-2} F_i}{dt^{\lambda_i-2}} = c_1^{(i)} t + c_2^{(i)}, \text{ etc.}$$

designantibus $c_1^{(i)}$, $c_2^{(i)}$ etc. Constantes Arbitrarias. Multiplicator autem aequationum reductarum secundum §. 12. obtinetur dividendo aequationum (2.) Multiplicatorem per Determinans $\lambda_1 + \lambda_2 \ldots\ldots + \lambda_n$ functionum

$$\frac{d^{\lambda_i-1}F_i}{dt^{\lambda_i-1}},\quad \frac{d^{\lambda_i-2}F_i}{dt^{\lambda_i-2}},\quad \ldots\ldots\quad F_i,$$

formatum respectu differentialium eliminandorum, idque sive Constantibus Arbitrariis $c_1^{(i)}$, $c_2^{(i)}$ etc. valores generales servantur, sive iis valores tribuuntur particulares, uti in quaestione proposita, in qua omnes statuuntur evanescere.

Aequationum (2.) Multiplicator definitur formula symbolica §. 15. tradita,

$$3.\qquad d\log M = \delta \log \Sigma \pm A_1' A_2'' \ldots\ldots A_n^{(n)},$$

posito

$$4.\qquad A_\varkappa^{(i)} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\varkappa^{(p_\varkappa)}},\qquad \delta A_\varkappa^{(i)} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\varkappa^{(p_\varkappa-1)}} dt.$$

Has quantitates secundum formulas (5.) et (6.) §. 30. sic exhibere licet,

$$5.\qquad A_\varkappa^{(i)} = \frac{\partial F_i}{\partial x_\varkappa^{(p_\varkappa-\lambda_i)}},\qquad \delta A_\varkappa^{(i)} = \frac{\partial F_i}{\partial x_\varkappa^{(p_\varkappa-\lambda_i-1)}} dt + \lambda_i\, d A_\varkappa^{(i)}.$$

Unde ad condendam formulam (3.) sufficiunt datae aequationes (1.) numerorumque λ_1, λ_2, ... λ_n cognitio. Observo si ponatur

$$\varDelta A_\varkappa^{(i)} = \frac{\partial F_i}{\partial x_\varkappa^{(p_\varkappa-\lambda_i-1)}} dt + (\lambda_i - \alpha) d A_\varkappa^{(i)},$$

designante α numerum quemcunque, formulam (3.) abire in hanc,

$$d\log \frac{M}{\{\Sigma \pm A_1' A_2'' \ldots A_n^{(n)}\}^\alpha} = \varDelta \log \Sigma \pm A_1' A_2'' \ldots\ldots A_n^{(n)},$$

unde obtineri potest variationis formandae simplificatio.

In problemate isoperimetrico, quod aequatione $\delta\int U\,dt = 0$ continetur, expressio U praeter variabilem independentem t contineat n dependentes $x_1, x_2, \ldots x_n$ atque differentialia ipsius x_1 usque ad $m_1$tum, ipsius x_2 usque ad $m_2$tum etc.: erunt aequationes differentiales integrandae,

$$6.\quad \begin{cases} 0 = F_1 = \dfrac{d^{m_1}.\dfrac{\partial U}{\partial x_1^{(m_1)}}}{dt^{m_1}} - \dfrac{d^{m_1-1}.\dfrac{\partial U}{\partial x_1^{(m_1-1)}}}{dt^{m_1-1}} \ldots\ldots, \\ 0 = F_2 = \dfrac{d^{m_2}.\dfrac{\partial U}{\partial x_2^{(m_2)}}}{dt^{m_2}} - \dfrac{d^{m_2-1}.\dfrac{\partial U}{\partial x_2^{(m_2-1)}}}{dt^{m_2-1}} \ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = F_n = \dfrac{d^{m_n}.\dfrac{\partial U}{\partial x^{(m_n)}}}{dt^{m_n}} - \dfrac{d^{m_n-1}.\dfrac{\partial U}{\partial x_n^{(m_n-1)}}}{dt^{m_n-1}} \ldots\ldots \end{cases}$$

Si m_1 omnium numerorum $m_1, m_2, \ldots m_n$ maximus est, aequationum auxiliarium systema facile constat obtineri differentiando aequationes $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ etc. respective $m_1 - m_2$, $m_1 - m_3$ etc. vicibus, unde fit

$$\begin{array}{lllll} \lambda_1 = 0, & \lambda_2 = m_1 - m_2, & \lambda_3 = m_1 - m_3, & \ldots\ldots & \lambda_n = m_1 - m_n, \\ p_1 = 2m_1, & p_2 = m_1 + m_2, & p_3 = m_1 + m_3, & \ldots\ldots & p_n = m_1 + m_n. \end{array}$$

Hinc eruitur

$$7. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \varphi_1 = \dfrac{d^{m_1} \cdot \dfrac{\partial U}{\partial x_1^{(m_1)}}}{dt^{m_1}} - \dfrac{d^{m_1-1} \cdot \dfrac{\partial U}{\partial x_1^{(m_1-1)}}}{dt^{m_1-1}} \ldots, \\ 0 = \varphi_2 = \dfrac{d^{m_1} \cdot \dfrac{\partial U}{\partial x_2^{(m_2)}}}{dt^{m_1}} - \dfrac{d^{m_1-1} \cdot \dfrac{\partial U}{\partial x_2^{(m_2-1)}}}{dt^{m_1-1}} \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = \varphi_n = \dfrac{d^{m_1} \cdot \dfrac{\partial U}{\partial x_n^{(m_n)}}}{dt^{m_1}} - \dfrac{d^{m_1-1} \cdot \dfrac{\partial U}{\partial x_n^{(m_n-1)}}}{dt^{m_1-1}} \ldots\ldots \end{array} \right.$$

Unde per formulas $\S^i$ 30. sequitur

$$8. \quad \left\{ \begin{array}{l} A_x^{(i)} = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_x^{(m_1+m_x)}} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_i^{(m_i)} \partial x_x^{(m_x)}}, \\ \delta A_x^{(i)} = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_x^{(m_1+m_x-1)}} dt = m_1 \dfrac{d A_x^{(i)}}{dt} + B_{i,x}\, dt, \end{array} \right.$$

siquidem ponitur

$$B_{i,x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^{(m_i)} \partial x_x^{(m_x-1)}} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^{(m_i-1)} \partial x_x^{(m_x)}}.$$

Cum sit

$$A_x^{(i)} = A_i^{(x)} \quad \text{ideoque} \quad \frac{\partial \Sigma \pm A_1' A_2'' \ldots A_n^{(n)}}{\partial A_x^{(i)}} = \frac{\partial \Sigma \pm A_1' A_2'' \ldots A_n^{(n)}}{\partial A_i^{(x)}},$$

$$B_x^{(i)} = -B_i^{(x)}, \quad B_i^{(i)} = 0,$$

in formanda variatione (3.) binorum terminorum aggregata

$$\left\{ \frac{\partial \Sigma \pm A_1' A_2'' \ldots A_n^{(n)}}{\partial A_x^{(i)}} B_{i,x} + \frac{\partial \Sigma \pm A_1' A_2'' \ldots A_n^{(n)}}{\partial A_i^{(x)}} B_{x,i} \right\} dt$$

evanescunt, unde ipsius $d \log M$ valor (3.) eruitur

$$\delta \log \Sigma \pm A_1' A_2'' \ldots A_n^{(n)} = m_1 d \log \Sigma \pm A_1' A_2'' \ldots A_n^{(n)},$$

ideoque

$$9. \quad M = \{\Sigma \pm A_1' A_2'' \ldots A_n^{(n)}\}^{m_1}.$$

... substituendo patet, si m_1 maximus ... m_1^{tae} Determinantis functionum

$$\ldots \quad \frac{\partial U}{\partial x_n^{(m_n)}},$$

... formati.

§. 33.

... normalem reductarumque aequationum differentialium

... (2.) valores quantitatum

$$x_1^{(p_1)}, \quad x_2^{(p_2)}, \quad \ldots \quad x_n^{(p_n)}$$

... quantitatibus expressiones $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ aliae aliis affi... ita ut eliminatio successiva locum habere possit. Sint

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_n$$

... inter se permutati, positoque

$$p_{x_i} = q_i$$

... quantitates $x_{x_1}^{(q_1)}$ ipsam φ_1, $x_{x_2}^{(q_2)}$ ipsam φ_2, $\ldots$ $x_{x_n}^{(q_n)}$ ipsam φ_n ... nihil impeditur, quin functio φ_i praeter $x_{x_i}^{(q_i)}$ quantitatum $x_{x_1}^{(q_1)}$, ... alias vel etiam omnes contineat. Supponamus

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \ldots \leqq \lambda_{n-1} \leqq \lambda_n,$$

$$\lambda_1 \ldots = \lambda_a = \alpha; \quad \lambda_{a+1} = \lambda_{a+2} \ldots = \lambda_b = \beta; \quad \text{etc.},$$

$$\lambda_{\nu+1} \ldots = \lambda_r = \varrho; \quad \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} \ldots = \lambda_n = \sigma.$$

... designante μ numerum ipso λ_i non maiorem, statuamus

$$\frac{d^{\lambda_i-\mu}.F_i}{dt^{\lambda_i-\mu}} = \varphi_i^{(-\mu)}, \quad F_i = \varphi_i^{(-\lambda_i)}.$$

Tum ex aequationibus propositis et auxiliaribus seligamus haec $\alpha+1$ systemata ... aequationum,

$$(1.) \begin{cases} \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots \quad \varphi_n = 0, \\ \varphi_1^{(-1)} = 0, \quad \varphi_2^{(-1)} = 0, \ldots \quad \varphi_n^{(-1)} = 0, \\ \varphi_1^{(-2)} = 0, \quad \varphi_2^{(-2)} = 0, \ldots \quad \varphi_n^{(-2)} = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots \quad F_a = 0, \quad \varphi_{a+1}^{(-\alpha)} = 0, \quad \varphi_{a+2}^{(-\alpha)} = 0, \ldots \quad \varphi_n^{(-\alpha)} = 0. \end{cases}$$

Systemate primo, secundo etc., ultimo respective determinantur quantitates

$$\begin{array}{llll} x_{x_1}^{(q_1)}, & x_{x_2}^{(q_2)}, & \ldots\ldots & x_{x_n}^{(q_n)}, \\ x_{x_1}^{(q_1-1)}, & x_{x_2}^{(q_2-1)}, & \ldots\ldots & x_{x_n}^{(q_n-1)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{x_1}^{(q_1-\alpha)}, & x_{x_2}^{(q_2-\alpha)}, & \ldots\ldots & x_{x_n}^{(q_n-\alpha)}. \end{array}$$

Unde aequationibus (10.) differentialia omnia exprimantur per alia his postremis inferiora. Eadem ratione aequationibus

$$\begin{array}{l} \varphi_{\alpha+1}^{(-\alpha-1)}=0,\ \varphi_{\alpha+2}^{(-\alpha-1)}=0,\ \ldots\ \varphi_{n}^{(-\alpha-1)}=0, \\ \varphi_{\alpha+1}^{(-\alpha-2)}=0,\ \varphi_{\alpha+2}^{(-\alpha-2)}=0,\ \ldots\ \varphi_{n}^{(-\alpha-2)}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{\alpha+1}=0,\ F_{\alpha+2}=0,\ \ldots\ F_b=0,\ \varphi_{b+1}^{(-\beta)}=0,\ \ldots\ \varphi_n^{(-\beta)}=0 \end{array}$$

differentialia omnia revocantur ad alia ipsis

$$x_{x_1}^{(q_1-\alpha)},\quad x_{x_2}^{(q_2-\alpha)},\quad \ldots\quad x_{x_a}^{(q_a-\alpha)},\quad x_{x_{a+1}}^{(q_{a+1}-\beta)},\quad \ldots\quad x_{x_n}^{(q_n-\beta)}$$

inferiora et ita porro. Postremo advocatis aequationibus

$$\begin{array}{llll} \varphi_{r+1}^{(-\varrho-1)}=0, & \varphi_{r+2}^{(-\varrho-1)}=0, & \ldots & \varphi_{n}^{(-\varrho-1)}=0, \\ \varphi_{r+1}^{(-\varrho-2)}=0, & \varphi_{r+2}^{(-\varrho-2)}=0, & \ldots & \varphi_{n}^{(-\varrho-2)}=0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{r+1}=0, & F_{r+2}=0, & \ldots & F_n=0 \end{array}$$

fit ut differentialia omnia ad alia revocentur inferiora ipsis

$$11.\qquad x_{x_1}^{(q_1-\lambda_1)},\quad x_{x_2}^{(q_2-\lambda_2)},\quad \ldots\quad x_{x_n}^{(q_n-\lambda_n)}.$$

Formulae, quibus ista differentialia (11.) per inferiora exprimuntur, ipsum constituunt aequationum differentialium systema forma normali gaudens, ad quod propositae (1.) revocari possunt. Cuius Multiplicator secundum theoremata Cap. II. proposita eruitur $\frac{M}{D}$, designante D omnium functionum

$$\begin{array}{llll} \varphi_1^{(-1)}, & \varphi_1^{(-2)}, & \ldots & \varphi_1^{(-\lambda_1)}, \\ \varphi_2^{(-1)}, & \varphi_2^{(-2)}, & \ldots & \varphi_2^{(-\lambda_2)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n^{(-1)}, & \varphi_n^{(-2)}, & \ldots & \varphi_n^{(-\lambda_n)} \end{array}$$

Determinans sumtum respectu quantitatum

$$\begin{matrix} x_{x_1}^{(q_1-1)}, & x_{x_1}^{(q_1-2)}, & \dots & x_1^{(q_1-\lambda_1)}, \\ x_{x_2}^{(q_2-1)}, & x_{x_2}^{(q_2-2)}, & \dots & x_{x_2}^{(q_2-\lambda_2)}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{x_n}^{(q_n-1)}, & x_{x_n}^{(q_n-2)}, & \dots & x_{x_n}^{(q_n-\lambda_n)}. \end{matrix}$$

Functiones enim illas nihilo aequiparando obtinemus aequationes reducendis (2.) adhibitas; quantitates illae autem sunt ipsae harum aequationum ope eliminandae. Quae eliminationes vidimus successive institui posse, ita ut aequationes quas in eadem linea horizontali posui per se constituant systema totidem quantitatibus eliminandis sufficiens. Unde fit ut Determinans D productum evadat σ sive λ_n Determinantium functionalium simpliciorum,

$$\begin{aligned} D = \prod_1^{\alpha} \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1^{(-h)}}{\partial x_{x_1}^{(q_1-h)}} \cdot \frac{\partial \varphi_2^{(-h)}}{\partial x_{x_2}^{(q_2-h)}} \cdots \frac{\partial \varphi_n^{(-h)}}{\partial x_n^{(q_n-h)}} \\ \times \prod_{\alpha+1}^{\beta} \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_{\alpha+1}^{(-h)}}{\partial \varphi_{x_{\alpha+1}}^{(q_{\alpha+1}-h)}} \cdot \frac{\partial \varphi_{\alpha+2}^{(-h)}}{\partial x_{x_{\alpha+2}}^{(q_{\alpha+2}-h)}} \cdots \frac{\partial \varphi_n^{(-h)}}{\partial x_{x_n}^{(q_n-h)}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \times \prod_{\varrho+1}^{\sigma} \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_{r+1}^{(-h)}}{\partial x_{x_{r+1}}^{(q_{r+1}-h)}} \cdot \frac{\partial \varphi_{r+2}^{(-h)}}{\partial x_{x_{r+2}}^{(q_{r+2}-h)}} \cdots \frac{\partial \varphi_n^{(-h)}}{\partial x_{x_n}^{(q_n-h)}}, \end{aligned}$$

siquidem in hac formula, designante h indicem in functione aliqua f obvenientem, ipso $\prod_\mu^\nu f(h)$ designatur productum $f(\mu)f(\mu+1)f(\mu+2)\dots f(\nu)$. Iam in formula antecedente singula Determinantia functionalia, quae idem signum Π amplectatur, observo inter se aequalia evadere eademque fore ac si ubique index $-h$ omitteretur. Unde si ponimus

$$A_f^{(i)} = \frac{\partial \varphi_i^{(-h)}}{\partial x_{x_f}^{(q_f-h)}} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{x_f}^{(q_f)}} = \frac{\partial F_i}{\partial x_{x_f}^{(q_f-\lambda_i)}},$$

obtinetur

$$\begin{aligned} 12. \quad D = \{\Sigma \pm A_1' A_2'' \dots A_n^{(n)}\}^{\alpha} \\ \times \{\Sigma \pm A_{\alpha+1}^{(\alpha+1)} A_{\alpha+2}^{(\alpha+2)} \dots A_n^{(n)}\}^{\beta-\alpha} \\ \times \{\Sigma \pm A_{b+1}^{(b+1)} A_{b+2}^{(b+2)} \dots A_n^{(n)}\}^{\gamma-\beta} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \times \{\Sigma \pm A_{r+1}^{(r+1)} A_{r+2}^{(r+2)} \dots A_n^{(n)}\}^{\sigma-\varrho}. \end{aligned}$$

Posito

$$13. \quad \Sigma \pm A_{i+1}^{(i+1)} A_{i+2}^{(i+2)} \dots A_n^{(n)} = R_i,$$

valor antecedens fit $R_0^{\alpha} R_a^{\beta-\alpha} R_b^{\gamma-\beta} \dots R_r^{\sigma-\varrho}$; qui etiam sic exhiberi potest,

$$14. \quad D = R_0^{\lambda_1} R_1^{\lambda_2-\lambda_1} R_2^{\lambda_3-\lambda_2} \dots R_{n-1}^{\lambda_n-\lambda_{n-1}},$$

qua de formula, si bini numeri se proxime insequentes λ_i et λ_{i+1} inter se aequales existunt, potestatem $R_i^{\lambda_{i+1}-\lambda_i}$ unitati aequalem reiicere licet.

Reductiones, quibus aequationes differentiales propositae ad formas normales antecedentibus assignatas revocantur, eae sunt quae omnium simplicissimo modo efficiuntur. Pro quibus supponere licet $\alpha = 0$ sive simul de omnibus numeris $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ eorum minimum detrahere licet; nam aequationum auxiliarium (10.) nonnisi ultima series ad reductionem adhibebatur. Formae normales illis reductionibus simplicissimis erutae tot existunt inter se diversae, quot modis numeri $1, 2, \dots n$ in talem ordinem $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_n$ disponi possunt, ut quantitates

$$x_{\varkappa_1}^{(q_1)}, \quad x_{\varkappa_2}^{(q_2)}, \quad \dots x_{\varkappa_a}^{(q_a)} \text{ aequationibus } \varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \dots \varphi_a = 0,$$

$$x_{\varkappa_{a+1}}^{(q_{a+1})}, \quad x_{\varkappa_{a+2}}^{(q_{a+2})}, \quad \dots x_{\varkappa_b}^{(q_b)} \text{ aequationibus } \varphi_{a+1} = 0, \ \varphi_{a+2} = 0, \dots \varphi_b = 0,$$

. . . .

$$x_{\varkappa_{r+1}}^{(q_{r+1})}, \quad x_{\varkappa_{r+2}}^{(q_{r+2})}, \quad \dots x_{\varkappa_n}^{(q_n)} \text{ aequationibus } \varphi_{r+1} = 0, \ \varphi_{r+2} = 0, \dots \varphi_n = 0$$

determinentur, siquidem in aequationibus illis quantitates illae solae pro incognitis, reliquae pro datis habentur. Reductiones ad has formas pauciores poscunt aequationes auxiliares eliminationesque ac si proponeretur reductio ad ullam aliam formam normalem, ex. gr. reductio vulgaris ad unicam aequationem differentialem inter duas variabiles, quae vel omnium maxime prolixa est. Neque pro aliis formis normalibus Determinans, per quod M dividendum est, concinnitate expressionis (12.) gaudet.

Antecedentia ad problema isoperimetricum propositum applicemus. Aequationum differentialium (7.) unaquaeque simul omnibus altissimis differentialibus

$$x_1^{(2m_1)}, \quad x_2^{(m_1+m_2)}, \quad \dots \quad x_n^{(m_1+m_n)}$$

afficintur; unde ipsi $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_n$ designare possunt numeros $1, 2, \dots n$ *quocunque modo* permutatos. Fit

$$\lambda_i = m_1 - m_i, \qquad q_i = p_{\varkappa_i} = m_1 + m_{\varkappa_i}, \qquad q_i - \lambda_i = m_i + m_{\varkappa_i},$$

unde n quantitates (11.) abeunt in quantitates $x_{\varkappa_i}^{(m_i+m_{\varkappa_i})}$; porro fit

$$A_f^{(i)} = \frac{\partial F_i}{\partial x_{\varkappa_f}^{(m_{\varkappa_f}+m_i)}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_{\varkappa_f}^{(m_{\varkappa_f})} \partial x_i^{(m_i)}}.$$

Hinc, collectis formulis (9.) et (14.), fluit sequens theorema.

Theorema

„*Proponatur integrale $\int U dt$ Maximum Minimumve reddere, expressione U praeter variabilem independentem t continente n dependentes $x_1, x_2, \ldots x_n$ una cum earum differentialibus, respective usque ad $m_1$tum, $m_2$tum, etc. $m_n$tum ordinem ascendentibus; designantibus $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$ numeros 1, 2, ... n quocunque ordine dispositos, integrandae erunt n aequationes differentiales,*

$$x_{\varkappa_1}^{(m_1+m_{\varkappa_1})} = L_1, \quad x_{\varkappa_2}^{(m_2+m_{\varkappa_2})} = L_2, \quad \ldots \quad x_{\varkappa_n}^{(m_n+m_{\varkappa_n})} = L_n,$$

in quibus $L_1, L_2, \ldots L_n$ ipsis differentialibus altissimis ad laevam positis non afficiuntur; si $m_1 \geqq m_2 \geqq m_3 \ldots \geqq m_{n-1} \geqq m_n$, ponitur que

$$A_f^{(i)} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_f^{(m_{\varkappa f})} \partial x_i^{(m_i)}}, \qquad R_i = \Sigma \pm A_{i+1}^{(i+1)} A_{i+2}^{(i+2)} \ldots A_n^{(n)},$$

illarum n aequationum differentialium habetur Multiplicator

$$\frac{R_0^{m_1}}{R_1^{m_1-m_2} R_2^{m_2-m_3} \ldots R_{n-1}^{m_{n-1}-m_n}}."$$

Integralibus omnibus praeter unum inventis eorumque ope totidem quantitatibus variabilibus eliminatis si aequationes $x_{\varkappa_1}^{(m_1+m_{\varkappa_1})} = L_1$ etc. ad aequationem differentialem primi ordinis inter duas variabiles reducuntur, huius quoque Multiplicator, cuius ope ea solis Quadraturis integrabilis fiat, constabit multiplicando valorem praecedentem per quantitatum eliminatarum Determinans, Constantium respectu Arbitrariarum, quibus Integralia afficiuntur, formatum.

Berol. d. 26 Julii 1845.

---

§. 21. aequat. 39*. lege $-X_{m+1}, -X_{m+2}, \ldots -X_{2m}$

5.

Über ein leichtes Verfahren die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen *).

I.

In der Theorie der Säcularstörungen und der kleinen Oscillationen wird man auf ein System lineärer Gleichungen geführt, in welchem die Coëfficienten der verschiedenen Unbekannten in Bezug auf die Diagonale symmetrisch sind, die ganz constanten Glieder fehlen und zu allen in der Diagonale befindlichen Coëfficienten noch dieselbe Gröfse $-x$ addirt ist. Durch Elimination der Unbekannten aus solchen lineären Gleichungen erhält man eine Bedingungsgleichung, welcher x genügen mufs. Für jeden Werth von x, welcher diese Bedingungsgleichung erfüllt, hat man sodann aus den lineären Gleichungen die Verhältnisse der Unbekannten zu bestimmen. Ich werde hier zuerst die für ein solches System Gleichungen geltenden algebraischen Formeln ableiten, welche im Folgenden ihre Anwendung finden, und hierauf eine für die Rechnung sehr bequeme Methode mittheilen, wodurch man die numerischen Werthe der Gröfsen x und der ihnen entsprechenden Systeme der Unbekannten mit Leichtigkeit und mit jeder beliebigen Schärfe erhält. Diese Methode überhebt der beschwerlichen Bildung und Auflösung der Gleichung, deren Wurzeln die Werthe von x sind, indem man das gegebene System Gleichungen so transformirt, dafs man für die Gröfsen x starke Annäherungen erhält, worauf für jedes x ein schnell convergirendes Näherungsverfahren zugleich dessen *genauen* Werth und die entsprechenden Werthe der Unbekannten und zwar diese letztern viel leichter als durch die gewöhnlichen Eliminationen ergiebt. Zur Erläuterung dieser Methode habe ich die numerische Auflösung derjenigen Gleichungen gewählt, von welchen die Säcularstörungen der Excentricitäten und der Längen der Perihelien der Pla-

---

*) Die sorgfältige Ausführung der in diesem Aufsatze vorkommenden numerischen Rechnungen verdanke ich der Gefälligkeit eines meiner Schüler, des Herrn *Ludwig Seidel* in München.

neten unsers Sonnensystems abhängen, wenn man die höhern Potenzen der Excentricitäten und Neigungen vernachlässigt, da diese numerische Auflösung neuerdings mehrere Astronomen beschäftigt hat. Endlich habe ich neue Formeln für die Correctionen hinzugefügt, welche die gefundnen Zahlenresultate durch Änderung der angenommenen Planetenmassen erfahren, und auch diese Formeln durch die vollständig durchgeführten Rechnungen erläutert. Für die Zahlencoëfficienten habe ich dieselben numerischen Werthe genommen, welche Herr *Leverrier* seinen schätzenswerthen Arbeiten über diesen Gegenstand zum Grunde gelegt hat, um eine Vergleichung der Methoden zu erleichtern.

Relationen zwischen den verschiedenen Systemen der Unbekannten.

2.

Es sei zwischen den n Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varpi$ ein System von n lineären Gleichungen von folgender Form gegeben,

$$1.\quad \begin{cases} \{(a,a)-x\}\alpha + (a,b)\beta + (a,c)\gamma + \ldots + (a,p)\varpi = 0, \\ (b,a)\alpha + \{(b,b)-x\}\beta + (b,c)\gamma + \ldots + (b,p)\varpi = 0, \\ (c,a)\alpha + (c,b)\beta + \{(c,c)-x\}\gamma + \ldots + (c,p)\varpi = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p,a)\alpha + (p,b)\beta + (p,c)\gamma + \ldots + \{(p,p)-x\}\varpi = 0, \end{cases}$$

in welchen je zwei zur Diagonale symmetrisch liegende Coëfficienten, welche durch Vertauschung der Buchstaben auseinander erhalten werden, gleich sind,

$$2.\quad (a,b)=(b,a),\quad (a,c)=(c,a),\quad (b,c)=(c,b),\quad \text{u. s. w.}$$

Die Gröfsen (a,a), (a,b) u. s. w. sind in Zahlen gegeben, die Gröfse x dagegen noch zu bestimmen. Da nämlich die ganz constanten Glieder sämmtlich $=0$ sind, so kann man aus den n Gleichungen (1.) die n Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varpi$ eliminiren, und erhält dadurch für x eine Gleichung $n$ten Grades. Für jeden der n Werthe von x, welche dieser genügen, wird jede der n Gleichungen (1.) eine Folge der übrigen $n-1$, und bestimmen irgend $n-1$ derselben die Verhältnisse der Gröfsen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varpi$. Da nur diese Verhältnisse und nicht die absoluten Werthe der Gröfsen α, β etc. durch die Aufgabe bestimmt werden, so werde ich annehmen, dafs für jedes der n Systeme dieser Gröfsen, welche den n Wurzeln x entsprechen, die Summe

ihrer Quadrate

$$3.\quad \alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\ldots+\varpi\varpi=1$$

werde, wodurch alle hier vorkommenden Gröfsen bestimmt sind.

9.

Es seien nun x', x'' irgend zwei von einander verschiedene Wurzeln der Gleichung $n$ten Grades, und α', β', γ', ... ϖ'; α'', β'', γ'', ... ϖ'' die ihnen entsprechenden Werthe der Unbekannten α, β, γ, ... ϖ. Man hat dann aus (1.)

$$\begin{aligned}(a,a)\alpha'+(a,b)\beta'+\ldots+(a,p)\varpi' &= \alpha'x',\\ (b,a)\alpha'+(b,b)\beta'+\ldots+(b,p)\varpi' &= \beta'x',\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ (p,a)\alpha'+(p,b)\beta'+\ldots+(p,p)\varpi' &= \varpi'x'.\end{aligned}$$

Wenn man diese Gleichungen der Ordnung nach mit α'', β'', γ'', ... ϖ'' multiplicirt und nach geschehner Multiplication addirt, so erhält auf der linken Seite α' den Factor

$$(a,a)\alpha''+(b,a)\beta''+(c,a)\gamma''+\ldots+(p,a)\varpi'';$$

dieser ist aber, weil $(b,a)=(a,b)$ u. s. w. und weil α'', β'', γ'', ... ϖ'' nebst x'' die Gleichungen (1.) erfüllen, $=\alpha''x''$; ebenso wird $\beta''x''$ der Coëfficient von β' u. s. f. Man erhält daher

$$(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''+\ldots+\varpi'\varpi'')x''=(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''+\ldots+\varpi'\varpi'')x'.$$

Hieraus folgt wegen der Voraussetzung, dafs x' und x'' *von einander verschiedene Wurzeln* seien,

$$4.\quad \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''+\ldots+\varpi'\varpi''=0.$$

Aus dieser Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen je zwei Auflösungen ausdrückt, ergiebt sich, wie *Cauchy* bemerkt hat, dafs alle Wurzeln x der Gleichung $n$ten Grades reell sind. Denn wären imaginäre vorhanden, und nähme man für x', x'' ein Paar conjugirter imaginärer Wurzeln, so würden auch die Gröfsen $\frac{\beta'}{\alpha'}$ und $\frac{\beta''}{\alpha''}$, $\frac{\gamma'}{\alpha'}$ und $\frac{\gamma''}{\alpha''}$, u. s. w., welche rationale Ausdrücke von x sind, die sich durch Auflösung der Gleichungen (1.) ergeben, conjugirte imaginäre Werthe erhalten: die Producte $\frac{\beta'\beta''}{\alpha'\alpha''}$, $\frac{\gamma'\gamma''}{\alpha'\alpha''}$ etc. würden daher jedes eine Summe von zwei Quadraten werden und die Summe aller dieser Producte könnte nicht $=-1$ sein, wie es die Formel (4.) erfordert.

Betrachten wir nun folgende lineäre Ausdrücke:

$$5.\quad \begin{cases} p_1 = \alpha' q_1 + \alpha'' q_2 + \ldots + \alpha^{(n)} q_n, \\ p_2 = \beta' q_1 + \beta'' q_2 + \ldots + \beta^{(n)} q_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_n = \varpi' q_1 + \varpi'' q_2 + \ldots + \varpi^{(n)} q_n, \end{cases}$$

wo $\alpha', \beta', \ldots \varpi'$; $\alpha'', \beta'', \ldots \varpi''$; u. s. w. die verschiedenen Systeme der Werthe der Gröfsen $\alpha, \beta, \ldots \varpi$ sind und zwischen den Gröfsen je zweier Systeme eine Gleichung (4.) Statt findet.

Addirt man die Quadrate dieser Ausdrücke, so verschwinden rechts wegen der Gleichungen (4.) die Coëfficienten der Producte $q_1 q_2$, $q_1 q_3$ etc., und da die Summen der Quadrate der demselben Systeme angehörigen Werthe der Unbekannten $=1$ angenommen worden sind (3.), so erhält man

$$6.\quad p_1 p_1 + p_2 p_2 + \ldots + p_n p_n = q_1 q_1 + q_2 q_2 + \ldots + q_n q_n.$$

Ferner folgen aus dem System (5.) unmittelbar die umgekehrten Ausdrücke der Gröfsen q_i durch die Gröfsen p_i, wenn man die Horizontal- und Verticalreihen der Coëfficienten mit einander vertauscht. Um nemlich q_i zu finden, braucht man blofs die erste Gleichung mit $\alpha^{(i)}$, die zweite mit $\beta^{(i)}$ u. s. w. zu multipliciren und sie nach geschehener Multiplication zu addiren, so werden nach (4.) alle q eliminirt bis auf q_i, das den Factor 1 erhält. Man findet so die umgekehrten Gleichungen

$$7.\quad \begin{cases} q_1 = \alpha' p_1 + \beta' p_2 + \ldots + \varpi' p_n, \\ q_2 = \alpha'' p_1 + \beta'' p_2 + \ldots + \varpi'' p_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_n = \alpha^{(n)} p_1 + \beta^{(n)} p_2 + \ldots + \varpi^{(n)} p_n. \end{cases}$$

Substituirt man wieder diese Werthe in die durch die Gleichungen (5.) gegebnen Ausdrücke der Gröfsen $p_1, p_2, \ldots p_n$, so giebt die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} p_1 = &\{\alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \ldots + \alpha^{(n)}\alpha^{(n)}\} p_1 \\ &+ \{\alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \ldots + \alpha^{(n)}\beta^{(n)}\} p_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \{\alpha'\varpi' + \alpha''\varpi'' + \ldots + \alpha^{(n)}\varpi^{(n)}\} p_n. \end{aligned}$$

Wegen der ganz allgemeinen Bedeutung der Gröfsen p_i mufs also sein:

$$8.\quad \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \ldots + \alpha^{(n)}\alpha^{(n)} = 1,$$

$$9.\quad \begin{cases} \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \ldots + \alpha^{(n)}\beta^{(n)} = 0, \\ \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' + \ldots + \alpha^{(n)}\gamma^{(n)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha'\varpi' + \alpha''\varpi'' + \ldots + \alpha^{(n)}\varpi^{(n)} = 0. \end{cases}$$

$$7.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial x^{(2n)}} = A, & \dfrac{\partial Y}{\partial x^{(2n)}} = F, & \dfrac{\partial Z}{\partial x^{(2n)}} = E, \\ \dfrac{\partial X}{\partial y^{(2n)}} = F, & \dfrac{\partial Y}{\partial y^{(2n)}} = B, & \dfrac{\partial Z}{\partial y^{(2n)}} = D, \\ \dfrac{\partial X}{\partial z^{(2n)}} = E, & \dfrac{\partial Y}{\partial z^{(2n)}} = D, & \dfrac{\partial Z}{\partial z^{(2n)}} = C, \\ \dfrac{\partial X}{\partial x^{(2n-1)}} = n\dfrac{dA}{dt}, & \dfrac{\partial Y}{\partial x^{(2n-1)}} = n\dfrac{dF}{dt} + c, & \dfrac{\partial Z}{\partial x^{(2n-1)}} = n\dfrac{dE}{dt} - b, \\ \dfrac{\partial X}{\partial y^{(2n-1)}} = n\dfrac{dF}{dt} - c, & \dfrac{\partial Y}{\partial y^{(2n-1)}} = n\dfrac{dB}{dt}, & \dfrac{\partial Z}{\partial y^{(2n-1)}} = n\dfrac{dD}{dt} + a, \\ \dfrac{\partial X}{\partial z^{(2n-1)}} = n\dfrac{dE}{dt} + b, & \dfrac{\partial Y}{\partial z^{(2n-1)}} = n\dfrac{dD}{dt} - a, & \dfrac{\partial Z}{\partial z^{(2n-1)}} = n\dfrac{dC}{dt}. \end{cases}$$

Hos valores substituendo tria systemata aequationum linearium (5.) evadunt,

$$8.\quad \begin{cases} Au + Fv + Ew = -n\dfrac{dA}{dt}, \\ Fu + Bv + Dw = -n\dfrac{dF}{dt} - c, \\ Eu + Dv + Cw = -n\dfrac{dE}{dt} + b, \\ Au_1 + Fv_1 + Ew_1 = -n\dfrac{dF}{dt} + c, \\ Fu_1 + Bv_1 + Dw_1 = -n\dfrac{dB}{dt}, \\ Eu_1 + Dv_1 + Cw_1 = -n\dfrac{dD}{dt} - a, \\ Au_2 + Fv_2 + Ew_2 = -n\dfrac{dE}{dt} - b, \\ Fu_2 + Bv_2 + Dw_2 = -n\dfrac{dD}{dt} + a, \\ Eu_2 + Dv_2 + Cw_2 = -n\dfrac{dC}{dt}. \end{cases}$$

Quorum systematum Determinans commune si vocatur

$$9.\quad R = ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 + 2DEF,$$

eorum resolutione algebraica obtinetur,

Hätte man statt der symbolischen Ausdrücke (a,a), (a,b) u. s. w. wirklich die Quadrate und Producte aa, ab u. s. w., so würde die homogene Function zur Rechten sich in das Quadrat $\{ap_1+bp_2+cp_3+\ldots\}^2$ verwandeln.

Auf eine noch übersichtlichere Art ergiebt sich die Gleichung (10.) aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}(a,a)p_1+(a,b)p_2+(a,c)p_3+\ldots &= x'\alpha'\cdot q_1+x''\alpha''\cdot q_2+x'''\alpha'''\cdot q_3+\ldots,\\ (b,a)p_1+(b,b)p_2+(b,c)p_3+\ldots &= x'\beta'\cdot q_1+x''\beta''\cdot q_2+x'''\beta'''\cdot q_3+\ldots,\\ (c,a)p_1+(c,b)p_2+(c,c)p_3+\ldots &= x'\gamma'\cdot q_1+x''\gamma''\cdot q_2+x'''\gamma'''\cdot q_3+\ldots,\end{aligned}$$
u. s. w.,

die man dadurch erhält, dafs man für die Gröfsen p_i ihre Ausdrücke durch die Gröfsen q_i setzt, und die Coëfficienten der einzelnen q_i vermittelst der Gleichungen (1.) auf einen Term reducirt. Multiplicirt man die vorstehenden Gleichungen der Reihe nach mit p_1, p_2 u. s. w. und addirt sie alle, so erhält man links die obige homogene Function 2ter Ordnung, und rechts vermittelst der Gleichungen (7.) den Ausdruck

$$x'q_1^2+x''q_2^2+\ldots+x^{(n)}q_n^2.$$

In der Abhandlung „De binis quibuslibet functionibus etc." im 12ten Bande von *Crelle's* Journal bin ich von den beiden Gleichungen (6.) und (10.) ausgegangen, und auf dem umgekehrten Wege zu dem System (1.) und den Gleichungen (3.) und (4.) gelangt.

Allgemeine Correctionsformeln der Werthe der Unbekannten.

4.

Aus den bereits entwickelten Relationen zwischen den verschiedenen Systemen von Werthen der Unbekannten, welche den verschiedenen Werthen von x entsprechen, lassen sich auch einfache Ausdrücke für die nach den Gröfsen (a,a), (a,b), ... genommnen partiellen Differentialquotienten von x, α, β, ... folgern. Diese partiellen Differentialquotienten bestimmen die für kleine Änderungen der Zahlencoëfficienten (a,a), (a,b) etc. an den gefundnen Werthen anzubringenden Correctionen, wenn man die Quadrate und Producte dieser Änderungen vernachlässigt. Es ist hiebei nur nöthig, die Differentialquotienten zweier Gröfsen, x' und α', zu suchen, da die übrigen sich ganz analog bilden lassen. Bezeichnet man durch

$$(a,a)+\varDelta(a,a),\quad x'+\varDelta x',\quad \alpha'+\varDelta\alpha'\quad \text{u. s. w.}$$

die geänderten Werthe von (a,a), x', α' u. s. w., und vernachlässigt man die

2ten Potenzen der Incremente, so dafs die Formeln für Differentiale streng richtig sind, so hat man zuerst aus (1.)

$$11.\quad\begin{cases}\alpha'\cdot\Delta x'-\{\alpha'\cdot\Delta(a,a)+\beta'\cdot\Delta(a,b)+\gamma'\cdot\Delta(a,c)+\dots\}\\ \quad=\{(a,a)-x'\}\Delta\alpha'+(a,b)\Delta\beta'+(a,c)\Delta\gamma'+\dots,\\ \beta'\cdot\Delta x'-\{\alpha'\cdot\Delta(b,a)+\beta'\cdot\Delta(b,b)+\gamma'\cdot\Delta(b,c)+\dots\}\\ \quad=(b,a)\Delta\alpha'+\{(b,b)-x'\}\Delta\beta'+(b,c)\Delta\gamma'+\dots,\\ \gamma'\cdot\Delta x'-\{\alpha'\cdot\Delta(c,a)+\beta'\cdot\Delta(c,b)+\gamma'\cdot\Delta(c,c)+\dots\}\\ \quad=(c,a)\Delta\alpha'+(c,b)\Delta\beta'+\{(c,c)-x'\}\Delta\gamma'+\dots,\\ \qquad\text{etc.}\end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit α', β', γ', ... und addirt sie nach geschehener Multiplication, so verschwinden wegen der Gleichungen (1.) die Gröfsen zur Rechten des Gleichheitszeichens, und man erhält, da der Coëfficient von $\Delta x'=1$ wird:

$$12.\quad\begin{aligned}\Delta x'=\alpha'\alpha'\cdot\Delta(a,a)&+2\alpha'\beta'\cdot\Delta(a,b)+2\alpha'\gamma'\cdot\Delta(a,c)+\dots\\ &+\beta'\beta'\cdot\Delta(b,b)+2\beta'\gamma'\cdot\Delta(b,c)+\dots\\ &\qquad+\gamma'\gamma'\cdot\Delta(c,c)+\dots\\ &\qquad\qquad\dots\dots\end{aligned}$$

Um die Correctionen $\Delta\alpha'$, $\Delta\beta'$ etc. zu erhalten, verfahre ich wie folgt. Ich addire zu den Gleichungen (11.) auf beiden Seiten der Reihe nach die Gröfsen $(x'-x'')\Delta\alpha'$, $(x'-x'')\Delta\beta'$, $(x'-x'')\Delta\gamma'$ etc., multiplicire sie hierauf mit α'', β'', γ'' etc. und addire alle. Ebenso addire ich zu den Gleichungen (11.) auf beiden Seiten $(x'-x''')\Delta\alpha'$, $(x'-x''')\Delta\beta'$ etc., multiplicire mit α''', β''' etc. und addire, etc. etc. Durch dieses Verfahren verschwinden jedesmal die Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen und der in $\Delta x'$ multiplicirte Term, und man erhält zwischen den n Variationen $\Delta\alpha'$, $\Delta\beta'$ etc. $n-1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}&(x'-x'')\{\alpha''\Delta\alpha'+\beta''\Delta\beta'+\gamma''\Delta\gamma'+\dots\}\\ &=\alpha''\alpha'\Delta(a,a)+\{\alpha''\beta'+\alpha'\beta''\}\Delta(a,b)+\beta''\beta'\Delta(b,b)\ \text{etc.},\\ &(x'-x''')\{\alpha'''\Delta\alpha'+\beta'''\Delta\beta'+\gamma'''\Delta\gamma'+\dots\}\\ &=\alpha'''\alpha'\Delta(a,a)+\{\alpha'''\beta'+\alpha'\beta'''\}\Delta(a,b)+\beta'''\beta'\Delta(b,b)\ \text{etc.},\\ &\qquad\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.},\end{aligned}$$

zu welchen als $n$te noch nach (3.) die Gleichung

$$\alpha'\Delta\alpha'+\beta'\Delta\beta'+\gamma'\Delta\gamma'+\dots=0$$

kommt. Multiplicirt man diese letzte Gleichung mit α' und die $n-1$ vorhergehenden respective mit $\frac{\alpha''}{x'-x''}$, $\frac{\alpha'''}{x'-x'''}$ u. s. f. und addirt alle, so werden zufolge (9.) die Gröfsen $\Delta\beta'$, $\Delta\gamma'$ etc. sämmtlich eliminirt und man erhält:

$$13.\quad \varDelta\alpha' = \alpha'\left\{\frac{\alpha''\alpha''}{x'-x''}+\frac{\alpha'''\alpha'''}{x'-x'''}+\dots\right\}\varDelta(a,a)$$
$$+\left(\beta'\left\{\frac{\alpha''\alpha''}{x'-x''}+\frac{\alpha'''\alpha'''}{x'-x'''}+\dots\right\}+\alpha'\left\{\frac{\alpha''\beta''}{x'-x''}+\frac{\alpha'''\beta'''}{x'-x'''}+\dots\right\}\right)\varDelta(a,b)$$
$$+\ \beta'\left\{\frac{\alpha''\beta''}{x'-x''}+\frac{\alpha'''\beta'''}{x'-x'''}+\dots\right\}\varDelta(b,b)+\text{etc.}$$

Man hat daher aus (12.) und (13.) die strengen Differentialformeln:

$$14.\ \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial(a,a)} = \alpha'\alpha'; \quad \dfrac{\partial x'}{\partial(a,b)} = 2\alpha'\beta'; \quad \text{etc.} \\ \dfrac{\partial \alpha'}{\partial(a,a)} = \alpha'\left\{\dfrac{\alpha''\alpha''}{x'-x''}+\dfrac{\alpha'''\alpha'''}{x'-x'''}+\dots\right\}; \quad \dfrac{\partial \alpha'}{\partial(b,b)} = \beta'\left\{\dfrac{\alpha''\beta''}{x'-x''}+\dfrac{\alpha'''\beta'''}{x'-x'''}+\dots\right\}; \\ \dfrac{\partial \alpha'}{\partial(a,b)} = \dfrac{\beta'}{\alpha'}\,\dfrac{\partial\alpha'}{\partial(a,a)}+\dfrac{\alpha'}{\beta'}\,\dfrac{\partial\alpha'}{\partial(b,b)}; \quad \dfrac{\partial \alpha'}{\partial(b,c)} = \dfrac{\gamma'}{\beta'}\,\dfrac{\partial\alpha'}{\partial(b,b)}+\dfrac{\beta'}{\gamma'}\,\dfrac{\partial\alpha'}{\partial(c,c)}; \quad \text{etc.} \end{cases}$$

Mit den nöthigen Vertauschungen geben diese eleganten Formeln die ersten Differentialquotienten aller Unbekannten der n Systeme nach allen Coëfficienten des gegebenen Systems (1.). Man sieht aus denselben, dafs die ersten Differentialquotienten der Wurzeln der Gleichung $n$ten Grades ohne weitere Rechnung unmittelbar durch die Werthe der Unbekannten gegeben sind, und dafs die ersten Differentialquotienten jeder der Unbekannten $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ etc. nach den Gröfsen (a,b), (b,c) etc. sich aus ihren ersten Differentialquotienten nach den Gröfsen (a,a), (b,b) etc. leicht zusammensetzen lassen, so dafs man nur diese letztern zu berechnen hat, von welchen wieder je zwei auseinander durch die Gleichung $\frac{\alpha'\partial\alpha'}{\partial(b,b)} = \frac{\beta'\partial\beta'}{\partial(a,a)}$ erhalten werden. Die ersten Differentialquotienten der Gröfsen $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ etc. geben ferner sogleich auch die *zweiten* der Wurzeln x', x'' etc. Wenn die Incremente $\varDelta(a,b)$ und $\varDelta(b,a)$ verschieden sind, so hat man für $\varDelta(a,b)$ in (12.) ihre halbe Summe $\frac{1}{2}(\varDelta(a,b)+\varDelta(b,a))$ zu setzen, und in (13.) den ersten Theil des mit $\varDelta(a,b)$ multiplicirten Aggregats mit $\varDelta(a,b)$, den zweiten mit $\varDelta(b,a)$ zu multipliciren.

Aufstellung der numerischen Gleichungen, von welchen die Säcularstörungen der Excentricitäten und Längen der Perihelien der Bahnen der Planeten abhängen, in der in Bezug auf die Diagonale symmetrischen Form. Formeln zur Bestimmung der willkürlichen Constanten.

5.

Von einem System von der Form der Gleichungen (1.) hängen die Säcularstörungen der Excentricitäten und Längen der Perihelien der Bahnen der sieben Hauptplaneten unseres Sonnensystems ab. Die zur Aufstellung dieser Gleichungen nöthigen numerischen Daten entnehme ich aus Herrn *Leverrier's* Aufsatz „Sur

les variations séculaires des éléments des orbites etc." in den „Additions à la connaissance des temps pour l'an 1843."

Bezeichnet e die Excentricität der Merkursbahn, ϖ die Länge ihres Perihels, und setzt man

$$h = e \sin \varpi, \qquad l = e \cos \varpi,$$

werden ferner dieselben Gröfsen für Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn und Uranus durch die nämlichen Buchstaben mit einem, zwei, drei, ... sechs Accenten bezeichnet, so hat man für die Gröfsen h und l, wenn man sich auf die Glieder beschränkt, die von der ersten Ordnung der Excentricitäten sind, folgende lineäre Differentialgleichungen, in welchen t die Zeit, in Julian. Jahren ausgedrückt, bedeutet:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = \{(0,1)+(0,2)+\ldots\}\,l - \boxed{0,1}\,l' - \boxed{0,2}\,l'' - \ldots, \\ \dfrac{dl}{dt} = -\{(0,1)+(0,2)+\ldots\}\,h + \boxed{0,1}\,h' + \boxed{0,2}\,h'' + \ldots, \\ \dfrac{dh'}{dt} = \{(1,0)+(1,2)+\ldots\}\,l' - \boxed{1,0}\,l - \boxed{1,2}\,l'' - \ldots, \\ \dfrac{dl'}{dt} = -\{(1,0)+(1,2)+\ldots\}\,h' + \boxed{1,0}\,h + \boxed{1,2}\,h'' + \ldots, \\ \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

(*Laplace,* Méc. cél. Buch II. §. 55.). Die Coëfficienten $(0, 1)$ etc. und $\boxed{0, 1}$ etc. hängen nur von den Massen der Planeten und von den grofsen Axen ihrer Bahnen ab. Bezeichnet man die ersten mit m und die halben Axen mit a, und versieht diese Gröfsen ebenso mit Accenten wie die andern Gröfsen, so sind je zwei Coëfficienten wie $(0, 1)$ und $(1, 0)$, $\boxed{0,1}$ und $\boxed{1,0}$ durch die Gleichungen

$$\text{II.}\quad \begin{cases} m\sqrt{a}\,(0,1) = m'\sqrt{a'}\,(1,0), \\ m\sqrt{a}\,\boxed{0,1} = m'\sqrt{a'}\,\boxed{1,0} \end{cases}$$

mit einander verbunden. Setzt man zur Integration der Gleichungen I.

$$\begin{aligned} h &= N_0 \sin(gt+\beta); & l &= N_0 \cos(gt+\beta), \\ h' &= N_1 \sin(gt+\beta); & l' &= N_1 \cos(gt+\beta), \\ &\text{etc.} & &\text{etc.}, \end{aligned}$$

wo g und die Gröfsen N Constanten bedeuten, so erhält man durch Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen I. sieben Bedingungsgleichungen zwischen g und den Gröfsen N:

$$\text{III.}\quad \begin{cases} (g-(0,1)-(0,2)-\ldots)N_0 + \boxed{0,1}\,N_1 + \boxed{0,2}\,N_2 + \ldots = 0, \\ \boxed{1,0}\,N_0 + (g-(1,0)-(1,2)-\ldots)N_1 + \boxed{1,2}\,N_2 + \ldots = 0, \\ \boxed{2,0}\,N_0 + \boxed{2,1}\,N_1 + (g-(2,0)-(2,1)-\ldots)N_2 + \ldots = 0, \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen 7 Gleichungen die Verhältnisse von 6 der Gröfsen N zur 7ten, so erhält man für g eine Gleichung siebenten Grades, also sieben Wurzeln $g, g', g'', \ldots g^{\text{VI}}$, und ein zu jeder gehöriges System von Werthen der Verhältnisse der sieben Gröfsen N. Die allgemeinen Integrale der Gleichungen I. sind dann:

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} h = N_0 \sin(gt+\beta) + N_0' \sin(g't+\beta') + \ldots, \\ l = N_0 \cos(gt+\beta) + N_0' \cos(g't+\beta') + \ldots, \\ h' = N_1 \sin(gt+\beta) + N_1' \sin(g't+\beta') + \ldots, \\ l' = N_1 \cos(gt+\beta) + N_1' \cos(g't+\beta') + \ldots. \end{cases}$$

Da in jedem System nur g und die Verhältnisse der Gröfsen N_i bestimmt sind, eine der Gröfsen N_i und der Winkel β willkürlich bleiben, so hat man im Ganzen noch 14 willkürliche Constanten, welche durch die als gegeben anzusehenden Anfangswerthe der 14 Gröfsen h und l bestimmt werden müssen.

Nimmt man für die Gröfsen m und a folgende Zahlenwerthe an:

	Masse	Halbe gr. Axe
Mercur	$\frac{1}{2025810}$	0,38709812
Venus	$\frac{1}{401839}$	0,72333230
Erde	$\frac{1}{356354}$	1,00000000
Mars	$\frac{1}{2680337}$	1,52369352
Jupiter	$\frac{1}{1050}$	5,20116636
Saturn	$\frac{1}{3512}$	9,53787090
Uranus	$\frac{1}{17918}$	19,18330500

so werden (nach *Leverrier* a. a. O. S. 13) die Werthe der Gröfsen (i, k) in Sexagesimalsecunden ausgedrückt:

i \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	*	0,447992	0,103506	0,019797	0,00024016	0,00002855	0,00000247
1	2,910335	*	5,174037	0,468978	0,00409110	0,00047742	0,00004104
2	0,891538	6,860112	*	1,817218	0,00912841	0,00103919	0,00008866
3	0,027984	0,102046	0,298228	*	0,00310537	0,00032980	0,00002755
4	1,601114	4,198404	7,061544	14,645853	*	18,196879	0,934785
5	0,077059	0,198360	0,325649	0,629736	7,367279	*	1,390990
6	0,001852	0,004740	0,007723	0,014625	0,105202	0,386656	*

Durch Addition der unter einander stehenden Zahlen erhält man die Zahlen, welche in der Diagonale in III. von g abgezogen werden. Substituirt man ferner

in III. die von Herrn *Leverrier* gegebenen, ebenfalls in Sexagesimalsecunden ausgedrückten, Werthe der Coëfficienten $\boxed{i,k}$, so wird das aufzulösende System Gleichungen:

$$\text{V.}\quad\begin{cases}
\left.\begin{aligned}(g-5{,}509882)N_0+1{,}870086N_1+0{,}422908N_2+0{,}008814N_3\\+0{,}148711N_4+0{,}003908N_5+0{,}000045N_6\end{aligned}\right\}=0,\\
\left.\begin{aligned}0{,}287865N_0+(g-11{,}811654)N_1+5{,}711900N_2+0{,}058717N_3\\+0{,}728088N_4+0{,}018788N_5+0{,}000224N_6\end{aligned}\right\}=0,\\
\left.\begin{aligned}0{,}049099N_0+4{,}308033N_1+(g-12{,}970687)N_2+0{,}229326N_3\\+1{,}689087N_4+0{,}042580N_5+0{,}000504N_6\end{aligned}\right\}=0,\\
\left.\begin{aligned}0{,}006235N_0+0{,}269851N_1+1{,}397369N_2+(g-17{,}596207)N_3\\+5{,}304038N_4+0{,}125346N_5+0{,}001451N_6\end{aligned}\right\}=0,\\
\left.\begin{aligned}0{,}00002231N_0+0{,}00070948N_1+0{,}00218227N_2+0{,}00112462N_3\\+(g-7{,}489041)N_4+4{,}815454N_5+0{,}035319N_6\end{aligned}\right\}=0,\\
\left.\begin{aligned}0{,}00000145N_0+0{,}00004522N_1+0{,}00013588N_2+0{,}00006565N_3\\+11{,}893979N_4+(g-18{,}585410)N_5+0{,}232241N_6\end{aligned}\right\}=0,\\
\left.\begin{aligned}0{,}00000006N_0+0{,}00000194N_1+0{,}00000579N_2+0{,}00000273N_3\\+0{,}313829N_4+0{,}835482N_5+(g-2{,}325935)N_6\end{aligned}\right\}=0.
\end{cases}$$

Das hier vorliegende System hat noch keine in Bezug auf die Diagonale symmetrische Form, wie sie der Gegenstand der Betrachtung in den vorhergehenden Paragraphen gewesen ist. Diese Form kann ihm aber vermöge der Gleichungen II., die zwischen je zweien zur Diagonale symmetrisch liegenden Coëfficienten Statt finden, sehr leicht gegeben werden *). Setzt man nämlich in den Gleichungen V.

$$\text{VI.}\quad N_0=\frac{KM_0}{\sqrt{(m^0\sqrt{a^0})}};\quad N_1=\frac{KM_1}{\sqrt{(m'\sqrt{a'})}};\quad\ldots\quad N_6=\frac{KM_6}{\sqrt{(m^{VI}\sqrt{a^{VI}})}},$$

und multiplicirt nach Ausführung dieser Substitution die erste Gleichung mit $\frac{1}{K}\sqrt{(m^0\sqrt{a^0})}$, die zweite mit $\frac{1}{K}\sqrt{(m'\sqrt{a'})}$, u. s. f., so bleiben die Coëfficienten in der Diagonale unverändert und es ist nach II. klar, dafs nun allgemein der Coëfficient in der *i*ten Horizontal- und *k*ten Verticalreihe gleich dem Coëfficienten in der *k*ten Horizontal- und *i*ten Verticalreihe werden mufs.

---

*) Dadurch, dafs man früher diese vorläufige Präparation, durch welche die zur Diagonale symmetrisch liegenden Coëfficienten gleich werden, verabsäumt hat, ist, abgesehen von der angewandten Auflösungsmethode, die Mühe der Rechnung fast verdoppelt worden.

Man erhält so mit Anwendung der Werthe

$$\text{VII.}\quad\begin{cases} 6{,}7564720-10\ \ldots\ldots = \log\sqrt{(m^0\sqrt{a^0})}, \\ 7{,}1628084\ -\ -\ \ldots\ldots = \log\sqrt{(m'\sqrt{a'})}, \\ 7{,}2240592\ -\ -\ \ldots\ldots = \log\sqrt{(m''\sqrt{a''})}, \\ 6{,}8316297\ -\ -\ \ldots\ldots = \log\sqrt{(m'''\sqrt{a'''})}, \\ 8{,}6684306\ -\ -\ \ldots\ldots = \log\sqrt{(m^{\text{IV}}\sqrt{a^{\text{IV}}})}, \\ 8{,}4720856\ -\ -\ \ldots\ldots = \log\sqrt{(m^{\text{V}}\sqrt{a^{\text{V}}})}, \\ 8{,}1940861\ -\ -\ \ldots\ldots = \log\sqrt{(m^{\text{VI}}\sqrt{a^{\text{VI}}})} \end{cases}$$

folgende Gleichungen, in denen statt der Coëfficienten selbst überall, ausgenommen in der Diagonale, ihre Logarithmen gesetzt sind:

$$\text{VIII.}\quad\begin{cases} \left.\begin{aligned}&(g-5{,}509882.0)M_0+9{,}8655252M_1+9{,}1586592M_2+7{,}8700057M_3\\ &\quad+7{,}2604292M_4+5{,}8766796M_5+4{,}2156819M_6\end{aligned}\right\}=0, \\ \left.\begin{aligned}&9{,}8655252M_0+(g-11{,}8116540)M_1+0{,}6955298M_2+9{,}0999439M_3\\ &\quad+8{,}3565631M_4+6{,}9646084M_5+5{,}3191061M_6\end{aligned}\right\}=0, \\ \left.\begin{aligned}&9{,}1586592M_0+0{,}6955298M_1+(g-12{,}970687.0)M_2+9{,}7528822M_3\\ &\quad+8{,}7832803M_4+7{,}3811819M_5+5{,}7325546M_6\end{aligned}\right\}=0, \\ \left.\begin{aligned}&7{,}8700057M_0+9{,}0999439M_1+9{,}7528822M_2+(g-17{,}596207.0)M_3\\ &\quad+8{,}8878063M_4+7{,}4576700M_5+5{,}7989267M_6\end{aligned}\right\}=0, \\ \left.\begin{aligned}&7{,}2604292M_0+8{,}3565631M_1+8{,}7832803M_2+8{,}8878063M_3\\ &\quad+(g-7{,}489041.0)M_4+0{,}8789822M_5+9{,}0223508M_6\end{aligned}\right\}=0, \\ \left.\begin{aligned}&5{,}8766796M_0+6{,}9646084M_1+7{,}3811819M_2+7{,}4576700M_3\\ &\quad+0{,}8789822M_4+(g-18{,}585410.0)M_5+9{,}6439380M_6\end{aligned}\right\}=0, \\ \left.\begin{aligned}&4{,}2156819M_0+5{,}3191061M_1+5{,}7325546M_2+5{,}7989267M_3\\ &\quad+9{,}0223508M_4+9{,}6439380M_5+(g-2{,}325935.0)M_6\end{aligned}\right\}=0. \end{cases}$$

Damit die Gröſsen M völlig bestimmt seien, füge ich zu den Gleichungen VIII. noch die Bedingung

$$\text{IX.}\quad M_0^2+M_1^2+M_2^2+\ldots+M_6^2=1.$$

Die algebraischen Ausdrücke der mit (i,k) und $\boxed{i,k}$ bezeichneten Gröſsen haben den Factor $m^{(k)}$. Ändert man daher die für die Massen oben angenommnen Zahlenwerthe, indem man der Masse $m^{(k)}$ einen wenig von 1 verschiednen Factor $1+\mu^{(k)}$ giebt, so sind die für (i,k) und $\boxed{i,k}$ angegebnen Zahlen noch mit diesem Factor $1+\mu^{(k)}$ zu multipliciren. Hiernach erhält in der $(i+1)$ten Gleichung die von g abzuziehende Zahl, die in V. und VIII. dieselbe geblieben ist, die Änderung

$$(i,0)\cdot\mu + (i,1)\cdot\mu' \ldots + (i,6)\cdot\mu^{\mathrm{vi}},$$

wo jedesmal der Term $(i,i)\cdot\mu^{(i)}$ auszulassen ist. Nach der Art, wie die Gleichungen VIII. aus V. abgeleitet sind, wird in VIII., wenn i und k von einander verschieden sind, der Coëfficient von M_k in der $(i+1)$ten Gleichung

$$\sqrt{\frac{m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}}}{m^{(k)}\sqrt{a^{(k)}}}}\cdot\boxed{i,k},$$

und erhält daher den Factor

$$\sqrt{((1+\mu^{(i)})(1+\mu^{(k)}))},$$

wofür man, da die Quadrate und Producte der Gröfsen μ vernachlässigt werden, einfacher $1+\frac{1}{2}(\mu^{(i)}+\mu^{(k)})$ setzen kann. Auf diese Weise werden die Variationen der Coëfficienten der Gleichungen VIII. bestimmt, welche kleinen Änderungen der angenommenen Werthe der Planetenmassen entsprechen.

Sind h_0, l_0; h'_0, l'_0 etc. die der Zeit $t=0$ entsprechenden Werthe von h, l; h', l' etc., und setzt man

$$h_0^{(i)}\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})} = H^{(i)}, \quad l_0^{(i)}\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})} = L^{(i)},$$

bezeichnet man ferner die den verschiednen Wurzeln g, g', ... g^{vi} entsprechenden Werthe von M_i mit M_i, M'_i, ... M_i^{vi}, so hat man zur Bestimmung der 14 willkürlichen Constanten K, β; K', β' etc. zufolge (IV.) und (VI.) die beiden Systeme Gleichungen:

$$\begin{aligned}
H &= M_0\cdot K\sin\beta + M'_0\cdot K'\sin\beta' \ldots + M_0^{\mathrm{vi}}\cdot K^{\mathrm{vi}}\sin\beta^{\mathrm{vi}},\\
H' &= M_1\cdot K\sin\beta + M'_1\cdot K'\sin\beta' \ldots + M_1^{\mathrm{vi}}\cdot K^{\mathrm{vi}}\sin\beta^{\mathrm{vi}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
H^{\mathrm{vi}} &= M_6\cdot K\sin\beta + M'_6\cdot K'\sin\beta' \ldots + M_6^{\mathrm{vi}}\cdot K^{\mathrm{vi}}\sin\beta^{\mathrm{vi}},\\
L &= M_0\cdot K\cos\beta + M'_0\cdot K'\cos\beta' \ldots + M_0^{\mathrm{vi}}\cdot K^{\mathrm{vi}}\cos\beta^{\mathrm{vi}},\\
L' &= M_1\cdot K\cos\beta + M'_1\cdot K'\cos\beta' \ldots + M_1^{\mathrm{vi}}\cdot K^{\mathrm{vi}}\cos\beta^{\mathrm{vi}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
L^{\mathrm{vi}} &= M_6\cdot K\cos\beta + M'_6\cdot K'\cos\beta' \ldots + M_6^{\mathrm{vi}}\cdot K^{\mathrm{vi}}\cos\beta^{\mathrm{vi}}.
\end{aligned}$$

Hieraus erhält man nach §. 3., da die Gröfsen M_0, M_1 etc. mit den dort gebrauchten α, β etc. übereinkommen,

$$\begin{aligned}
A &= K\sin\beta = HM_0 + H'M_1 \ldots + H^{\mathrm{vi}}M_6,\\
B &= K\cos\beta = LM_0 + L'M_1 \ldots + L^{\mathrm{vi}}M_6,\\
A' &= K'\sin\beta' = HM'_0 + H'M'_1 \ldots + H^{\mathrm{vi}}M'_6,\\
B' &= K'\cos\beta' = LM'_0 + L'M'_1 \ldots + L^{\mathrm{vi}}M'_6,\\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.},
\end{aligned}$$

woraus sich die Werthe der Winkel β, β' etc. und der Gröfsen K, K' etc. ergeben, aus welchen letztern durch die Formel (VI.)

$$N_i^{(h)} = \frac{M_i^{(h)} K^{(h)}}{\sqrt{(m^{(i)} \sqrt{a^{(i)}})}}$$

die Werthe der Gröfsen $N_i^{(h)}$ folgen.

Zur Controlle der berechneten Werthe der Gröfsen $N_i^{(h)}$ und der Winkel $\beta^{(h)}$ können die Gleichungen

$$k_0^{(i)} = N_i \sin\beta + N_i' \sin\beta' \ldots. + N_i^{\text{vi}} \sin\beta^{\text{vi}},$$
$$l_0^{(i)} = N_i \cos\beta + N_i' \cos\beta' \ldots. + N_i^{\text{vi}} \cos\beta^{\text{vi}}$$

dienen, welche aus (IV.) für $t = 0$ folgen.

Wiederholte Transformationen des Systems der Gleichungen VIII.

6.

In den Gleichungen VIII. bemerkt man, dafs im Allgemeinen die Zahlencoëfficienten, die in der Diagonale stehen, beträchtlich gröfser sind als die übrigen, von welchen letztern die Logarithmen angesetzt sind. Wäre dies überall der Fall, so würde man unmittelbar durch ein leichtes und schnelles Näherungsverfahren, welches ich weiter unten auseinander setzen werde, die Werthe der Unbekannten mit beliebiger Strenge finden können. Sobald aber auch nur einzelne der Coëfficienten, die nicht in der Diagonale stehn, beträchtliche Werthe haben, wie es in VIII. der Fall ist, kann dies Verfahren nicht angewendet werden. Dieser hinderliche Umstand läfst sich jedoch dadurch beseitigen, dafs man auf zweckmäfsige Weise die Gleichungen transformirt, indem man mittelst einfacher linearer Substitutionen immer für zwei der Unbekannten zwei andere Gröfsen einführt.

Es seien nämlich die Gleichungen

$$\ldots. + (g-a) M_i + \ldots. + \quad c M_k \quad + \ldots. + h_{i,l} M_l + \ldots. = 0,$$
$$\ldots. + \quad c M_i \quad + \ldots. + (g-b) M_k + \ldots. + h_{k,l} M_l + \ldots. = 0$$

zwei von den Gleichungen des Systems VIII., in welchen der aufserhalb der Diagonale befindliche Coëfficient c einen erheblichen Werth hat: so kann man dadurch, dafs man M_i und M_k durch andere Unbekannte P_i und P_k ersetzt und die beiden Gleichungen gehörig zu zwei andern combinirt, das gegebne System in ein andres von ähnlicher Form verwandeln, in welchem, während g unverändert bleibt, der Coëfficient, welcher an die Stelle von c tritt, *verschwindet*. Setzt man nämlich

$$\text{X.}\quad \begin{cases} M_i = \cos\alpha\, P_i - \sin\alpha\, P_k, \\ M_k = \sin\alpha\, P_i + \cos\alpha\, P_k, \end{cases}$$

so wird jetzt in jeder von den beiden Gleichungen die Gröfse g in zwei Gliedern stehn. Man kann aber aus ihnen sogleich wieder zwei solche Gleichungen ableiten, die g nur in Einem Glied enthalten, wenn man einmal die erste Gleichung mit $\cos\alpha$, die 2te mit $\sin\alpha$ multiplicirt und sie nach geschehner Multiplication addirt, und dann die erste mit $-\sin\alpha$, die zweite mit $\cos\alpha$ multiplicirt, und beide nach geschehner Multiplication ebenfalls addirt. Die neuen Gleichungen werden dadurch

$$\begin{aligned} \ldots + \{g - a\cos^2\alpha - b\sin^2\alpha + 2c\sin\alpha\cos\alpha\}P_i + \ldots + \{(a-b)\sin\alpha\cos\alpha + c\cos 2\alpha\}P_k + \ldots \\ + (h_{i,l}\cos\alpha + h_{k,l}\sin\alpha)M_l + \ldots = 0, \\ \ldots + \{(a-b)\sin\alpha\cos\alpha + c\cos 2\alpha\}P_i + \ldots + \{g - a\sin^2\alpha - b\cos^2\alpha - 2c\sin\alpha\cos\alpha\}P_k + \ldots \\ + (-h_{i,l}\sin\alpha + h_{k,l}\cos\alpha)M_l + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Man sieht, dafs hierdurch die Coëfficienten, welche in beiden Gleichungen dem c entsprechen, wieder wie früher einander gleich werden. Auch sonst behält das System seine Symmetrie, wenn statt M_i, M_k überall P_i, P_k eingeführt wird; denn im transformirten System werden die Coëfficienten von P_i und P_k in der $(l+1)$ten Gleichung

$$h_{l,i}\cos\alpha + h_{l,k}\sin\alpha \quad \text{und} \quad -h_{l,i}\sin\alpha + h_{l,k}\cos\alpha,$$

welche mit den Coëfficienten von M_l in der oben angegebnen transformirten $(i+1)$ten und $(k+1)$ten Gleichung übereinkommen, weil nach der Eigenschaft des ursprünglichen Systems VIII. man $h_{l,i} = h_{i,l}$, $h_{l,k} = h_{k,l}$ hat.

Man kann nun den noch willkürlichen Winkel α so bestimmen, dafs der an die Stelle von c getretene Coëfficient

$$(a-b)\sin\alpha\cos\alpha + c\cos 2\alpha = 0$$

wird, was für α die Gleichung

$$\text{XI.}\quad \operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2c}{b-a}$$

giebt. Sind a' und b' die neuen, den frühern a und b entsprechenden, Gröfsen in der Diagonale, so hat man

$$\begin{aligned} a' &= a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha - 2c\sin\alpha\cos\alpha, \\ b' &= a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha + 2c\sin\alpha\cos\alpha, \end{aligned}$$

und daher zur bequemen Berechnung von a' und b' die Formeln

$$\text{XII.}\quad \begin{cases} b' + a' = b + a, \\ b' - a' = \dfrac{b-a}{\cos 2\alpha} = \dfrac{2c}{\sin 2\alpha}, \end{cases}$$

welche zugleich durch den für $b'-a'$ angegebnen doppelten Ausdruck eine Controlle der Rechnung enthalten. Die Werthe der beiden Systeme Gröfsen

$$h'_{i,l} = \cos\alpha \cdot h_{i,l} + \sin\alpha \cdot h_{k,l},$$
$$h'_{k,l} = \cos\alpha \cdot h_{k,l} - \sin\alpha \cdot h_{i,l},$$

in welchen l von i und k verschieden ist, können ebenfalls leicht controllirt werden, da der Winkel α derselbe bleibt, und daher zwischen den Summen der den verschiednen l entsprechenden Gröfsen die nämlichen Gleichungen Statt finden.

Die Summen der Quadrate der Zahlencoëfficienten des gegebnen und transformirten Systems sind einander gleich, wenn man jeden Coëfficienten so oft als er vorkommt nimmt, d. h. die aufserhalb der Diagonale befindlichen zweimal. Denn für jedes l ist $h'^2_{i,l} + h'^2_{k,l} = h^2_{i,l} + h^2_{k,l}$; ferner

$$(a'+b')^2 + (a'-b')^2\cos^2 2\alpha + (a'-b')^2\sin^2 2\alpha = (a+b)^2 + (a-b)^2 + 4c^2,$$

und daher

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 + 2c^2.$$

Theilt man daher die Summe der Quadrate der Zahlencoëfficienten in die Summe der Quadrate der in der Diagonale und in die Summe der Quadrate der aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten, so wächst durch die Transformation die erste Summe um $2c^2$, während die zweite Summe sich um dieselbe Gröfse $2c^2$, nämlich um die Summe der Quadrate der beiden vernichteten Coëfficienten, verkleinert hat. Wiederholt man die Transformation, indem man immer nur für zwei Unbekannte andre Gröfsen einführt, und zwei Gleichungen auf die angegebne Art zu zwei andern Gleichungen combinirt, so wird für jedes nach und nach durch die angegebne Transformation erhaltene System Gleichungen der Satz gelten,

dafs die Summe der Quadrate der aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten um die Summe der Quadrate aller in den einzelnen Transformationen vernichteten Coëfficienten kleiner geworden ist als in dem ursprünglich gegebnen System Gleichungen, und dafs die Summe der Quadrate der in der Diagonale befindlichen Coëfficienten sich um dieselbe Gröfse vermehrt hat.

Man ersieht aus diesem Satze, dafs man in allen Fällen die Summe der Quadrate der aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten nach und nach so klein als man nur will machen kann, so dafs sie kleiner werden kann als jede gegebne noch so kleine Gröfse. *Es lassen sich also auch alle einzelnen aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten durch wiederholte Anwendung der angegebnen Transformation unendlich verkleinern.* Man kann so immer dem Grenzfall, wo jene Coëfficienten ganz verschwinden und die

Gleichungen sich unmittelbar auflösen lassen, beliebig nahe kommen, ohne dafs es nothwendig wäre, dafs, wie in unserm Fall, schon Anfangs die Mehrzahl der Glieder aufserhalb der Diagonale von denen in derselben an Gröfse übertroffen würde.

Ist nämlich n die Anzahl der Gleichungen und S nach der ersten Transformation die Summe der Quadrate der $n(n-1)$ aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten, so wird, da immer wenigstens zwei dieser Coëfficienten in jedem transformirten System $=0$ sind, das Quadrat des gröfsten $>\frac{S}{(n-2)(n+1)}$. Wenn man daher durch jede neue Transformation immer den gröfsten der aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten zerstört, so wird die Summe im nächsten System $<S\left(1-\frac{2}{(n-2)(n+1)}\right)$, im nächst folgenden $<S\left(1-\frac{2}{(n-2)(n+1)}\right)^2$, und nach i Transformationen $<S\left(1-\frac{2}{(n-1)(n+1)}\right)^i$, welche Gröfse mit wachsendem i kleiner als jede gegebne werden kann. Diese Summen werden aber in der Wirklichkeit viel schneller abnehmen, da die Verringerung nur dann genau in dem Verhältnisse $1:1-\frac{2}{(n-1)(n+1)}$ Statt fände, wenn die aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten aufser den zweien verschwindenden sämmtlich einander gleich wären. Man sieht zugleich, dafs die Transformation mit dem meisten Erfolg angewandt wird, wenn unter den aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten ein Paar gleiche zur Diagonale symmetrisch liegende Coëfficienten einen vorzugsweise bedeutenden Werth haben. Aus dem Umstande, dafs man durch den unendlich fortgesetzten Procefs die aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten unendlich klein machen kann, folgt, dafs die Gleichung $n$ten Grades lauter reelle Wurzeln hat. Denn nach jeder Transformation bleiben die Coëfficienten reell, und wenn die aufserhalb der Diagonale befindlichen verschwinden, werden die mit dem Minuszeichen behafteten Zahlen in der Diagonale die verschiednen Werthe von g.

Aus den eben gemachten Bemerkungen folgt noch der Satz, dafs die Summe der Coëfficienten in der Diagonale gleich der Summe der Gröfsen g und die Summe der Quadrate *aller* Coëfficienten gleich der Summe ihrer Quadrate sein mufs, wenn man für die Coëfficienten in der Diagonale immer die mit dem Minuszeichen behafteten Zahlen nimmt. Denn die beiden Summen behalten nach jeder Transformation denselben Werth wie in den ursprünglichen Gleichungen VIII. und müssen ihn daher noch in dem Grenzfalle behalten, in welchem die Coëfficienten aufserhalb der Diagonale verschwinden und die in der Diagonale befindlichen den Gröfsen g gleich werden.

In den Gleichungen VIII. ist unter allen Coëfficienten aufserhalb der Diagonale der gröfste in der 5ten und 6ten Gleichung, dessen Logarithmus = 0,8789822. Dieser wurde bei der Rechnung zuerst zu Null gemacht, und so wurde auch bei allen folgenden Substitutionen im Allgemeinen die Regel befolgt, jedesmal den gröfsten von den aufserhalb der Diagonale vorhandnen Coëfficienten gleich Null zu machen. Im Ganzen wurden nach und nach zehn Paare von Unbekannten durch neue ersetzt. Da die Ausführung einer Substitution sehr schnell gemacht ist, und jede derselben für die Auffindung aller Systeme der Werthe der Unbekannten, welche die sieben Auflösungen ergeben, zugleich Gewinn bringt, so schien es am vortheilhaftesten, dieser für alle sieben Auflösungen gleichzeitig vorbereitenden Rechnung die angegebne Ausdehnung zu geben, obgleich man schon früher zur Anwendung einer Näherungsmethode hätte schreiten können. Wenn die jedesmalige erste Unbekannte mit (0), die zweite mit (I) u. s. f. bezeichnet wird, so sind die verschiednen Paare, die nach und nach durch neue ersetzt wurden, und die zu der Substitution dienenden Winkel α folgende:

XIII.

(IV)	und	(V)	. . . . α =	$+26^{0}\ 52'\ 38'',12$,
(I)	-	(II)	. . . . - -	+41 40 5,92,
(0)	-	(I)	. . . . - -	+17 9 20,35,
(II)	-	(III)	. . . . - -	+36 22 14,58,
(IV)	-	(VI)	. . . . - -	−11 54 41,37,
(0)	-	(III)	. . . . - -	+ 1 31 11,46,
(I)	-	(II)	. . . . - -	+ 2 7 52,40,
(V)	-	(VI)	. . . . - -	− 0 57 36,18,
(0)	-	(II)	. . . . - -	− 0 59 46,42,
(I)	-	(III)	. . . . - -	+ 1 38 7,62.

Man sieht, dafs nur die Unbekaunten (0), (I), (II), (III) und wiederum die Unbekannten (IV), (V), (VI) mit einander verbunden worden sind, und so hat sich bei diesen Transformationen die Gruppirung der *sieben* Planeten in *vier* und *drei* von selber dargeboten, ohne dafs hiebei von der Strenge etwas geopfert werden durfte.

Die unten folgende Tabelle giebt die *zehn* Systeme, in welches das gegebne nach und nach transformirt worden ist, wobei ich in jedem System den Coëfficient, welcher in dem folgenden Systeme beseitigt ist, durch Sternchen bezeichnet habe.

Schemata der Gleichungen (VIII.) und der zehn transformirten Systeme.

(Es ist aufser den Gröfsen der Diagonale abwechselnd blofs die obere oder die untere Hälfte jedes Schemas angesetzt, das letzte jedoch vollständig ausgefüllt worden. Nur in der Diagonale stehn Numeri, vor welchen die Gröfsen g weggelassen worden, sonst überall die Logarithmen, bei welchen durchweg —10 zu ergänzen ist. Wenn die Logarithmen zu negativen Numeris gehören, ist es durch n. angezeigt.)

	O.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
				Gegebenes System.				
	—5.5098820	9.8655252	9.1586592	7.8700057	7.2604292	5.8766796	4.2156819	0
		—11.8116540	10.6955298	9.0999439	8.3565631	6.9640084	5.3191061	1
0	—5.5098820		—12.9706870	9.7528822	8.7832803	7.3814819	5.7325546	2
1	9.8655252	—11.8116540		—17.5962070	8.8878063	7.4576700	5.7989267	3
2	9.1586592	*10.[illegible]	—12.9706870		—7.4890410	*10.87[illegible]	9.0223508	4
3	7.8700057	9.0999439	9.7598872	—17.5962070		—16.5854100	9.6439380	5
4	7.2197860	8.3457520	8.7422682	8.8462593	—3.6533425		—2.3259350	6
5	6.8787034n	7.9755587n	8.4031471n	8.5099694n	*	—22.4211085		
6	4.2156819	5.3191061	5.7325546	5.7989267	9.4669363	9.5382132	—2.3259350	
				Erstes transformirtes System.				
				Zweites transformirtes System.				
	—5.5098820	*9.8088069	9.5799453n	7.8700057	7.2197860	6.8787034n	4.2156819	0
		—7.3968844	*	9.6724433	8.7175126	8.3780737n	5.7117103	1
0	—5.3111122		—17.3854565	9.5304363	8.4395088	8.1009230n	5.4231118	2
1	*	—7.5956542		—17.5962070	8.8462593	8.5099694n	5.7989267	3
2	9.5601792n	9.0497211	—17.3854565		—3.6533425	*	9.4669363	4
3	9.1638436	9.6505590	*9.5304363	—17.5962070		—22.4211085	9.5382132	5
4	8.2298539	8.6934635	8.4395088	8.8462593	—3.6533425		—2.3259350	6
5	7.8902619n	8.3540409n	8.1009230n	8.5099694n	*	—22.4211085		
6	5.2242105	5.6876443	5.4231118	5.7989267	9.4669363	9.5382132	—2.3259350	
				Drittes transformirtes System.				
				Viertes transformirtes System.				
	—5.3111122	*	9.3138512n	9.5222066	8.2298539	7.8902619n	5.2242105	0
		—7.5956542	9.5508572	9.4678118	8.6934635	8.3540409n	5.6876443	1
0	—5.3111122		—17.1356554	*	8.8046407	8.4675546n	5.7683052	2
1	*	—7.5956542		—17.8460080	8.6042303	8.2688686n	5.5436860	3
2	9.3138512n	9.5508572	—17.1356554		—3.6533425	*	*9.4669363	4
3	*9.5222066	9.4678118	*	—17.8460080		—22.4211085	9.5382132	5
4	8.2203099	8.6839195	8.7951029	8.5946971	—3.7151584		—2.3259350	6
5	7.8902619n	8.3540409n	8.4675546n	8.2688686n	8.8529238n	—22.4211085		
6	7.4465920	8.0102012	8.1212408	7.9207282	*	9.5287595	—2.2641190	
				Fünftes transformirtes System.				
	O.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
				Sechstes transformirtes System.				
	−5.3022811	7.8914390	*9.3136984n	*	8.2466210	7.9168235n	7.5728881	0
		−7.5956542	9.5508572	9.4676590	4.6839195	8.3540409n	8.0102012	1
0	−5.3022811		−17.1356554	7.7374784	8.7951029	8.4675546n	8.1212408	2
1	6.0970453	−7.5824233		−17.8548391	8.5896508	8.2638698	7.9156789	3
2	9.3140047n	*	−17.1488863		−3.7151584	8.8529238n	*	4
3	*	9.4676593	7.7368910n	−17.8548391		−22.4211085	9.5287595	5
4	8.2466210	8.7040099	8.7821072	8.5896508	−3.7151584		−2.2641190	6
5	7.9168235n	8.3742385n	8.4546278n	8.2638698n	8.8529238	−22.4211085		
6	7.5728881	8.0302850	8.1082409	7.9156789	*	*9.5287595	−2.2641190	
				Siebentes transformirtes System.				

				Achtes transformirtes System.				
	−5.3022811	6.0970453	*9.3140047n	*	8.2466210	7.9200467n	7.5564556	0
		−7.5824233	*	9.4676593	8.7040099	8.3774615n	8.0138517	1
0	−5.2986987		−17.1488863	7.7368910n	8.7821072	8.4578395n	8.0917138	2
1	6.0969796	−7.5824233		−17.8548391	8.5896508	8.2670610n	7.8990825	3
2	*	4.3372594	−17.1524687		−3.7151584	8.8528628n	7.0770747n	4
3	5.9771051	*9.4676598	7.7368953n	−17.8548391		−22.4267712	*	5
4	8.2198352	8.7040099	8.7842368	8.5896508	−3.7151584		−2.2584562	6
5	7.8931143n	8.3774615n	8.4599504n	8.2670610n	8.8528628n	−22.4267712		
6	7.5296841	8.0138517	8.0938446	7.8990825	7.0770747n	*	−2.2584562	
				Neuntes transformirtes System.				

Zehntes transformirtes System.

	−5.2986987	6.1061176	*	5.9602777	8.2198352	7.8931143n	7.5296841
	6.1061176	−7.5740431	6.1861782n	*	8.7132591	8.3867961n	8.0230921
	*	6.1861782n	−17.1524687	7.7366533n	8.7842368	8.4599504n	8.0938446
XIV.	5.9602777	*	7.7366533n	−17.8632192	8.5730312	8.2505934n	7.8824471
	8.2198352	8.7132591	8.7842368	8.5730312	−3.7151584	8.8528628n	7.0770747n
	7.8931143n	8.3867961n	8.4599504n	8.2505934n	8.8528628n	−22.4267712	*
	7.5296841	8.0230921	8.0938446	7.8824471	7.0770747n	*	−2.2584562

In dem System VIII. geben die in der Diagonale befindlichen Zahlen noch keine Vorstellung von der Gröfse und der Aufeinanderfolge der sieben Wurzeln *g;* aber schon sogleich nach der zweiten Transformation erhält man durch diese Zahlen eine starke Annäherung an alle *sieben* Wurzeln auf einmal, welche bald so grofs wird, dafs sie nur noch kleiner Correctionen bedarf.

Wenn man alle in (XIII.) angegebenen Substitutionen von der Form (X.) zusammenfafst, so dafs die Unbekannten M des Systems (VIII.) unmittelbar durch die Unbekannten des letzten transformirten Systems, welche ich mit

$$R_0, \; R_1, \; \ldots \; R_6$$

bezeichnen will, ausgedrückt werden, so findet man, wenn man statt der Zahlen die Logarithmen, aber mit den Vorzeichen der Zahlen, setzt:

$$\text{XV.}\quad\begin{cases} M_0 = 9{,}9799291\,R_0 - 9{,}4703632\,R_1 + 8{,}4405137\,R_2 - 8{,}2284096\,R_3, \\ M_1 = 9{,}3810153\,R_0 + 9{,}8476757\,R_1 - 9{,}7461559\,R_2 + 9{,}5662156\,R_3, \\ M_2 = 9{,}2410836\,R_0 + 9{,}8089612\,R_1 + 9{,}7638502\,R_2 - 9{,}6689433\,R_3, \\ M_3 = 8{,}0433639\,R_0 + 8{,}6533681\,R_1 + 9{,}7729660\,R_2 + 9{,}9052324\,R_3, \\ M_4 = \quad 9{,}9409002\,R_4 - 9{,}6581085\,R_5 + 9{,}2467542\,R_6, \\ M_5 = \quad 9{,}6457624\,R_4 + 9{,}9495307\,R_5 + 9{,}0343951\,R_6, \\ M_6 = -9{,}3147106\,R_4 - 8{,}2146974\,R_5 + 9{,}9904855\,R_6. \end{cases}$$

So oft vermittelst der Gleichungen X. zwei Unbekannte durch zwei neue ersetzt werden, bleibt die Summe ihrer Quadrate unverändert. Da niemals eine der vier ersten Unbekannten mit einer der drei letzten verbunden worden ist, sondern beide Gruppen nur unter sich, so mufs man folgende zwei Gleichungen besonders haben:

$$M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = R_0^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2,$$
$$M_4^2 + M_5^2 + M_6^2 = R_4^2 + R_5^2 + R_6^2.$$

Setzt man links statt der Gröfsen M ihre Ausdrücke XV., so erhält man für die Coëfficienten der vier ersten Gleichungen XV. zehn und für die der drei letzten sechs Bedingungen, die zur Prüfung der Zahlen in (XV.) benutzt worden sind. Aus diesen Bedingungsgleichungen folgt auch noch, dafs, um umgekehrt die Gröfsen R durch die Gröfsen M auszudrücken, man in jeder der beiden Gruppen in XV. nur die Horizontalreihen und Verticalreihen der Coëfficienten mit einander zu vertauschen braucht.

Näherungsmethode zur numerischen Auflösung des Systems der Gleichungen (1.), wenn die aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten als kleine Gröfsen erster Ordnung betrachtet werden können.

7.

Wenn in dem System der n Gleichungen (1.)

$$\begin{aligned} \{(a,a)-x\}\alpha + (a,b)\beta + (a,c)\gamma \ldots + (a,p)\varpi &= 0, \\ (b,a)\alpha + \{(b,b)-x\}\beta + (b,c)\gamma \ldots + (b,p)\varpi &= 0, \\ (c,a)\alpha + (c,b)\beta + \{(c,c)-x\}\gamma \ldots + (c,p)\varpi &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p,a)\alpha + (p,b)\beta + (p,c)\gamma \ldots + \{(p,p)-x\}\varpi &= 0, \end{aligned}$$

die aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten (a, b), (a, c) etc. als kleine Gröfsen *erster* Ordnung betrachtet werden können, so lassen sich die Werthe der Unbekannten durch eine successive Annäherung finden, welche sehr rasch zum Ziele führt und jede Strenge verstattet.

Bezeichnet man nämlich im Allgemeinen den Werth einer Gröfse u durch

$$u = \Delta^0 u + \Delta' u + \Delta'' u + \Delta''' u \text{ etc.},$$

wo $\Delta^0 u$ den Näherungswerth, $\Delta' u$, $\Delta'' u$ etc. seine successiven Correctionen von den verschiednen Ordnungen bedeuten, so dafs $\Delta^i u$ eine kleine Gröfse der $i$ten Ordnung ist, so findet man in unserm Falle diese immer kleiner werdenden Gröfsen auf folgende Weise. Zuerst bemerke ich, dafs man als Näherungswerth von x jede der n Gröfsen

$$(a, a), \quad (b, b), \quad (c, c), \quad \ldots . \quad (p, p)$$

annehmen kann. Für jede dieser Annahmen erhält man ein System von Werthen der Unbekannten. Es reicht hin, das Verfahren für eine dieser Annahmen $\Delta^0 x = (a, a)$ auseinander zu setzen. Man erhält für diese Annahme zunächst

$$\Delta^0 x + \Delta' x = (a, a), \quad \Delta^0 \frac{\beta}{\alpha} = 0, \quad \Delta^0 \frac{\gamma}{\alpha} = 0, \quad \text{etc.}$$

$$\Delta' \frac{\beta}{\alpha} = \frac{(b, a)}{(a, a) - (b, b)}, \quad \Delta' \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{(c, a)}{(a, a) - (c, c)}, \quad \text{etc.}$$

Der Werth von x weicht nämlich von (a, a) nur um Gröfsen der *zweiten* Ordnung ab, weshalb die in (XIV.) in der Diagonale befindlichen Coëfficienten die Werthe der Wurzeln x sogleich mit so grofser Annäherung geben, dafs es nur einer leichten Verbesserung bedarf, um die wahren Werthe zu erhalten. Die Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ etc. sind Gröfsen der *ersten* Ordnung; der Werth von α selber, welcher $= \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + \text{etc.}\right)}}$, weicht daher von der *Einheit* ebenfalls nur um Gröfsen der *zweiten* Ordnung ab. Die Correctionen der Gröfsen $\frac{\beta}{\alpha}$ etc. von der *zweiten* Ordnung erhält man aus den Gleichungen:

$$\{(a, a) - (b, b)\} \Delta^2 \frac{\beta}{\alpha} = (b, c) \Delta' \frac{\gamma}{\alpha} + (b, d) \Delta' \frac{\delta}{\alpha} + \ldots,$$

$$\{(a, a) - (c, c)\} \Delta^2 \frac{\gamma}{\alpha} = (c, b) \Delta' \frac{\beta}{\alpha} + (c, d) \Delta' \frac{\delta}{\alpha} + \ldots,$$

$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Die Correctionen von x von der zweiten und dritten Ordnung erhält man hierauf durch die Gleichung

$$\Delta^2 x + \Delta^3 x = (a, b) \left\{\Delta' \frac{\beta}{\alpha} + \Delta^2 \frac{\beta}{\alpha}\right\} + (a, c) \left\{\Delta' \frac{\gamma}{\alpha} + \Delta^2 \frac{\gamma}{\alpha}\right\} + \text{etc.}$$

Die Correctionen der Gröfsen $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ etc. von der *dritten* und *vierten* Ordnung ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x\}\Delta^3\frac{\beta}{\alpha}$$
$$=(b,c)\Delta^2\frac{\gamma}{\alpha}+(b,d)\Delta^2\frac{\delta}{\alpha}+\text{etc.}-\{\Delta^2 x+\Delta^3 x\}\left(\Delta^1\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^2\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

$$\{(a,a)-(c,c)+\Delta^2 x+\Delta^3 x\}\Delta^3\frac{\gamma}{\alpha}$$
$$=(c,b)\Delta^2\frac{\beta}{\alpha}+(c,d)\Delta^2\frac{\delta}{\alpha}+\text{etc.}-(\Delta^2 x+\Delta^3 x)\left(\Delta^1\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^2\frac{\gamma}{\alpha}\right),$$

etc. etc.

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x\}\Delta^4\frac{\beta}{\alpha}=(b,c)\Delta^3\frac{\gamma}{\alpha}+(b,d)\Delta^3\frac{\delta}{\alpha}+\text{etc.},$$

$$\{(a,a)-(c,c)+\Delta^2 x+\Delta^3 x\}\Delta^4\frac{\gamma}{\alpha}=(c,b)\Delta^3\frac{\beta}{\alpha}+(c,d)\Delta^3\frac{\delta}{\alpha}+\text{etc.},$$

etc. etc.

Man erhält dann $\Delta^4 x+\Delta^5 x$ und $\Delta^5\frac{\beta}{\alpha}$, $\Delta^5\frac{\gamma}{\alpha}$, etc., $\Delta^6\frac{\beta}{\alpha}$, $\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha}$, etc. durch die Gleichungen

$$\Delta^4 x+\Delta^5 x=(a,b)\left\{\Delta^3\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^4\frac{\beta}{\alpha}\right\}+(a,c)\left\{\Delta^3\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^4\frac{\gamma}{\alpha}\right\}+\ldots,$$

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\Delta^5\frac{\beta}{\alpha}$$
$$=(b,c)\Delta^4\frac{\gamma}{\alpha}+(b,d)\Delta^4\frac{\delta}{\alpha}+\ldots-(\Delta^4 x+\Delta^5 x)\left(\Delta^1\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^2\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^3\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^4\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\Delta^5\frac{\gamma}{\alpha}$$
$$=(c,b)\Delta^4\frac{\beta}{\alpha}+(c,d)\Delta^4\frac{\delta}{\alpha}+\ldots-(\Delta^4 x+\Delta^5 x)\left(\Delta^1\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^2\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^3\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^4\frac{\gamma}{\alpha}\right),$$

etc. etc.

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\Delta^6\frac{\beta}{\alpha}=(b,c)\Delta^5\frac{\gamma}{\alpha}+(b,d)\Delta^5\frac{\delta}{\alpha}+\ldots,$$

$$\{(a,a)-(c,c)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha}=(c,b)\Delta^5\frac{\beta}{\alpha}+(c,d)\Delta^5\frac{\delta}{\alpha}+\ldots,$$

etc. etc.

Endlich erhält man

$$\Delta^6 x+\Delta^7 x=(a,b)\left\{\Delta^5\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^6\frac{\beta}{\alpha}\right\}+(a,c)\left\{\Delta^5\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha}\right\}+\ldots,$$

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\Delta^7\frac{\beta}{\alpha}$$
$$=(b,c)\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha}+(b,d)\Delta^6\frac{\delta}{\alpha}+\ldots\ldots-(\Delta^6 x+\Delta^7 x)\Big(\Delta^1\frac{\beta}{\alpha}+\ldots\ldots+\Delta^6\frac{\beta}{\alpha}\Big),$$
$$\{(a,a)-(c,c)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\Delta^7\frac{\gamma}{\alpha}$$
$$=(c,b)\Delta^6\frac{\beta}{\alpha}+(c,d)\Delta^6\frac{\delta}{\alpha}+\ldots\ldots-(\Delta^6 x+\Delta^7 x)\Big(\Delta^1\frac{\gamma}{\alpha}+\ldots\ldots+\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha}\Big),$$
. . . . *).

---

*) Wenn in den vorgelegten Gleichungen (1.) die Coëfficienten aufserhalb der Diagonale nur in *einer* Horizontal- und Verticalreihe klein sind, in den übrigen aber von beliebiger Gröfse, so kann man durch ein ähnliches Näherungsverfahren immer *eine* Wurzel der Gleichung $n$ten Grades und die ihr entsprechenden Werthe der Unbekannten finden. Sind z. B. die Gröfsen (ab), (ac), ... (ap) klein, so erhält man wieder aus der ersten Gleichung den Näherungswerth $x=(aa)$ bis auf Gröfsen 2ter Ordnung exclusive genau. Wenn man diesen Werth in die $n-1$ folgenden Gleichungen substituirt, so erhält man durch strenge Auflösung eines Systems von $n-1$ linearen Gleichungen die Werthe von $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$, ... $\frac{\varpi}{\alpha}$ bis auf Gröfsen 3ter Ordnung excl. genau. Substituirt man diese Werthe wieder in die erste Gleichung, so erhält man den Werth von x bis auf Gröfsen 4ter Ordnung excl. genau, und mit diesem Werthe von x erhält man dann wieder durch Auflösung von $n-1$ linearen Gleichungen die Werthe von $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ etc. bis zu der 5ten Ordnung excl. genau, u. s. f. Es wird hiebei von Vortheil sein, in den jedesmal aufzulösenden $n-1$ linearen Gleichungen den ersten Näherungswerth von x in den Coëfficienten beizubehalten und die von den Correctionen von x herrührenden Gröfsen mit den ganz constanten Gliedern zu vereinigen, wodurch die Coëfficienten der linearen Gleichungen immer dieselben bleiben und sich nur ihre ganz constanten Glieder ändern, so dafs der gröfste Theil der numerischen Rechnung, welche zur Auflösung der linearen Gleichungen gemacht werden mufs, für die Correctionen aller Ordnungen unverändert beibehalten werden kann. Setzt man

$$x=(aa)+\delta' x+\delta'' x+\delta''' x \text{ etc.},$$

wo $\delta^{(i)}x$ von der $(2i)$ten Ordnung ist, ferner

$$\frac{\beta}{\alpha}=\delta'\frac{\beta}{\alpha}+\delta''\frac{\beta}{\alpha}+\delta'''\frac{\beta}{\alpha} \text{ etc.},$$

wo $\delta^{(i)}\frac{\beta}{\alpha}$ von der $(2i-1)$ten Ordnung ist; setzt man endlich

$$\delta' x+\delta'' x+\ldots\ldots+\delta^{(i)}x=(x)_i,$$
$$\delta'\frac{\beta}{\alpha}+\delta''\frac{\beta}{\alpha}+\ldots\ldots+\delta^{(i)}\frac{\beta}{\alpha}=\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)_i,$$

und gebraucht dieselben Bezeichnungen in Bezug auf $\frac{\gamma}{\alpha}$, $\frac{\delta}{\alpha}$, etc., so werden die Correctionen der Gröfse x von der $(2i)$ten und der Gröfsen $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$. etc. von der $(2i+1)$ten Ordnung aus den bereits gefundenen Correctionen niedriger Ordnung durch die folgen-

Nimmt man z. B. für das System der n Gleichungen (1.) die 7 Gleichungen XIV., nachdem man darin alle Zeichen umgekehrt hat, und nimmt als Näherungswerth von x oder g denjenigen, welchen die erste Gleichung giebt, so findet man nach und nach:

$$
\begin{aligned}
\Delta^0 x + \Delta^1 x &= 5'',2986987 \\
\Delta^2 x + \Delta^3 x &= + \quad 1747\cdot 6 \\
\Delta^4 x + \Delta^5 x &= - \quad 2\cdot 3 \\
\Delta^6 x + \Delta^7 x &= \quad 0\cdot 0 \\
\hline
x = g &= 5'',2988732
\end{aligned}
$$

$\Delta^0\frac{\beta}{\alpha} = 0$	$\Delta^0\frac{\gamma}{\alpha} = 0$	$\Delta^0\frac{\delta}{\alpha} = 0$
$\Delta^1\frac{\beta}{\alpha} = +0{,}00005611390$	$\Delta^1\frac{\gamma}{\alpha} = 0$	$\Delta^1\frac{\delta}{\alpha} = +0{,}000007263263$
$\Delta^2\frac{\beta}{\alpha} = -0{,}00023818658\cdot 9$	$\Delta^2\frac{\gamma}{\alpha} = -0{,}00005383551\cdot 3$	$\Delta^2\frac{\delta}{\alpha} = -0{,}000031224732\cdot 1$
$\Delta^3\frac{\beta}{\alpha} = - \quad 102738\cdot 2$	$\Delta^3\frac{\gamma}{\alpha} = - \quad 21373\cdot 6$	$\Delta^3\frac{\delta}{\alpha} = - \quad 110879\cdot 5$
$\Delta^4\frac{\beta}{\alpha} = - \quad 31046\cdot 2$	$\Delta^4\frac{\gamma}{\alpha} = + \quad 7022\cdot 3$	$\Delta^4\frac{\delta}{\alpha} = + \quad 40788\cdot 6$
$\Delta^5\frac{\beta}{\alpha} = + \quad 220\cdot 7$	$\Delta^5\frac{\gamma}{\alpha} = + \quad 48\cdot 1$	$\Delta^5\frac{\delta}{\alpha} = + \quad 262\cdot 2$
$\Delta^6\frac{\beta}{\alpha} = - \quad 33\cdot 2$	$\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha} = - \quad 7\cdot 5$	$\Delta^6\frac{\delta}{\alpha} = - \quad 43\cdot 8$
$\Delta^7\frac{\beta}{\alpha} = - \quad 0\cdot 3$	$\Delta^7\frac{\gamma}{\alpha} = \quad 0\cdot 0$	$\Delta^7\frac{\delta}{\alpha} = - \quad 0\cdot 3$
$\frac{R_1}{R_0} = \frac{\beta}{\alpha} = -0{,}00018278774$	$\frac{R_2}{R_0} = \frac{\gamma}{\alpha} = -0{,}00005397862$	$\frac{R_3}{R_0} = \frac{\delta}{\alpha} = -0{,}000024031342$

---

den Gleichungen erhalten:

$$\delta^{(i)}x = (ab)\,\delta^{(i)}\frac{\beta}{\alpha} + (ac)\,\delta^{(i)}\frac{\gamma}{\alpha} \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_{i-1}\delta^{(i)}x + (x)_i\,\delta^{(i)}\frac{\beta}{\alpha} = \{(bb)-(aa)\}.\,\delta^{(i+1)}\frac{\beta}{\alpha} + (bc).\,\delta^{(i+1)}\frac{\gamma}{\alpha} + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)_{i-1}\delta^{(i)}x + (x)_i\,\delta^{(i)}\frac{\gamma}{\alpha} = (cb).\,\delta^{(i+1)}\frac{\beta}{\alpha} + \{(cc)-(aa)\}.\,\delta^{(i+1)}\frac{\gamma}{\alpha} + \text{etc.}$$

etc. etc.

Die Näherungsmethode wird hier beschwerlicher, weil man die $n-1$ linearen Gleichungen streng aufzulösen hat, welche im obigen Falle ebenfalls durch Näherung leicht aufgelöst werden konnten, so dafs der Vortheil der Methode sich in diesem Falle grofsentheils darauf beschränkt, dafs man, um den Werth von x zu finden, nicht die Gleichung $n$ten Grades zu bilden und aufzulösen braucht.

$\Delta^0 \frac{\varepsilon}{\alpha} = 0$	$\Delta^0 \frac{\zeta}{\alpha} = 0$	$\Delta^0 \frac{\eta}{\alpha} = 0$
$\Delta^1 \frac{\varepsilon}{\alpha} = -0{,}010476254$	$\Delta^1 \frac{\zeta}{\alpha} = -0{,}00045646310$	$\Delta^1 \frac{\eta}{\alpha} = -0{,}0011137195$
$\Delta^2 \frac{\varepsilon}{\alpha} = -\quad 23384{\cdot}3$	$\Delta^2 \frac{\zeta}{\alpha} = +\quad 4349994$	$\Delta^2 \frac{\eta}{\alpha} = -\quad 43279{\cdot}0$
$\Delta^3 \frac{\varepsilon}{\alpha} = +\quad 13690{\cdot}2$	$\Delta^3 \frac{\zeta}{\alpha} = +\quad 55503{\cdot}2$	$\Delta^3 \frac{\eta}{\alpha} = +\quad 11793{\cdot}7$
$\Delta^4 \frac{\varepsilon}{\alpha} = +\quad 70{\cdot}2$	$\Delta^4 \frac{\zeta}{\alpha} = -\quad 5502{\cdot}3$	$\Delta^4 \frac{\eta}{\alpha} = +\quad 100{\cdot}9$
$\Delta^5 \frac{\varepsilon}{\alpha} = -\quad 14{\cdot}8$	$\Delta^5 \frac{\zeta}{\alpha} = -\quad 89{\cdot}9$	$\Delta^5 \frac{\eta}{\alpha} = -\quad 13{\cdot}6$
$\Delta^6 \frac{\varepsilon}{\alpha} = -\quad 0{\cdot}1$	$\Delta^6 \frac{\zeta}{\alpha} = +\quad 5{\cdot}8$	$\Delta^6 \frac{\eta}{\alpha} = -\quad 0{\cdot}2$
$\Delta^7 \frac{\varepsilon}{\alpha} = \quad 0{\cdot}0$	$\Delta^7 \frac{\zeta}{\alpha} = \quad 0{\cdot}0$	$\Delta^7 \frac{\eta}{\alpha} = \quad 0{\cdot}0$
$\frac{R_4}{R_0} = \frac{\varepsilon}{\alpha} = -0{,}010485893$	$\frac{R_5}{R_0} = \frac{\zeta}{\alpha} = -0{,}00041246399$	$\frac{R_6}{R_0} = \frac{\eta}{\alpha} = -0{,}0011168593$

Aus $\alpha^2 \left\{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + \ldots\right\} = 1$ folgt noch

$$\log \alpha = \log R_0 = 9{,}9999758,$$

woraus ferner

$$\log\beta = \log R_1 = 6{,}2619229\,\mathrm{n}, \qquad \log\varepsilon = \log R_4 = 8{,}0205812{\cdot}5\,\mathrm{n},$$
$$\log\gamma = \log R_2 = 5{,}7321976\,\mathrm{n}, \qquad \log\zeta = \log R_5 = 6{,}6153618\,\mathrm{n},$$
$$\log\delta = \log R_3 = 5{,}3807537\,\mathrm{n}, \qquad \log\eta = \log R_6 = 7{,}0479743\,\mathrm{n}$$

gefunden wird. Die Genauigkeit ist hier viel weiter getrieben als der nachherige Gebrauch verlangt. Wenn man in der That die gefundnen Werthe der Unbekannten in die Gleichungen XIV. substituirt, so findet man eine vollendete Übereinstimmung, indem der Werth des Aggregats, welches verschwinden soll, in keiner Gleichung den zehnmillionensten Theil seines gröfsten Terms erreicht.

Durch die hier auseinandergesetzte Methode sind die folgenden Resultate für die sieben Systeme der Unbekannten gefunden worden.

Tabelle der sieben Systeme der Werthe der Unbekannten des transformirten Systems XIV.

(Nur bei g sind die Zahlen angesetzt, sonst die Logarithmen, bei denen überall —10 in der Characteristik zu ergänzen ist.)

	System I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
g	5.2988733	7.5747191	17.1525573	17.8632966	3.7136434	22.4273091	2.2584168
R_0	9.9999758	5.59372	4.49078	4.77888n	8.020611	6.6558531	7.0453348
R_1	6.26186n	9.9999595	5.44276	4.69090	8.127403	7.2114826	7.296067
R_2	5.73272n	5.99605n	9.9999760	7.88943	7.656551	7.7345775	6.919256
R_3	5.38164n	5.67660n	7.8913067n	9.9999850	7.422751	7.5884936	6.687464
R_4	8.0205807n	8.1275834n	7.6565719n	7.4309490n	9.9999278	7.5772574	6.83876n
R_5	6.6153199n	7.1975215n	7.7307677n	7.5920478n	7.58422n	9.9999867	4.25271
R_6	7.0479752n	7.2980444n	6.9189241n	6.6948000n	6.80754	4.73984n	9.9999986

Wenn man die vorstehenden 7 Systeme der Werthe der Gröfsen R in die Gleichungen XV. substituirt, so findet man die 7 Systeme der Werthe der Gröfsen M. Es ist, um diese Gröfsen mit der erforderlichen Genauigkeit zu erhalten, überflüssig, die Logarithmen aller Gröfsen R auf dieselbe Zahl Stellen zu berechnen. Denn, wenn man die Werthe der Gröfsen R substituirt, wird in vielen zur Bestimmung der Gröfsen M zu bildenden Aggregaten der Werth *eines* Terms die andern beträchtlich übertreffen, so dafs man nur von den *Zahlen* die erforderliche Anzahl Stellen zu kennen braucht. Es sind deshalb in der obigen Tabelle einige Logarithmen mit 7, andere aber nur mit 5 Stellen angesetzt worden.

Die Werthe der 7 Systeme der Gröfsen M, wie sie aus den Gröfsen R durch die Formeln XV. abgeleitet worden sind, giebt die folgende Tabelle. Sie sind mit aller Genauigkeit berechnet, welche die Anwendung siebenstelliger Tafeln verstattet.

System I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
5,2988733	7,5747191	17,1525573	17,8632966	3,7136434	22,4273091	2,2584168
+0,9548364.7	−0,2953047.4	+0,0276998.70	−0,0167131.95	+0,0061320.4	+0,0000356.840	+0,0004905.317
+0,2403236.7	+0,7041486.2	−0,5602023.6	+0,3639800.2	+0,0104109.52	−0,0003423.278	+0,0013757.54
+0,1740664.5	+0,6440231.1	+0,5841832.64	−0,4620795.6	+0,0118614.62	+0,0024689.22	+0,0017218.36
+0,0109897.86	+0,0449154.3	+0,5865879.5	+0,8085248.5	+0,0055361.02	+0,0064128.63	+0,0009850.343
−0 0091606.953	−0,0113414.30	−0,0016560.475	−0,0006617.204	+0,8744861.9	−0,4517914.9	+0,1759003.9
−0,0051261.723	−0,0075519.595	−0,0068854.157	−0,0047267.932	+0,4389244.0	+0,8919316.0	+0,1079379.0
+0,0010783.321	+0,0008513.954	+0,0002124.55	+0,0001363.418	−0,2056750.7	−0,0171791.24	+0,9784694.7

Zur Probe über die richtige Bestimmung der sieben Wurzeln g hat man die beiden Bedingungen, dafs ihre Summe = der Summe der Zahlencoëfficienten der Diagonale in den Gleichungen VIII. oder XIV., und dafs die Summe ihrer Quadrate

= der Summe der Quadrate aller Coëfficienten dieser Gleichungen sein mufs. Die letztere Summe ist im Laufe der Rechnung schon einmal, nämlich zur Prüfung des transformirten Systems XIV. gebraucht worden. Die richtige Herleitung der Gröfsen M aus den für die Gröfsen R gefundnen Werthen kann ebenfalls auf eine doppelte Art für alle gleichzeitig geprüft werden. Wenn man nemlich in dem Schema der Werthe der Gröfsen M einmal die Quadrate der algebraischen Summen der einzelnen Verticalreihen oder das andere Mal die Quadrate der algebraischen Summen der einzelnen Horizontalreihen addirt, so mufs in beiden Fällen die Zahl 7 als Summe gefunden werden. Denn aus dem auf eine dieser Arten gebildeten Ausdruck verschwinden die Producte je zweier verschiedner M nach den Gleichungen (4.) und (9.) in §. 2.; die Summe der quadratischen Glieder $M_0^2 + M_1^2 + \ldots + M_6^2$ mufs aber für jedes der 7 Systeme besonders = 1 sein, weil $R_0^2 + R_1^2 + \ldots + R_6^2 = 1$ gemacht worden ist. Diese Prüfungen, welche besonders für die Zeichen der Gröfsen M eine leichte und entscheidende Controlle geben, sind an den Zahlen der obigen Tafel vorgenommen worden, und mit der erwarteten Strenge eingetroffen.

Nachdem die Gröfsen M bestimmt sind, erhält man die Verhältnisse der Unbekannten N des Systems V. mittelst der Gleichungen VI., deren Constanten in VII. angegeben sind. Die hieraus sich ergebenden numerischen Werthe der Verhältnisse der Gröfsen N respective zu N_3 und zu N_6 in den vier ersten und in den drei letzten Systemen sind zugleich mit ihren von den Änderungen der Massen abhängigen Variationen am Schlusse dieses Aufsatzes zusammengestellt worden, um unmittelbar mit den Resultaten verglichen werden zu können, welche Herr *Leverrier* in der „Connaiss. des temps" für 1843 Seite 31 ff. gefunden hat. Ich wende mich jetzt zu der Berechnung dieser Variationen oder der für eine Änderung der angewandten Werthe der Planetenmassen anzubringenden Correctionen.

Berechnung der Variationen, welche die sieben Systeme der Werthe der Unbekannten durch die Änderung der zum Grunde gelegten Werthe der Planetenmassen erfahren.

8.

Die von einer Änderung der Planetenmassen herrührenden Variationen der Werthe der Unbekannten könnten aus den §. 4. gegebnen allgemeinen Formeln entnommen werden, wenn man darin die Variationen der Coëfficienten der gegebenen Gleichungen substituirt, welche man durch Änderung der Planetenmassen erhält. Es ist aber bequemer, die auf diese besondre Form der Variationen bezüglichen Formeln unmittelbar abzuleiten.

Ich will das System der Gleichungen VIII. folgendermaafsen bezeichnen:

$$\text{XVI.}\quad\begin{cases}0 = \{g-[0,0]\}M_0+[0,1]M_1+[0,2]M_2+\ldots+[0,6]M_6,\\ 0 = [1,0]M_0+\{g-[1,1]\}M_1+[1,2]M_2+\ldots+[1,6]M_6,\\ \qquad\text{etc.},\end{cases}$$

wo

$$[i,k] = \sqrt{\frac{m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}}}{m^{(k)}\sqrt{a^{(k)}}}}.$$

Werden die Massen dadurch corrigirt, dafs man $m(1+\mu)$ statt m, $m'(1+\mu')$ statt m', etc. setzt, so erhält der Coëfficient $[i,k]$, wenn i und k verschieden sind, den Factor

$$1+\tfrac{1}{2}(\mu^{(i)}+\mu^{(k)}),$$

wie oben §. 5. bemerkt wurde; die Coëfficienten in der Diagonale aber, für welche beide Indices gleich sind, erhalten die Correctionen

$$\text{XVII.}\quad\begin{cases}\varDelta[0,0] = (0,1)\mu'+(0,2)\mu''+\ldots+(0,6)\mu^{\text{vi}},\\ \varDelta[1,1] = (1,0)\mu+(1,2)\mu''+\ldots+(1,6)\mu^{\text{vi}},\\ \qquad\text{etc.},\end{cases}$$

wo die Zahlenwerthe der Coëfficienten $(0,1)$, $(0,2)$, ...; $(1,0)$, $(1,2)$, ... aus der unmittelbar vor dem System V. aufgestellten Tabelle zu entnehmen sind.

Zwischen den Correctionen der Unbekannten, welche aus diesen Variationen der Coëfficienten hervorgehen, oder zwischen den Gröfsen $\varDelta g$, $\varDelta M_i$ erhält man aus der ersten Gleichung in XVI. die folgende:

$$\begin{aligned}0 = &\{\varDelta g-\varDelta[0,0]\}M_0+\tfrac{1}{2}\mu\{[0,1]M_1+[0,2]M_2+\ldots+[0,6]M_6\}\\ &+\tfrac{1}{2}\{(0,1)\mu' M_1+[0,2]\mu'' M_2+\ldots+[0,6]\mu^{\text{vi}} M_6\}\\ &+\{g-[0,0]\}\varDelta M_0+[0,1]\varDelta M_1+\ldots+[0,6]\varDelta_6,\end{aligned}$$

oder, weil $[0,1]M_1+[0,2]M_2+\ldots+[0,6]M_6 = -\{g-[0,0]M_0\}$ ist,

$$0 = \{\varDelta g-\varDelta[0,0]\}M_0-(g-[0,0])\mu M_0$$
$$+(g-[0,0])\{\varDelta M_0+\tfrac{1}{2}\mu M_0\}+[0,1]\{\varDelta M_1+\tfrac{1}{2}\mu' M_1\}\ldots+[0,6]\{\varDelta M_6+\tfrac{1}{2}\mu^{\text{vi}} M_6\}.$$

Bildet man die ähnlichen Gleichungen und setzt:

$$\text{XVIII.}\quad M_i\{(g-[i,i])\mu^{(i)}+\varDelta[i,i]\} = p_i,\qquad \varDelta M_i+\tfrac{1}{2}\mu^{(i)}M_i = \delta M_i,$$

so erhält man folgendes System Gleichungen:

$$\text{XIX.}\quad\begin{cases}p_0 = M_0\varDelta g+(g-[0,0])\delta M_0+[0,1]\delta M_1+\ldots+[0,6]\delta M_6,\\ p_1 = M_1\varDelta g+[1,0]\delta M_0+(g-[1,1])\delta M_1+\ldots+[1,6]\delta M_6,\\ \qquad\text{etc.}\end{cases}$$

Um aus diesen Gleichungen Δg zu erhalten, multiplicire man dieselben respective mit M_0, M_1, etc., so verschwinden nach geschehner Addition die mit den verschiednen Factoren δM_i multiplicirten Aggregate wegen der Gleichungen XVI.; der Coëfficient von Δg wird $\Sigma M^2 = 1$, und daher

$$\text{XX.} \quad \Delta g = M_0 p_0 + M_1 p_1 \ldots + M_6 p_6.$$

Um die Correctionen der Gröfsen M zu erhalten, bringe man die Gleichungen XIX. in die Form:

$$p_0 = M_0 \Delta g + (g - g')\delta M_0 + (g' - [0,0])\delta M_0 + [0,1]\delta M_1 + \ldots + [0,6]\delta M_6,$$
$$p_1 = M_1 \Delta g + (g - g')\delta M_1 + [1,0]\delta M_0 + (g' - [1,1])\delta M_1 + \ldots + [1,6]\delta M_6.$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit den zu g' gehörigen Gröfsen des zweiten Systems, M_0', M_1', etc., so bleiben nach geschehner Addition rechts vom Gleichheitszeichen nur die zweiten Terme, indem vermöge der Gleichungen XVII. die übrigen mit den verschiednen Gröfsen δM_i multiplicirten Aggregate verschwinden; ebenso verschwindet das mit Δg multiplicirte Aggregat, weil es den Factor $M_0 M_0' + M_1 M_1' + \ldots = 0$ erhält, und man findet:

$$M_0' \delta M_0 + M_1' \delta M_1 + \ldots + M_6' \delta M_6 = \frac{1}{g - g'}\{M_0' p_0 + M_1' p_1 + \ldots + M_6' p_6\}.$$

Vertauscht man die Gröfsen g', M_0', M_1' etc. des zweiten Systems mit den Gröfsen des 3ten, g'', M_0'', M_1'' etc., dann mit denen des 4ten u. s. f., so erhält man noch fünf ganz ähnliche Gleichungen. Setzt man

$$\tfrac{1}{2}\{\mu M_0^2 + \mu' M_1^2 + \ldots + \mu^{\mathrm{VI}} M_6^2\} = Q,$$

so erhält man endlich als siebente Gleichung

$$M_0 \delta M_0 + M_1 \delta M_1 + \ldots + M_6 \delta M_6 = Q,$$

wie aus der Gleichung $M_0 \Delta M_0 + M_1 \Delta M_1 + \ldots + M_6 \Delta M_6 = 0$ folgt. Multiplicirt man diese siebente Gleichung mit M_0, die sechs vorhergefundnen der Reihe nach mit den Factoren M_0', M_0'' etc. und addirt alle nach geschehner Multiplication, so werden die Unbekannten ΔM_i bis auf ΔM_0 sämmtlich eliminirt; ebenso bleibt nur ΔM_1 übrig, wenn man die Factoren M_1, M_1', M_1'' etc. wählt u. s. f. Wenn man die abkürzenden Bezeichnungen einführt:

$$\text{XXI.} \quad \begin{cases} (m_0, m_0) = \dfrac{M_0' M_0'}{g - g'} + \dfrac{M_0'' M_0''}{g - g''} + \ldots + \dfrac{M_0^{\mathrm{VI}} M_0^{\mathrm{VI}}}{g - g^{\mathrm{VI}}}, \\ (m_0, m_1) = \dfrac{M_0' M_1'}{g - g'} + \dfrac{M_0'' M_1''}{g - g''} + \ldots + \dfrac{M_0^{\mathrm{VI}} M_1^{\mathrm{VI}}}{g - g^{\mathrm{VI}}}, \\ (m_1, m_1) = \dfrac{M_1' M_1'}{g - g'} + \dfrac{M_1'' M_1''}{g - g_1''} + \ldots + \dfrac{M_1^{\mathrm{VI}} M_1^{\mathrm{VI}}}{g - g^{\mathrm{VI}}}, \\ \text{etc.}, \end{cases}$$

wo immer $(m_k, m_{k'}) = (m_{k'}, m_k)$, so findet man auf diese Weise für die Variationen der Unbekannten M des ersten Systems,

$$\text{XXII.}\quad \begin{cases} \delta M_0 = (m_0, m_0)p_0 + (m_0, m_1)p_1 + \dots + (m_0, m_6)p_6 + M_0 Q, \\ \delta M_1 = (m_1, m_0)p_0 + (m_1, m_1)p_1 + \dots + (m_1, m_6)p_6 + M_1 Q, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Man hat jetzt nur noch in XX. und XXII. die Werthe

$$p_i = M_i\{(g - [i, i])\mu^{(i)} + \Delta[i, i]\}$$

zu substituiren und die ganz ähnlichen Ausdrücke zu bilden, welche sich für die übrigen Systeme ergeben.

Setzt man die Correctionen des $(h+1)$ten Systems,

$$\text{XXIII.}\quad \Delta g^{(h)} = B^{(h)}\mu + B_1^{(h)}\mu' + \dots + B_6^{(h)}\mu^{\text{vi}}$$

und

$$\text{XXIV.}\quad \Delta M_k^{(h)} + \tfrac{1}{2}M_k^{(h)}\mu^{(h)} = \delta M_k^{(h)} = C^{(h,k)}\mu + C_1^{(h,k)}\mu' + \dots + C_6^{(h,k)}\mu^{\text{vi}},$$

so erhält man auf die im Vorigen angegebne Art die allgemeinen Ausdrücke

$$\text{XXV.}\quad B_i^{(h)} = M_0^{(h)2}(0, i) + M_1^{(h)2}(1, i) + \dots + M_6^{(h)2}(6, i) + (g^{(h)} - [i, i])M_i^{(h)2}$$

und

$$\text{XXVI.}\quad C_i^{(h,k)} = (m_k, m_0)_h M_0^{(h)}(0, i) + (m_k, m_1)_h M_1^{(h)}(1, i) + \dots$$
$$\dots + (m_k, m_6)_h M_6^{(h)}(6, i) + (m_k, m_i)_h M_i^{(h)}\{g^{(h)} - [i, i]\} + \tfrac{1}{2} M_k^{(h)} M_i^{(h)2}.$$

Hier ist, wenn man das Glied, das durch $g^{(h)} - g^{(h)}$ dividirt sein würde, fortläfst,

$$\text{XXVII.}\quad (m_k, m_{k'})_h = \frac{M_k M_{k'}}{g^{(h)} - g} + \frac{M'_k M'_{k'}}{g^{(h)} - g'} + \dots + \frac{M_k^{\text{vi}} M_{k'}^{\text{vi}}}{g^{(h)} - g^{\text{vi}}}.$$

Es ist ferner

$$(i, i) = 0, \qquad [i, i] = (i, 0) + (i, 1) + \dots + (i, 6),$$

und die Gröfsen (i, i') sind die oben vor dem System V. angegebnen Zahlen.

Man sieht aus dem Obigen, dafs die 392 Gröfsen $B_i^{(h)}$ und $C_i^{(h,k)}$, welche die Aufgabe zu berechnen fordert, jede durch Addition von respective 7 oder 8 Termen erhalten werden. Diese Terme selbst sind unmittelbar durch die bereits berechneten Werthe von $g^{(h)}$, $M_k^{(h)}$ und durch die 196 Hülfsgröfsen $(m_k, m_{k'})_h$ gegeben.

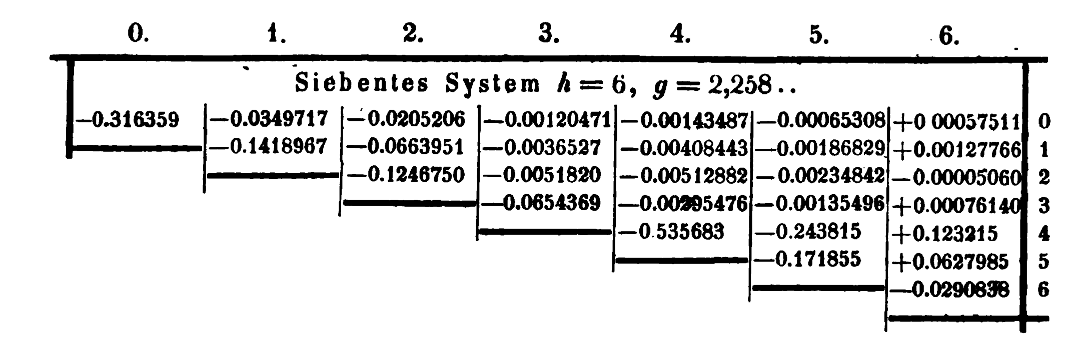
Ich lasse jetzt die Tabelle für die Werthe der Hülfsgröfsen $(m_k, m_{k'})_h$ und dann die Tabelle für die Werthe der Gröfsen $C_i^{(h,k)}$ selber folgen.

Tabelle für die Gröfsen $(m_k, m_{k'})_h$.

$(m_0, m_0)_0$	$(m_0, m_1)_0$	$(m_0, m_2)_0$	. . . .
—	$(m_1, m_1)_0$	$(m_1, m_2)_0$	. . . .
$(m_0, m_0)_1$	—	$(m_2, m_2)_0$	. . . .
$(m_1, m_0)_1$	$(m_1, m_1)_1$	—	. . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .	

(Die Tabelle ist nach dem obenstehenden Schema angeordnet; abwechselnd sind von jedem System aufser den Gröfsen der Diagonale selbst entweder nur die oberhalb und rechts oder die unterhalb und links von der Diagonale befindlichen Gröfsen angesetzt.)

	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	
	Erstes System $h = 0$, $y = 5{,}29..$							
	-0.038381	+0.0932013	+0.0816323	+0.00555445	+0.00194345	+0.00074331	-0.00052757	0
	—	-0.254815	-0.158150	-0.0095599	+0.00926369	+0.00509745	-0.00116569	1
0	+0 400512	—	-0 227941	-0 0118426	+0.00996476	+0.00551945	-0.00122876	2
1	+0.103056	-0 0202365	—	-0.0819272	+0.00362850	+0.00202784	-0.00043093	3
2	+0.0706072	+0.0689293	-0.0430341	—	+0.481014	+0.271865	-0.057300	4
3	+0.00423656	+0.0068831	+0.0013901	-0.0994045	—	+0.078887	-0.0213148	5
4	-0.0243357	+0.00135226	+0.00218915	+0.00159071	+0.190176	—	+0.341554	6
5	-0.00143356	+0.00045518	+0.00105073	+0.00103262	+0.1301316	-0.0014702	—	
6	+0.00021570	-0.00018029	-0.00023643	-0.00012470	-0.0147348	-0.0024856	+0.191003	
	Zweites System $h = 1$, $g = 7.57..$							
	Drittes System $h = 2$, $g = 17.15..$							
	+0.0856298	+0.0062117	-0.0166964	+0 0185156	+0.00000408	-0.00009422	+0.00000232	0
	—	-0.129747	+0.287524	-0.410526	-0.00001628	+0.00216940	-0.00005544	1
0	+0.0821214	—	-0.254544	+0.528834	-0.00032370	-0.00367375	+0.00010136	2
1	-0.0237752	+0.494346	—	-0.919560	+0.00161224	+0.00444043	-0.00014924	3
2	+0.0175162	-0.413029	+0.522900	—	+0.0203050	+0.1062406	-0.0033007	4
3	+0.0224095	-0.459062	+0.484098	+0.484324	—	-0.135726	+0.00327814	5
4	-0.00004716	+0.00097891	-0.00120111	-0.00043625	+0.0113278	—	+0.0673720	6
5	-0.00025452	+0.00521148	-0.00630574	-0.00679477	+0.1166629	-0.159867	—	
6	+0.00000755	-0.00015492	+0.00018770	+0.00018543	-0.0033845	+0.00374211	+0.0642776	
	Viertes System $h = 3$, $g = 17.86..$							
	Fünftes System $h = 4$, $g = 3.71..$							
	-0.597800	-0.089314	-0.057336	-0 00333806	+0.00471325	+0.00255334	-0.00025482	0
	—	-0.197562	-0.087600	-0.0062022	+0.00356312	+0.00210732	+0.00061137	1
0	+0.0593079	—	-0.167018	-0.0077934	+0.00321573	+0.00197753	+0.00089480	2
1	-0.0048745	+0.1252838	—	-0 0724343	+0.00057942	+0.00046129	+0.00063378	3
2	+0.0016626	-0.0659112	+0.1411840	—	+0 0102680	+0.0345275	+0.117865	4
3	-0.00015888	+0.0044668	-0.0148301	+0.208610	—	-0 0345415	+0.0733991	5
4	-0.00000062	-0 00004461	-0.00013197	-0.00007428	+0.0424132	—	+0.657883	6
5	- 0 00000801	+0.00017589	-0.00037614	-0.00149407	+0.0214632	+0.0108917	—	
6	+0.00000021	- 3.00000388	+0.00001077	+0.00003799	-0.00107892	+0.00041120	+0.0497284	
	Sechstes System $h = 5$, $g = 22{,}42..$							
	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	



0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	
Siebentes System $h=6$, $g=2{,}258..$							
−0.316359	−0.0349717	−0.0205206	−0.00120471	−0.00143487	−0.00065308	+0 00057511	0
	−0.1418967	−0.0663951	−0.0036527	−0.00408443	−0.00186829	+0.00127766	1
		−0.1246750	−0.0051820	−0.00512882	−0.00234842	−0.00005060	2
			−0.0654369	−0.00295476	−0.00135496	+0.00076140	3
				−0.535683	−0.243815	+0.123215	4
					−0.171855	+0.0627985	5
						−0.0290838	6

Tabelle der Coëfficienten der verschiednen μ in den Ausdrücken von $\delta M_0^{(h)} = \Delta M_0^{(h)} + \frac{1}{2} M_0^{(h)} \mu$, $\delta M_1^{(h)} = \Delta M_1^{(h)} + \frac{1}{2} M_1^{(h)} \mu'$, etc.

Angewendete Controlle: Die Summe der in Einer Zeile stehenden Coëfficienten mufs = der Hälfte des entsprechenden M sein.

	☿	♀	♁	♂	♃	♄	♅
				Erstes System.			
δM_0	$+0{,}4545\mu$	$-0{,}1514\mu'$	$+0{,}0266\mu''$	$+0{,}0048\mu'''$	$+0{,}1366\mu^{VI}$	$+0{,}0062\mu^{V}$	$+0{,}0001\mu^{VI}$
δM_1	+0,0605	+0,5222	−0,1262	−0,0107	−0,3108	−0,0146	−0,0004
δM_2	+0,0421	+0,2740	+0,1154	−0,0119	−0,3172	−0,0148	−0,0004
δM_3	+0,0027	+0,0196	+0,0033	+0,0104	−0,0290	−0,0014	+0,0000
δM_4	−0,0037	−0,0004	+0,0036	+0,0004	+0,0094	−0,0129	−0,0011
δM_5	−0,0018	−0,0008	+0,0014	+0,0001	+0,0114	−0,0124	−0,0004
δM_6	+0,0004	−0,0008	−0,0007	−0,0001	−0,0023	+0,0028	+0,0012
				Zweites System.			
$\delta M'_0$	$-0{,}2199\mu$	$-0{,}4896\mu'$	$+0{,}0861\mu''$	$+0{,}0155\mu'''$	$+0{,}4394\mu^{IV}$	$+0{,}0203\mu^{V}$	$+0{,}0005\mu^{VI}$
$\delta M'_1$	−0,0339	+0,3762	−0,2179	+0,0085	+0,2094	+0,0093	+0,0002
$\delta M'_2$	+0.0039	−0,2501	+0,5976	−0,0038	−0,0246	−0,0011	−0,0000
$\delta M'_3$	+0,0016	−0,0105	+0,0285	+0,0455	−0,0409	−0,0017	−0,0000
$\delta M'_4$	+0,0016	+0,0026	−0,0027	−0,0005	−0,0019	−0,0043	−0,0007
$\delta M'_5$	+0,0008	+0,0015	−0,0026	−0,0002	+0,0076	−0,0107	−0,0001
$\delta M'_6$	−0,0002	−0,0002	+0,0001	+0,0000	−0,0013	+0,0012	+0,0009
				Drittes System.			
$\delta M''_0$	$+0{,}0253\mu$	$-0{,}0528\mu'$	$-0{,}0381\mu''$	$-0{,}0032\mu'''$	$+0{,}0794\mu^{IV}$	$+0{,}0032\mu^{V}$	$+0{,}0001\mu^{VI}$
$\delta M''_1$	+0,0470	+1,0569	+0,6681	+0,0680	−2,0356	−0,0825	−0,0019
$\delta M''_2$	−0,0866	−1,3939	−1,0638	−0,0979	+2,8167	+0,1149	+0,0026
$\delta M''_3$	+0,1305	+2,6672	+1,9900	+0,4561	−4,7524	−0,1934	−0,0044
$\delta M''_4$	+0,000003	−0,000748	+0,00712	−0,000760	−0,001084	+0,001337	−0,000286
$\delta M''_5$	−0,00075	−0,1746	−0,01376	−0,00310	+0,03319	−0,00194	+0,00037
$\delta M''_6$	+0,00002	+0,00046	+0,00034	+0,00009	−0,00108	+0,00006	+0,00020

	☿	♀	♁	♂	♃	♄	♅
				Viertes System.			
$\delta M_0'''$	$-0{,}0213\,\mu$	$-0{,}0908\,\mu'$	$-0{,}0691\,\mu''$	$-0{,}0040\,\mu'''$	$+0{,}1697\,\mu^{IV}$	$+0{,}0070\,\mu^{V}$	$+0{,}0002\,\mu^{VI}$
$\delta M_1'''$	+0,0979	+1,9275	+1,5329	+0,0952	−3,3325	−0,1358	−0,0031
$\delta M_2'''$	−0,0883	−2,0075	−1,5504	−0,1336	+3,4071	+0,1385	+0,0031
$\delta M_3'''$	−0,0948	−1,9348	−1,4454	+0,2850	+3,4507	+0,1404	+0,0032
$\delta M_4'''$	+0,00022	+0,00481	+0,00445	−0,00011	−0,00986	+0,00037	−0,00022
$\delta M_5'''$	+0,00108	+0,02369	+0,01678	−0,00194	−0,03897	−0,00325	+0,00024
$\delta M_6'''$	−0,00003	−0,00071	−0,00054	+0,00012	+0,00103	+0,00009	+0,00013
				Fünftes System.			
δM_0^{IV}	$+0{,}00610\,\mu$	$-0{,}00665\,\mu'$	$-0{,}00334\,\mu''$	$-0{,}00013\,\mu'''$	$-0{,}00762\,\mu^{IV}$	$+0{,}01366\,\mu^{V}$	$+0{,}00105\,\mu^{VI}$
δM_1^{VI}	−0,00007	+0,00847	−0,00281	−0,00012	−0,01010	+0,00914	+0,00071
δM_2^{IV}	−0.00008	−0,00221	+0,01029	−0,00011	−0,01034	+0,00777	+0,00060
δM_3^{IV}	−0,00001	−0,00020	−0,00033	+0,00553	−0,00306	+0,00077	+0,00006
δM_4^{IV}	−0,00002	+0,00009	+0,00009	+0,00002	+0,55413	−0,10874	−0,00834
δM_5^{IV}	−0,00007	+0,00013	+0,00024	+0,00008	−0,23584	+0,46921	−0,01436
δM_6^{IV}	+0,00003	+0,00042	+0,00090	+0,00028	−0,00786	+0,07222	−0,16882
				Sechstes System.			
δM_0^{V}	$+0{,}0000586\mu$	$+0{,}0000704\mu'$	$+0{,}0000797\mu''$	$-0{,}0000054\mu'''$	$-0{,}0001570\mu^{IV}$	$-0{,}0000241\mu^{V}$	$-0{,}0000044\mu^{VI}$
δM_1^{V}	−0,000038	−0,001284	−0,001781	+0,000085	+0,002211	+0,000572	+0,000063
δM_2^{V}	+0,0000453	+0,0019986	+0,0032785	−0,0003530	−0,0037987	+0,0001901	−0,0001257
δM_3^{V}	+0,0000217	+0,0004211	+0,0020730	+0,0064524	−0,0037660	−0,0014915	−0,0005046
δM_4^{V}	−0,00000	−0,00007	−0,00015	−0,00007	+0,01602	−0,24730	+0,00569
δM_5^{V}	−0	−0,00004	−0,00010	−0,00005	+0,12280	+0,32065	+0,00219
δM_6^{V}	0	+0,000002	+0,000006	+0,000003	+0,011406	−0,003022	−0,016984
				Siebentes System.			
δM_0^{VI}	$+0{,}0004798\mu$	$-0{,}0001761\mu'$	$-0{,}0000940\mu''$	$-0{,}0000021\mu'''$	$-0{,}0001471\mu^{IV}$	$+0{,}0000428\mu^{V}$	$+0{,}0001419\mu^{VI}$
δM_1^{VI}	−0,000044	+0.001218	−0,000143	−0,000001	−0,000428	−0,000333	+0,000419
δM_2^{VI}	−0,000030	−0,000280	+0,001662	+0,000002	−0,000486	−0,000535	+0,000529
δM_3^{VI}	−0,0000021	−0,0000327	−0,0000611	+0,0009840	−0,0002600	−0,0004441	+0,0003086
δM_4^{VI}	0	−0,0004	−0,0008	−0,0002	+0,1293	−0,0958	+0,0561
δM_5^{VI}	−0,00002	−0,00015	−0,00037	−0,00011	−0,05413	+0,07293	+0,03586
δM_6^{VI}	0	+0,0001	+0,0002	+0,0001	−0,0015	+0,0151	+0,4752

9.

Zur Controlle der berechneten Werthe der Hülfsgröfsen $(m_k, m_{k'})_h$ erhält man aus XXVII. vermittelst der Gleichung $\sum_k M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} = 0$ die Formel

$$\text{XXVIII.} \qquad \sum_k M_k^{(h)} (m_k, m_{k'})_h = 0,$$

durch welche je sieben von den Gröfsen $(m_k, m_{k'})$, welche zu demselben System gehören und in derselben Vertical- oder Horizontalreihe befindlich sind, mit einander verbunden werden. Die Gröfsen $B_i^{(h)}$, $C_i^{(h,l)}$ selbst con-

trollirt man leicht durch die Formeln

$$\text{XXIX.}\quad \begin{cases} \sum\limits_i B_i^{(h)} = g^{(h)}, \\ \sum\limits_i C_i^{(h,k)} = \frac{1}{2} M_k^{(h)}. \end{cases}$$

Da, um $\Delta M_k^{(h)}$ aus $\delta M_k^{(h)}$ zu erhalten, von dem Coëfficienten $C_k^{(h,k)}$, mit welchem $\mu^{(h)}$ multiplicirt ist, die Gröfse $\frac{1}{2} M_k^{(h)}$ abzuziehen ist, so zeigen diese Formeln, *dafs in der Variation von $g^{(h)}$ die Summe der in die Variationen der Planetenmassen multiplicirten Coëfficienten der Gröfse $g^{(h)}$ selber gleich wird, und dafs die Summe der in die Variationen der Massen multiplicirten Coëfficienten in der Variation der Gröfse $M_k^{(h)}$ verschwindet.* Die Formeln XXIX. ergeben sich daraus, dafs

$$\sum_i (i', i) = [i', i'], \quad \sum_i M_i^{(h)2} = 1.$$

Man hat daher aus XXV. die Gleichung

$$\sum_i B_i^{(h)} = \sum_{i'} M_{i'}^{(h)2} \cdot g^{(h)} = g^{(h)},$$

und aus XXVI. und XXVIII.,

$$\sum_i C_i^{(h,k)} = \sum_{i'} (m_k, m_{i'})_h M_{i'}^{(h)} \cdot g^{(h)} + \frac{1}{2} M_k^{(h)} \sum_i M_i^{(h)2} = \frac{1}{2} M_k^{(h)},$$

wie zu beweisen ist. Aus der letzten Gleichung sieht man, dafs durch die zweite der Gleichungen XXIX. zugleich die Controlle der für die Gröfsen $(m_k, m_{k'})_h$ gefundnen Werthe gegeben wird.

Zur Controlle der für die Gröfsen $C_i^{(h,k)}$ berechneten Werthe kann man auch noch die Gleichungen

$$\text{XXX.}\quad \sum_k M_k^{(h)} C_i^{(h,k)} = \frac{1}{2} M_i^{(h)2},$$

$$\text{XXXI.}\quad \sum_h M_k^{(h)} C_i^{(h,k)} = 0$$

anwenden, in deren letztrer, wenn $i = k$, für 0 rechter Hand $\frac{1}{2}$ gesetzt werden mufs. Substituirt man den für $C_i^{(h,k)}$ gegebnen Ausdruck XXVI., so ergiebt sich die erste dieser Gleichungen aus XXVIII. Die zweite folgt durch Substitution des für $C_i^{(h,k)}$ gegebenen Ausdrucks vermittelst der Gleichungen

$$\text{XXXII.}\quad \sum_h M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} (m_k, m_{k'})_h = 0,$$

$$\text{XXXIII.}\quad \sum_h g^{(h)} M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} (m_k, m_{k'})_h = -\frac{1}{2} \sum_h M_k^{(h)2} M_{k'}^{(h)2}.$$

Die erste dieser Formeln ergiebt sich daraus, dafs wenn man den Werth

$$(m_k, m_{k'})_h = \sum_{h'} \frac{M_k^{(h')} M_{k'}^{(h')}}{g^{(h)} - g^{(h')}}$$

substituirt, wo h' nur die sechs von h verschiedenen Werthe annehmen darf, sich in der Doppelsumme je zwei durch $g^{(h)}-g^{(h')}$ und $g^{(h')}-g^{(h)}$ dividirte Terme gegenseitig aufheben. Um die Formel XXXIII. zu beweisen, bemerke ich, dafs die dortige Summe gleich wird der Doppelsumme

$$\sum_{h,h'} \frac{g^{(h)} M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} \cdot M_k^{(h')} M_{k'}^{(h')}}{g^{(h)}-g^{(h')}},$$

welche sich auf die Doppelsumme

$$\sum_{h,h'} M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} \cdot M_k^{(h')} M_{k'}^{(h')}$$

reducirt, wenn man in letztrer die Combination $h=h'$ wieder ausschliefst und jede Combination verschiedner Werthe von h und h' nur einmal nimmt. Giebt man jedem der Accente h und h' *alle* Werthe von 0 bis 6, so dafs man h und h' auch dieselben Werthe annehmen läfst, so mufs man für die vorstehende Doppelsumme den folgenden Ausdruck setzen:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{h,h'} M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} \cdot M_k^{(h')} M_{k'}^{(h')} - \tfrac{1}{2}\sum_h M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} . M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\Big(\sum_h M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)}\Big)^2 - \tfrac{1}{2}\sum_h M_k^{(h)2} M_{k'}^{(h)2},$$

welcher sich, wenn k und k' verschieden sind, auf die in der Formel XXXIII. angegebene Gröfse

$$-\tfrac{1}{2}\sum_h M_k^{(h)2} M_{k'}^{(h)2}$$

reducirt. Die vorstehende Gleichung zeigt aufserdem, *dafs man, wenn $k'=k$, in* XXXIII. *zu dem Ausdrucke rechts die Gröfse $\tfrac{1}{2}$ zu addiren hat.*

Man hat noch, wenn h und h'', k und k'' von einander verschieden sind, die Formeln:

$$\text{XXXIV.}\qquad \sum_k \{M_k^{(h'')} C_i^{(h,k)} + M_k^{(h)} C_i^{(h'',k)}\} = M_i^{(h)} M_i^{(h'')},$$

$$\text{XXXV.}\qquad \sum_h \{M_{k''}^{(h)} C_i^{(h,k)} + M_k^{(h)} C_i^{(h,k'')}\} = 0.$$

Um die erste dieser Formeln zu beweisen, mufs man die Gleichung

$$\text{XXXVI.}\qquad \sum_k M_k^{(h'')} \{m_k, m_{k'}\}_h = \frac{M_{k'}^{(h'')}}{g^{(h)}-g^{(h'')}}$$

zu Hülfe nehmen, welche man durch Substitution von XXVII. leicht erhält. Zum Beweise der Formel XXXV. dienen die Gleichungen

$$\text{XXXVII.}\left\{\begin{array}{l} \sum_h \{M_{k''}^{(h)} M_{k'}^{(h)} (m_k, m_{k'})_h + M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} (m_{k''}, m_{k'})_h\} = 0, \\ \sum_h g^h \{M_{k''}^{(h)} M_i^{(h)} (m_k, m_i)_h + M_k^{(h)} M_i^{(h)} (m_{k''}, m_i)_h\} = -\sum_h \cdot M_k^{(h)} M_{k''}^{(h)} \cdot M_{k'}^{(h)}; \end{array}\right.$$

welche man ähnlich wie XXXII. und XXXIII. findet.

Die Gleichungen XXIX. ergeben sich auch aus der Betrachtung, dafs wenn sich in dem System der Gleichungen VIII. sämmtliche Zahlencoëfficienten in dem gleichen Verhältnisse ändern, die Wurzeln g sich in demselben Verhältnisse ändern, die Werthe der Unbekannten $M_k^{(h)}$ aber ungeändert bleiben werden. Hieraus kann man zufolge der §. 5. gemachten Bemerkung schliefsen, dafs, wenn in den Ausdrücken für $\Delta g^{(h)}$ und $\Delta M_k^{(h)}$ die Variationen $\mu = \mu' \ldots\ldots = \mu^{\text{vi}} = 1$ gesetzt werden, sich $\Delta g^{(k)}$ in $g^{(h)}$ verwandeln und $\Delta M_k^{(h)}$ verschwinden mufs, woraus die angeführten Gleichungen von selber folgen. Ebenso ergeben sich die Gleichungen XXX., XXXI., XXXIV., XXXV. a priori daraus, dafs

$$\sum_k M_k^{(h)2} \quad = 1, \quad \sum_h M_k^{(h)2} \quad = 1,$$
$$\sum_k M_k^{(h)} M_k^{(h'')} = 0, \quad \sum_h M_k^{(h)} M_{k''}^{(h)} = 0,$$

und daher die Variationen dieser Summen,

$$\sum_k \cdot M_k^{(h)} \Delta M_k^{(h)}, \quad \sum_h \cdot M_k^{(h)} \Delta M_k^{(h)},$$
$$\sum_k \{M_k^{(h)} \cdot \Delta M_k^{(h'')} + M_k^{(h'')} \cdot \Delta M_k^{(h)}\}, \quad \sum_h \{M_k^{(h)} \cdot \Delta M_{k''}^{(h)} + M_{k''}^{(h)} \cdot \Delta M_k^{(h)}\}$$

verschwinden müssen.

10.

Zur leichtern Vergleichung mit den von Herrn *Leverrier* gefundnen Resultaten sollen noch aus den gefundnen Zahlenwerthen die Coëfficienten in den Variationen der Verhältnisse der Gröfsen N abgeleitet werden. Man gelangt zu denselben vermittelst der Formel

$$\frac{N_i}{N_k} = \frac{M_i}{M_k} \sqrt{\frac{m^{(k)} \sqrt{a_k}}{m^{(i)} \sqrt{a_i}}},$$

woraus

$$\Delta \frac{N_i}{N_k} = \frac{N_i}{N_k} \left\{ \frac{\Delta M_i}{M_i} - \frac{\Delta M_k}{M_k} - \tfrac{1}{2}(\mu^{(i)} - \mu^{(k)}) \right\}$$
$$= \frac{N_i}{N_k} \left\{ \frac{\delta M_i}{M_i} - \frac{\delta M_k}{M_k} - (\mu^{(i)} - \mu^{(k)}) \right\}.$$

Führt man aus XXII. die Werthe der Gröfsen δM ein, so hebt sich der mit Q multiplicirte Term fort. Man kann daher, wenn man, wie hier, blofs $\frac{\delta M_i}{M_i} - \frac{\delta M_k}{M_k}$ braucht, in den Werthen XXVI. der Gröfsen C den *achten* Term fortlassen. Auch bei den Variationen von $\frac{N_i}{N_k}$ findet der Satz Statt, *dafs die Summe der Coëfficienten der Variationen der Planetenmassen verschwindet,* welcher eine

schliefsliche Controlle über alle gemachten Rechnungen giebt. Um zu sehen, wie weit diese Controlle erfüllt wird, habe ich in der letzten Columne die Summe der in jeder Horizontalreihe enthaltnen Coëfficienten der μ, μ' etc., welche in den absolut strengen Werthen verschwinden soll, in Einheiten der letzten Decimalstelle hinzugefügt.

Zusammenstellung der sieben Systeme Auflösungen der Gleichungen V. nebst den Variationen der Werthe der Unbekannten für eine Änderung der Planetenmassen in dem Verhältnisse $1:1+\mu^{(h)}$.

Bezeichnung der Unbekannten.	Ihr numerischer Werth für die angenommenen Massen.	Coëfficienten der verschiednen μ in dem Ausdrucke ihrer Variation.							
		μ	μ'	μ''	μ'''	μ^{IV}	μ^{V}	μ^{VI}	
		Erstes System.							
g	5,2988733	−0,1635	+2,4341	+0,9768	+0,0389	+1,9184	+0,0920	+0,0022	
$\frac{N_0}{N_3}$	+103,29933	−78,8504	−200,8713	−28,2320	+6,3283	+287,4875	+13,7627	+0,3828	+76
$\frac{N_1}{N_3}$	+10,200668	+0,1261	−6,2507	−8,4272	+0,1210	+13,7368	+0,6731	+0,0209	0
$\frac{N_2}{N_3}$	+6,416474	+0,0039	−1,3578	−4,0906	−0,0786	+5,2484	+0,2664	+0,0092	+9
$\frac{N_4}{N_3}$	−0,0121377.56	−0,0019	+0,0212	+0,0084	−0,0002	−0,0075	−0,0186	−0,0015	−1
$\frac{N_5}{N_3}$	−0,0106745.14	−0,0013	+0,0169	+0,0066	−0,0003	−0,0046	−0,0165	−0,0009	−1
$\frac{N_6}{N_3}$	+0,0042589.93	+0,0007	−0,0105	−0,0041	−0,0000	+0,0018	+0,0115	+0,0004	−2
		Zweites System.							
g'	7,5747191	+0,4451	+0,3000	+1,2452	+0,1565	+5,1805	+0,2416	+0,0058	
$\frac{N'_0}{N'_3}$	−7,8168589	+2,2665	−14,7849	+7,2402	+0,5134	+4,5186	+0,2409	+0,0053	0
$\frac{N'_1}{N'_3}$	+7,3129033	−0,6047	−1,6959	−6,9033	−0,0089	+8,8286	+0,3747	+0,0093	−2
$\frac{N'_2}{N'_3}$	+5,8086635	−0,1654	−0,8968	−4,1052	−0,1124	+5,0638	+0,2107	+0,0055	+2
$\frac{N'_4}{N'_3}$	−0,0036768.09	+0,0006363	−0,0000285	+0,0014652	−0,0000147	−0,0002942	−0,0015458	−0,0002159	+24
$\frac{N'_5}{N'_3}$	−0,0038477.59	+0,0005197	−0,0001260	+0,0011321	−0,0000661	+0,0003481	−0,0017259	−0,0000821	−2
$\frac{N'_6}{N'_3}$	+0,0008227.714	−0,0001899	−0,0000260	−0,0004623	−0,0000136	−0,0004926	+0,0011596	+0,0000250	−2

Bezeichnung der Unbekannten	Ihr numerischer Werth für die angenommenen Daten.	Coëfficienten der verschiednen μ in dem Ausdrucke ihrer Variation. μ	μ'	μ''	μ'''	μ^{IV}	μ^{V}	μ^{VI}	
		Drittes System.							
g''	17,1525573	+0,1917	+3,6056	+4,2063	−0,0189	+8,7689	+0,3900	+0,0091	
$\frac{N_0''}{N_3''}$	+0,0561438	−0,01741	−0,36913	−0,26764	+0,00591	+0,61579	+0,02490	+0,00057	−1
$\frac{N_1''}{N_3''}$	−0,4454850	+0,13647	+3,31162	+2,04252	−0,04525	−5,22801	−0,21246	−0,00486	+3
$\frac{N_2''}{N_1''}$	+0,4034470	−0,14956	−2,79710	−2,50683	+0,02231	+5,21399	+0,21236	+0,00486	+3
$\frac{N_4''}{N_3''}$	−0,0000411.09	+0,0000092	+0,0001684	+0,0001571	−0,0000280	−0,0003189	+0,0000196	−0,0000074	0
$\frac{N_5''}{N_3''}$	−0,0002686.22	+0,0000306	+0,0005403	+0,0003745	−0,0001810	−0,0008814	+0,0001045	+0,0000125	0
$\frac{N_6''}{N_3''}$	+0,0000157.209								
		Viertes System.							
g'''	17,8632966	+0,0979	+2,2138	+3,1417	+0,2519	+11,6387	+0,5075	+0,0118	
$\frac{N_0'''}{N_3'''}$	−0,0245767	−0,00961	−0,19241	−0,14548	−0,02174	+0,35446	+0,01449	+0,00034	−1
$\frac{N_1'''}{N_3'''}$	+0,2099933	+0,08115	+1,40463	+1,25078	+0,19067	−2,81692	−0,11484	−0,00264	+3
$\frac{N_2'''}{N_3'''}$	−0,2315229	−0,07187	−1,55987	−0,95916	−0,21690	+2,69524	+0,10957	+0,09249	0
$\frac{N_4'''}{N_3'''}$	−0,0000119.17	+0,0000026	+0,0000582	+0,0000588	−0,0000096	−0,0001148	+0,0000089	−0,0000040	+1
$\frac{N_5'''}{N_3'''}$	−0,0001397.88	+0,0000153	+0,0003501	+0,0002358	−0,0001418	−0,0005319	+0,0000651	+0,0000074	0
$\frac{N_6'''}{N_3'''}$	+0,0000073.1946								
		Fünftes System.							
g^{IV}	3,7136434	+0,0001	+0,0031	+0,0067	+0,0021	+0,6602	+2,8276	+0,2137	
$\frac{N_0^{IV}}{N_6^{IV}}$	−0,8166526	+0,00440	+0,88379	+0,44205	+0,01628	+1,04609	−2,10609	−0,28651	+1
$\frac{N_1^{IV}}{N_6^{IV}}$	−0,5439845	+0,00357	+0,10098	+0,14460	+0,00548	+0,54867	−0,66862	−0,13456	+2
$\frac{N_2^{IV}}{N_6^{IV}}$	−0,5382496	+0,00334	+0,09917	+0,06898	+0,00413	+0,49005	−0,54178	−0,12388	+1
$\frac{N_3^{IV}}{N_6^{IV}}$	−0,6201246	+0,00098	+0,02120	+0,03416	−0,00056	+0,36689	−0,30473	−0,11793	+1
$\frac{N_4^{IV}}{N_6^{IV}}$	−1,4263523	−0,00017	−0,00304	−0,00635	−0,00196	+0,57698	−0,32348	−0,24197	+1
$\frac{N_5^{IV}}{N_6^{IV}}$	−1,1251482	−0,00015	−0,00263	−0,00552	−0,00170	+0,64753	−0,47272	−0,16480	+1

Bezeichnung der Unbekannten.	Ihr numerischer Werth für die angenommenen Daten.	Coëfficienten der verschiednen μ in dem Ausdrucke ihrer Variation.						
		μ	μ'	μ''	μ'''	μ^{IV}	μ^{V}	μ^{VI}
		Sechstes System.						
g^{V}	22,4273091	0	+0,0012	+0,0028	+0,0041	+17,5264	+4,5608	+0,3351
$\frac{N_0^{V}}{N_6^{V}}$	−0,0568966.3	−0,0021	−0,0709	−0,0802	+0,0054	+0,1181	+0,0259	+0,0037
$\frac{N_1^{V}}{N_6^{V}}$	+0,2141503.5	+0,0239	+0,5891	+1,1142	−0,0535	−1,2411	−0,3954	−0,0370
$\frac{N_2^{V}}{N_6^{V}}$	−1,3413225	−0,0246	+0,2553	−1,7815	+0,1916	+1,1733	+0,1326	+0,0531
$\frac{N_3^{V}}{N_6^{V}}$	−8,6001745	−0,0293	−0,5661	−2,7830	−0,0543	−0,6597	+3,5131	+0,5795
$\frac{N_4^{V}}{N_6^{V}}$	+8,8225143	+0,0002	+0,0025	+0,0058	+0,0026	−8,2775	+3,2773	−0,0111
$\frac{N_5^{V}}{N_6^{V}}$	−27,373541	+0,0004	−0,0025	−0,0056	−0,0025	−21,9435	+22,3477	−0,3939
		Siebentes System.						
g^{VI}	2,2584168	0	+0,0001	+0,0004	+0,0001	+0,9452	+1,3695	−0,0569
$\frac{N_0^{VI}}{N_6^{VI}}$	+0,0137320.0	−0,00030	−0,00493	−0,00263	−0,00006	−0,00410	+0,00099	+0,01104
$\frac{N_1^{VI}}{N_6^{VI}}$	+0,0151102.33	−0,00048	−0,00173	−0,00157	−0,00001	−0,00468	−0,00389	+0,01237
$\frac{N_2^{VI}}{N_6^{VI}}$	+0,0164237.12	−0,00029	−0,00268	−0,00057	+0,00002	−0,00462	−0,00536	+0,01350
$\frac{N_3^{VI}}{N_6^{VI}}$	+0,0231931.91	−0,00005	−0,00077	−0,00145	−0,00002	−0,00609	−0,01081	+0,01920
$\frac{N_4^{VI}}{N_6^{VI}}$	+0,0603080.14	−0,00001	−0,00013	−0,00029	−0,00009	−0,01590	−0,03378	+0,05021
$\frac{N_5^{VI}}{N_6^{VI}}$	+0,0581604.21	−0,00001	−0,00009	−0,00021	−0,00007	−0,02911	−0,01972	+0,04923

Herr *Leverrier* ist auch bei Berechnung der Variationen $\Delta\frac{N_i}{N_k}$, so wie bei Berechnung der Gröfsen $\frac{N_i}{N_k}$ selber, so verfahren, dafs er das vollständige System von *sieben* Gleichungen in zwei Systeme von *vier* und *drei* Gleichungen zerlegt, jedes mit eben so vielen Unbekannten, und bei Berechnung der Variationen der Unbekannten des ersten Systems die Variationen der drei Unbekannten des zweiten und bei Berechnung der Variationen der Unbekannten des zweiten Systems die Variationen der vier Unbekannten des ersten Systems vernachlässigt, und keine weitern Correctionen für diese Vernachlässigungen anbringt. Er variirt nämlich die Coëfficienten der für die Wurzeln g von ihm gebildeten biquadrati-

schen und cubischen Gleichung und berechnet daraus die Variationen $\varDelta g$, und dann mit diesen durch die strenge Auflösung eines Systems von respective vier und drei linearen Gleichungen die Variationen $\varDelta \frac{N_i}{N_k}$. Zur Controlle braucht auch Herr *Leverrier* den Satz, dafs in jeder Variation $\varDelta \frac{N_i}{N_k}$ die Summe der in die sieben μ multiplicirten Gröfsen verschwinden mufs. Aber diese Controlle ist bei ihm nicht, wie bei unsern strengen Formeln, entscheidend, da sie nach dem von ihm befolgten Gange der Rechnung eintreffen mufs, wie bedeutend auch der durch den Einflufs der von ihm vernachlässigten Glieder verursachte Fehler sein möge. In der That finden zwischen den Zahlencoëfficienten der vorstehenden und der von Herrn *Leverrier* gefundenen Ausdrücke der $\varDelta \frac{N_i}{N_k}$ nicht unbedeutende Unterschiede Statt, während die Werthe der g und $\frac{N_i}{N_k}$ selber eine viel bessere Übereinstimmung zeigen.

Zur Vergleichung der Genauigkeit der beiderlei Resultate sind die in μ'' multiplicirten Variationen von $\frac{N''_0}{N''_2}$, $\frac{N''_1}{N''_2}$ etc. in die Gleichungen substituirt worden, welche sich aus III. zur Bestimmung dieser Variationen ergeben *). Setzt man nämlich wieder

$$(i,i) = 0, \quad (i,0) + (i,1) + \ldots + (i,6) = [i,i]$$

so folgt aus den Gleichungen III.

$$(g'' - [0,0])\frac{N''_0}{N''_2} + \boxed{0,1}\frac{N''_1}{N''_2} + \ldots + \boxed{0,6}\frac{N''_6}{N''_2} = 0,$$

$$\boxed{1,0}\frac{N''_0}{N''_2} + (g'' - [1,1])\frac{N''_1}{N''_2} + \ldots + \boxed{1,6}\frac{N''_6}{N''_2} = 0,$$

etc.

und hieraus, wenn man die Planetenmassen variirt:

$$+\boxed{0,1}\frac{N''_1}{N''_2}\cdot\mu' + \ldots + \boxed{0,6}\frac{N''_6}{N''_2}\mu^{\text{vi}}$$
$$+(g'' - \boxed{0,0})\varDelta\frac{N''_0}{N''_2} + \boxed{0,1}\varDelta\frac{N''_1}{N''_2} + \ldots + \boxed{0,6}\varDelta\frac{N''_6}{N''_2}$$
$$+\frac{N''_0}{N''_2}\{\varDelta g'' - (0,1)\mu - \ldots - (0,6)\mu^{\text{vi}}\} = 0,$$

*) Ich habe das dritte System gewählt, weil in den Variationen desselben die Abweichungen besonders erheblich sind; so werden in dem Ausdrucke von $\varDelta \frac{N''_2}{N''_2}$ die Coëfficienten der verschiedenen μ bei *Leverrier* und nach den hier geführten Rechnungen:
—0,16284; —3,06732; —2,71193; —0,02085; 5,73826; 0,21778; 0,00690;
—0,14956; —2,79710; —2,50683; +0,02231; 5,21399; 0,21236; 0,00486.

$$\boxed{1,0}\frac{N''_0}{N''_2}\mu+\boxed{1,2}\frac{N''_2}{N''_2}\mu''+\ldots+\boxed{1,6}\frac{N''_6}{N''_2}\mu^{\text{vi}}$$

$$+\boxed{1,0}\Delta\frac{N''_0}{N''_2}+(g''-[1,1])\Delta\frac{N''_1}{N''_2}+\ldots+\boxed{1,6}\Delta\frac{N''_6}{N''_2}$$

$$+\frac{N''_1}{N''_2}\{\Delta g''-(1,0)\mu-(1,2)\mu''-\ldots-(1,6)\mu^{\text{vi}}\}=0,$$

etc.

Diese Gleichungen müssen für die in jedes einzelne μ multiplicirten Terme besonders erfüllt werden. Bezeichnet man z. B. die Coëfficienten von μ'' in $\Delta g''$ und $\Delta\frac{N''_k}{N''_2}$ mit γ und ν_k, wo $\nu_3=0$, so müssen die 7 Gröfsen γ und ν_k den 7 Gleichungen

$$\boxed{0,2}\frac{N''_2}{N''_2}+(\gamma-(0,2))\frac{N''_0}{N''_2}+(g''-[0,0])\nu_0+\boxed{0,1}\nu_1+\ldots+\boxed{0,6}\nu_6=0,$$

$$\boxed{1,2}\frac{N''_2}{N''_2}+(\gamma-(1,2))\frac{N''_1}{N''_2}+\boxed{1,0}\nu_0+(g''-[1,1])\nu_1+\ldots+\boxed{1,6}\nu_6=0,$$

etc.

genügen, von denen die dritte für die beiden ersten Terme blofs den einen $\frac{N''_2}{N''_2}\cdot\gamma$ enthalten wird. Wenn man in diese Gleichungen für die Gröfsen γ und ν_k die von Herrn *Leverrier* und die nach der hier geführten Rechnung gefundnen Zahlenwerthe substituirt, so werden die Gröfsen linker Hand, welche in den verschiednen Gleichungen verschwinden sollen,

bei *Leverrier:*

$-0{,}211$; $-0{,}195$; $-0{,}064$; $-0{,}237$; $+0{,}001$; $+0{,}001$; 0;

hier: $+0{,}0002$; $+0{,}0003$; $+0{,}0003$; $+0{,}0002$; $-0{,}0001$; $+0{,}0001$; 0.

Man sieht hieraus, mit wie viel gröfsrer Schärfe die durch Anwendung der strengen Formeln gefundnen Resultate den Gleichungen, durch welche die Correctionen bestimmt werden, Genüge leisten.

11.

Aus den Variationen der Verhältnisse der zu demselben System gehörigen N berechnet Herr *Leverrier* für jedes System die Variation einer dieser Gröfsen selber, welches um die übrigen zu finden ausreicht, und aufserdem die Variationen der 7 Winkel β (§. 5.). Man erhält aber einen mehr symmetrischen Gang der Rechnung, wenn man, ohne die Variationen der Verhältnisse der Gröfsen N einzuführen, deren Berechnung hier nur der Vergleichung der beiderlei Resultate halber an-

gestellt worden ist, die Variationen der Gröfsen N und der Winkel β unmittelbar aus den Variationen der Gröfsen M ableitet, was auf folgende Weise geschieht.

Die Formeln VI. und die am Ende des §. 5. gefundenen Formeln,

$$N_i = \frac{KM_i}{\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})}}, \quad K\sin\beta = A, \quad K\cos\beta = B,$$

ergeben

$$\text{XXXVIII.} \quad \Delta\beta = \frac{B\Delta A - A\Delta B}{K^2}, \quad \frac{\Delta K}{K} = \frac{A\Delta A + B\Delta B}{K^2},$$

$$\text{XXXIX.} \quad \Delta N_i = N_i\left\{\frac{\Delta K}{K} + \frac{\delta M_i}{M_i} - \mu^{(i)}\right\},$$

$$= N_i\frac{\Delta K}{K} + \frac{K\delta M_i}{\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})}} - N_i\mu_i,$$

wo ich wieder $\delta M_i = \Delta M_i + \frac{1}{2}M_i\mu^{(i)}$ eingeführt habe, weil die Werthe dieser Gröfsen in der oben am Schlufs von §. 8. aufgestellten Tabelle gegeben worden sind. Aus den Formeln (§. 5.)

$$A^{(i)} = HM_0^{(i)} + H'M_1^{(i)} + \ldots.$$
$$B^{(i)} = LM_0^{(i)} + L'M_1^{(i)} + \ldots.$$

folgen, da $\Delta H^{(i)} = \frac{1}{2}H^{(i)}\mu^{(i)}$, $\Delta L^{(i)} = \frac{1}{2}L^{(i)}\mu^{(i)}$, die Gleichungen

$$\Delta A^{(i)} = H\delta M_0^{(i)} + H'\delta M_1^{(i)} + \ldots.$$
$$\Delta B^{(i)} = L\delta M_0^{(i)} + L'\delta M_1^{(i)} + \ldots.$$

Setzt man daher

$$\frac{BH^{(i)} - AL^{(i)}}{K^2} = D_i, \quad \frac{AH^{(i)} + BL^{(i)}}{K^2} = F_i,$$

$$\frac{B'H^{(h)} - A'L^{(h)}}{K^2} = D_i', \quad \frac{A'H^{(h)} + B'L^{(h)}}{K^2} = F_i',$$

etc etc.,

so wird zufolge XXXVIII.

$$\Delta\beta = D_0\delta M_0 + D_1\delta M_1 + \ldots. + D_6\delta M_6,$$
$$\Delta\beta' = D_0'\delta M_0' + D_1'\delta M_1' + \ldots. + D_6'\delta M_6',$$

etc.

$$\frac{\Delta K}{K} = F_0\delta M_0 + F_1\delta M_1 + \ldots. + F_6\delta M_6,$$
$$\frac{\Delta K'}{K'} = F'\delta M_0' + F_1'\delta M_1' + \ldots. + F_6'\delta M_6',$$

etc.

Nennt man $e_0^{(i)}$ und $\varpi_0^{(i)}$ die Anfangswerthe von $e^{(i)}$ und $\varpi^{(i)}$ und setzt

$$e_0^{(i)}\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})} = E^{(i)},$$

so hat man

$$D_i = \frac{E^{(i)}}{K} \sin(\varpi_0^{(i)} - \beta), \qquad F_i = \frac{E^{(i)}}{K} \cos(\varpi_0^{(i)} - \beta),$$

$$D'_i = \frac{E^{(i)}}{K'} \sin(\varpi_0^{(i)} - \beta'), \qquad F'_i = \frac{E^{(i)}}{K'} \cos(\varpi_0^{(i)} - \beta'),$$

etc. etc.

Nach Berechnung der Gröfsen $\frac{\Delta K}{K}$ findet man durch die obige Formel XXXIX. die Variationen ΔN_i, wenn man noch die Gröfsen $\frac{K \delta M_i}{\sqrt{(m^{(i)} \sqrt{a^{(i)}})}} = \frac{N_i}{M_i} \delta M_i$ aus den für die Gröfsen δM_i gefundnen Ausdrücken bestimmt.

Da in dem Ausdrucke von $\delta M_i^{(h)}$ die Coëfficienten der einzelnen μ die Summe $\frac{1}{2} M_i^{(h)}$ haben, so erhält diese Summe in $\frac{\Delta K^{(h)}}{K^{(h)}}$ den Werth $\frac{1}{2}$ und verschwindet in den Ausdrücken von $\Delta \beta^{(h)}$ und $\Delta N_i^{(h)}$, was man auch leicht *a priori* beweiset.

Berlin, den 9ten August 1845.

6.

Sulla condizione di uguaglianza di due radici dell'equazione cubica, dalla quale dipendono gli assi principali di una superficie del second'ordine.

(Estratto dal giornale arcadico Tomo XCVIX.)

I.

La ricerca degli assi principali di una superficie del second'ordine, riviene al problema di passare da tre coordinate rettangolari x, y, z a tre nuove coordinate rettangolari p, p', p'', in guisa che l'espressione

$$Axx+Byy+Czz+2Dyz+2Ezx+2Fxy$$

sia trasformata in questa più semplice

$$Gpp+G'p'p'+G''p''p''.$$

Il sig. *Kummer* è giunto a rappresentare il valore che ha il quadrato del prodotto delle differenze delle tre quantità G, G', G'' per la somma di sette quadrati, i quali possono mettersi sotto la forma seguente

$$1.\quad\left\{\begin{aligned}&15(EF'-FE')^2+[BD'-DB'+CD'-DC'-2(AD'-DA')]^2\\&+15(FD'-DF')^2+[CE'-EC'+AE'-EA'-2(BE'-EB')]^2\\&+15(DE'-ED')^2+[AF'-FA'+BF'-FB'-2(CF'-FC')]^2\\&\qquad+[BC'-CB'+CA'-AC'+AB'-BA']^2\\&\qquad=(G'-G'')^2(G''-G)^2(G-G')^2,\end{aligned}\right.$$

ove

$$2.\quad\left\{\begin{aligned}A'&=BC-DD, & D'&=EF-AD,\\B'&=CA-EE, & E'&=FD-BE,\\C'&=AB-FF, & F'&=DE-CF.\end{aligned}\right.$$

Per meglio conoscere la natura di questo bel risultato, esprimerò la radice di ciascuno de' sette quadrati in funzione delle quantità G, G', G'' e de'coëfficienti della sostituzione

$$3.\quad \begin{cases} p = \alpha x+\beta y+\gamma z, \\ p' = \alpha' x+\beta' y+\gamma' z, \\ p'' = \alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z, \end{cases}$$

la quale determina le nuove coordinate p, p', p'' per le coordinate x, y, z. Le formule algebriche alle quali sono pervenuto in questa ricerca, forniscono una nuova dimostrazione della formula del sig. *Kummer*, e possono anche esser utili in altre occasioni.

II.

Fra i *nove* coëfficienti dell'equazioni (3.), si hanno le *ventidue* relazioni conosciute

$$4.\quad \begin{cases} \alpha\alpha+\alpha'\alpha'+\alpha''\alpha'' = 1, & \alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma = 1, \\ \beta\beta+\beta'\beta'+\beta''\beta'' = 1, & \alpha'\alpha'+\beta'\beta'+\gamma'\gamma' = 1, \\ \gamma\gamma+\gamma'\gamma'+\gamma''\gamma'' = 1, & \alpha''\alpha''+\beta''\beta''+\gamma''\gamma'' = 1; \\ \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma'' = 0, & \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'' = 0, \\ \gamma\alpha+\gamma'\alpha'+\gamma''\alpha'' = 0, & \alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma = 0, \\ \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta'' = 0, & \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma' = 0; \\ \beta'\gamma''-\beta''\gamma'=\alpha,\quad \beta''\gamma-\beta\gamma''=\alpha', & \beta\gamma'-\beta'\gamma=\alpha'', \\ \gamma'\alpha''-\gamma''\alpha'=\beta,\quad \gamma''\alpha-\gamma\alpha''=\beta', & \gamma\alpha'-\gamma'\alpha=\beta'', \\ \alpha'\beta''-\alpha''\beta'=\gamma,\quad \alpha''\beta-\alpha\beta''=\gamma', & \alpha\beta'-\alpha'\beta=\gamma''; \\ \alpha\beta'\gamma''+\alpha'\beta''\gamma+\alpha''\beta\gamma'-\alpha\beta''\gamma'-\alpha'\beta\gamma''-\alpha''\beta'\gamma=1. \end{cases}$$

Ma, per l'uopo nostro, un'altra bisogna aggiungerne un po'più nascosta. la quale si può dedurre dalle formule precedenti nel modo che segue.

Si ha

$$\begin{aligned} \alpha^2\alpha'^2\alpha''^2 &= \alpha'\alpha''(\beta''\beta+\gamma''\gamma)(\beta\beta'+\gamma\gamma') \\ &= \alpha'\alpha''\beta'\beta''\cdot\beta^2+\alpha'\alpha''\gamma'\gamma''\cdot\gamma^2+\alpha'\beta''\gamma\cdot\alpha''\beta\gamma'+\alpha'\beta\gamma''\cdot\alpha''\beta'\gamma. \end{aligned}$$

Da questa formula se ne ricavano due altre, alternando tra loro le lettere α e β, e le lettere α e γ. Sommiamo le tre formule così ottenute; poi facciamo uso della formula

$$\alpha^2\alpha'\alpha''(\beta'\beta''+\gamma'\gamma'') = -\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2,$$

e delle due simili: otterremo finalmente

$$5.\quad \begin{cases} 2[\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2+\beta^2\beta'^2\beta''^2+\gamma^2\gamma'^2\gamma''^2] \\ =\alpha'\beta''\gamma\cdot\alpha''\beta\gamma'+\alpha''\beta\gamma'\cdot\alpha\beta'\gamma''+\alpha\beta'\gamma''\cdot\alpha'\beta''\gamma \\ +\alpha'\beta\gamma''\cdot\alpha''\beta'\gamma+\alpha''\beta'\gamma\cdot\alpha\beta''\gamma'+\alpha\beta''\gamma'\cdot\alpha'\beta\gamma''. \end{cases}$$

Designerò questa quantità ne'calcoli seguenti colla lettera Γ. La quantità Γ non cangiando di valore, allorchè si alternano simultaneamente tra loro le quantità

$$\alpha' \text{ e } \beta, \quad \alpha'' \text{ e } \gamma, \quad \beta'' \text{ e } \gamma',$$

si deduce dalla formula (5.) quest'altra notabile

$$\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2+\beta^2\beta'^2\beta''^2+\gamma^2\gamma'^2\gamma''^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2+\alpha'^2\beta'^2\gamma'^2+\alpha''^2\beta''^2\gamma''^2.$$

III.

Sostituendo le formule (3.) nell'equazione

$$6.\quad Gpp+G'p'p'+G''p''p''=Axx+Byy+Czz+2Dyz+2Ezx+2Fxy,$$

trovasi

$$7.\quad \begin{cases} A=G\alpha\alpha+G'\alpha'\alpha'+G''\alpha''\alpha'', \\ B=G\beta\beta+G'\beta'\beta'+G''\beta''\beta'', \\ C=G\gamma\gamma+G'\gamma'\gamma'+G''\gamma''\gamma'', \\ D=G\beta\gamma+G'\beta'\gamma'+G''\beta''\gamma'', \\ E=G\gamma\alpha+G'\gamma'\alpha'+G''\gamma''\alpha'', \\ F=G\alpha\beta+G'\alpha'\beta'+G''\alpha''\beta''. \end{cases}$$

Questi valori, sostituiti nelle formule (2.), forniscono le seguenti

$$8.\quad \begin{cases} A'=G'G''\alpha\alpha+G''G\alpha'\alpha'+GG'\alpha''\alpha'', \\ B'=G'G''\beta\beta+G''G\beta'\beta'+GG'\beta''\beta'', \\ C'=G'G''\gamma\gamma+G''G\gamma'\gamma'+GG'\gamma''\gamma'', \\ D'=G'G''\beta\gamma+G''G\beta'\gamma'+GG'\beta''\gamma'', \\ E'=G'G''\gamma\alpha+G''G\gamma'\alpha'+GG'\gamma''\alpha'', \\ F'=G'G''\alpha\beta+G''G\alpha'\beta'+GG'\alpha''\beta''. \end{cases}$$

Combinando i due sistemi di formule (7.) e (8.), e ponendo, per maggior brevità,

$$9.\quad \begin{cases} G(G'^2-G''^2)=m, \quad G'(G''^2-G^2)=m', \quad G''(G^2-G'^2)=m'', \\ (G'-G'')(G''-G)(G-G')=m+m'+m''=M, \end{cases}$$

trovansi le nuove formule seguenti

$$10.\quad\left\{\begin{aligned} FE'-EF' &= M\alpha\alpha'\alpha'';\\ AD'-DA' &= m(\alpha'\gamma''\gamma-\alpha''\beta\beta')+m'(\alpha''\gamma\gamma'-\alpha\beta'\beta'')+m''(\alpha\gamma'\gamma''-\alpha'\beta''\beta),\\ BD'-DB' &= m\cdot\alpha\beta'\beta''+m'\cdot\alpha'\beta''\beta+m''\cdot\alpha''\beta\beta',\\ DC'-CD' &= m\cdot\alpha\gamma'\gamma''+m'\cdot\alpha'\gamma''\gamma+m''\cdot\alpha''\gamma\gamma',\\ BC'-CB' &= m\alpha(\beta'\gamma''+\beta''\gamma')+m'\alpha'(\beta''\gamma+\beta\gamma'')+m''\alpha''(\beta\gamma'+\beta'\gamma). \end{aligned}\right.$$

Per ottenere la seconda di queste cinque formule, bisogna operare qualche riduzione mercè della formula

$$\alpha'^2\beta''\gamma''-\alpha''^2\beta'\gamma' = \alpha'\gamma''(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')-\alpha''\beta'(\alpha''\gamma'-\alpha'\gamma'') = \alpha'\gamma''\gamma-\alpha''\beta\beta',$$

e delle sue simili.

Dalla seconda, terza e quarta delle formule (10.) può dedursi il valore della quantità

$$BD'-DB'+CD'-DC'-2(AD'-DA').$$

In questo valore, i termini moltiplicati per m, sono

$$\alpha\beta'\beta''+2\alpha''\beta\beta'-\alpha\gamma'\gamma''-2\alpha'\gamma''\gamma,$$

i quali, aggiungendo la quantità evanescente

$$\alpha'\beta''\beta-\alpha''\beta\beta'+\alpha'\gamma''\gamma-\alpha''\gamma\gamma' = \beta\gamma-\gamma\beta,$$

diventano i seguenti

$$\alpha\beta'\beta''+\alpha'\beta''\beta+\alpha''\beta\beta'-(\alpha\gamma'\gamma''+\alpha'\gamma''\gamma+\alpha''\gamma\gamma').$$

Questo coëfficiente di m, restando inalterato se gli accenti 0, 1, 2, si mutano rispettivamente negli accenti 1, 2, 0, *) si vede che le quantità m' ed m'' avranno il medesimo coëfficiente. Da qui la formula rimarchevole

$$\begin{aligned} 11.\quad & BD'-DB'+CD'-DC'-2(AD'-DA')\\ &= M[\alpha\beta'\beta''+\alpha'\beta''\beta+\alpha''\beta\beta'-\alpha\gamma'\gamma''-\alpha'\gamma''\gamma-\alpha''\gamma\gamma']. \end{aligned}$$

Se coll'ultima delle formule (10.) sommiamo le due altre che da essa si derivano per analogia, si troverà che ciascuna delle tre quantità m, m', m'', è moltiplicata pel medesimo coëfficiente, e che però si ha quest'altra formula rimarchevole

$$\begin{aligned} & BC'-CB'+CA'-AC'+AB'-BA'\\ &= M[\alpha\beta'\gamma''+\alpha'\beta''\gamma+\alpha''\beta\gamma'+\alpha\beta''\gamma'+\alpha'\beta\gamma''+\alpha''\beta'\gamma]. \end{aligned}$$

---

*) Le lettere senza accento ovvèro negli accenti ', '' si dicono avere gli accenti 0, 1, 2.

Formate le formule analoghe alla prima delle formule (10.) e le tre altre analoghe alla formula (11.), ecco i valori delle radici de'sette quadrati, riportati di sopra:

$$12.\quad \begin{cases} M_1 = FE' - EF' = M\cdot\alpha\alpha'\alpha'', \\ M_2 = DF' - FD' = M\cdot\beta\beta'\beta'', \\ M_3 = ED' - DE' = M\cdot\gamma\gamma'\gamma', \\ M_4 = BD' - DB' + CD' - DC' - 2(AD' - DA') \\ \quad = M(\alpha\beta'\beta'' + \alpha'\beta''\beta + \alpha''\beta\beta' - \alpha\gamma'\gamma'' - \alpha'\gamma''\gamma - \alpha''\gamma\gamma'); \\ M_5 = CE' - EC' + AE' - EA' - 2(BE' - EB') \\ \quad = M(\beta\gamma'\gamma'' + \beta'\gamma''\gamma + \beta''\gamma\gamma' - \beta\alpha'\alpha'' - \beta'\alpha''\alpha - \beta''\alpha\alpha'), \\ M_6 = AF' - FA' + BF' - FB' - 2(CF' - FC') \\ \quad = M(\gamma\alpha'\alpha'' + \gamma'\alpha''\alpha + \gamma''\alpha\alpha' - \gamma\beta'\beta'' - \gamma'\beta''\beta - \gamma''\beta\beta'), \\ M_7 = BC' - CB' + CA' - AC' + AB' - BA' \\ \quad = M(\alpha\beta'\gamma'' + \alpha'\beta''\gamma + \alpha''\beta\gamma' + \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta'\gamma. \end{cases}$$

Si vede che il valore di ciascuna delle sette quantità è uguale al prodotto della quantità

$$M = (G' - G'')(G'' - G)(G - G')$$

e di una funzione de'nove coëfficienti della sostituzione, ossia di una funzione degli angoli onde i tre assi primitivi declinano da' tre assi principali.

IV.

Formiamo il quadrato della quantità M_4. Essendo

$$\alpha\beta'\beta'' + \alpha'\beta''\beta + \alpha''\beta\beta' + \alpha\gamma'\gamma'' + \alpha'\gamma''\gamma + \alpha''\gamma\gamma' = -3\alpha\alpha'\alpha'',$$

si avrà

$$M_4^2 = 9M^2\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2 - 4M^2[\alpha\beta'\beta'' + \alpha'\beta''\beta + \alpha''\beta\beta'][\alpha\gamma'\gamma'' + \alpha'\gamma''\gamma + \alpha''\gamma\gamma'].$$

Sviluppando il prodotto, troviamo, prima le tre quantità

$$\alpha^2\beta'\beta''\gamma'\gamma'' + \alpha'^2\beta''\beta\gamma''\gamma + \alpha''^2\beta\beta'\gamma\gamma',$$

e poi la somma di sei altre designata, nel n°. II. per Γ. Dunque

$$M_4^2 = M^2(9\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2 - 4\Gamma) - 4M^2(\alpha^2\beta'\beta''\gamma'\gamma'' + \alpha'^2\beta''\beta\gamma''\gamma + \alpha''^2\beta\beta'\gamma\gamma').$$

Similmente trovasi

$$M_5^2 = M^2(9\beta^2\beta'^2\beta''^2 - 4\Gamma) - 4M^2(\beta^2\gamma'\gamma''\alpha'\alpha'' + \beta'^2\gamma''\gamma\alpha''\alpha + \beta''^2\gamma\gamma'\alpha\alpha'),$$
$$M_6^2 = M^2(9\gamma^2\gamma'^2\gamma''^2 - 4\Gamma) - 4M^2(\gamma^2\alpha'\alpha''\beta'\beta'' + \gamma'^2\alpha''\alpha\beta''\beta + \gamma''^2\alpha\alpha'\beta\beta').$$

[illegible] i tre quadrati M_4^2, M_5^2, M_6^2, rammentiamo la formula (5.)

$$F = 2(\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2 + \beta^2\beta'^2\beta''^2 + \gamma^2\gamma'^2\gamma''^2),$$

ed osserviamo che la somma de'nove termini moltiplicati per $-4M^2$, è uguale al prodotto

$$-4M^2(\alpha\beta'\gamma'' + \alpha'\beta''\gamma + \alpha''\beta\gamma')(\alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta'\gamma),$$

e però alla quantità

$$M^2 - M_7^2;$$

otteremo

$$M_4^2 + M_5^2 + M_6^2 = -15(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) + M^2 - M_7^2;$$

e quindi finalmente la formula

$$M^2 = 15(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) + M_4^2 + M_5^2 + M_6^2 + M_7^2,$$

la quale è la medesima che la (1.) proposta di sopra.

Roma, 7 marzo 1844.

7.

Neues Theorem der analytischen Mechanik.

(Aus den Monatsberichten der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1838.)

In einer Abhandlung von ***Enke*** im Berliner Jahrbuch für 1837 „über die speciellen Störungen" findet man die partiellen Differentialquotienten der Werthe, welche in der Theorie der elliptischen Bewegung eines Himmelskörpers für seine Coordinaten x, y, z und die Componenten seiner Geschwindigkeit x', y', z' erhalten werden. Die Elemente, in Bezug auf welche an dem angeführten Orte die partiellen Differentialquotienten genommen werden, sind a die halbe grofse Achse, ε der Werth der mittleren Anomalie für $t = 0$, e die Excentricität der Ellipse, ω der Winkel zwischen dem Perihel und aufsteigenden Knoten, Ω der aufsteigende Knoten der Ebene der Bahn mit der Ebene der xy, i die Neigung der Ebene der Bahn gegen dieselbe Coordinaten-Ebene. Da die Anzahl der partiell zu differentiirenden Ausdrücke, so wie die Anzahl der Gröfsen, nach welchen jeder differentiirt wird, *sechs* beträgt, so wird man im Ganzen 36 solcher partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}$ etc. haben, welche S. 305 und S. 309 der erwähnten Abhandlung übersichtlich zusammengestellt sind. Diese 36 Ausdrücke werden gebraucht, um die Coëfficienten der ***Lagrange***schen Störungsformeln zu bilden, in welchen die partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction Ω, in Bezug auf die Elemente a, ε etc. genommen, durch die Differentiale der gestörten Elemente $\frac{da}{dt}$, $\frac{d\varepsilon}{dt}$ etc. ausgedrückt werden. Man kann hieraus umgekehrt die Ausdrücke der Gröfsen $\frac{da}{dt}$, $\frac{d\varepsilon}{dt}$ etc. durch die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \Omega}{\partial a}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}$ etc. ableiten. Aber ***Poisson*** hat Störungsformeln gegeben, durch welche man direct diese Ausdrücke findet. Um in diesen letzteren Störungsformeln die Coëfficienten zu bestimmen, hat man die *sechs* Integralgleichungen der elliptischen Bewegung nach den Gröfsen a, ε etc. aufzulösen, so dafs diese Gröfsen Functionen von x, y, z, x', y', z' und von t werden, und dann diese Functionen nach x, y, z, x', y', z' partiell zu differentiiren. Man wird auf diese Weise wieder 36 Ausdrücke

$\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial a}{\partial y}$ etc. erhalten, aus welchen die Coëfficienten der *Poisson*schen Formeln zusammengesetzt sind.

Statt der Gröfsen a, ε etc. kann man beliebige, aber von einander unabhängige, sechs Combinationen derselben als Elemente einführen. Hat die Zahl k dieselbe Bedeutung wie in der angeführten Abhandlung, d. h. ist k^2 die Gröfse der anziehenden Kraft für die Einheit der Distanz, so will ich statt a die Gröfse $\frac{k^2}{2a}$, statt ε die Zeit des Periheliums $= -\frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}\cdot\varepsilon$, statt e die Quadratwurzel des halben Parameters, mit k multiplicirt, oder die Gröfse $k\sqrt{(a(1-e^2))}$, statt i die Gröfse $k\sqrt{p}.\cos i$ als Elemente einführen. Setzt man

$$\frac{k^2}{2a} = \alpha, \qquad k\sqrt{p} = \beta, \qquad k\sqrt{p}\cdot\cos i = \gamma,$$

$$-\frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}\cdot\varepsilon = \alpha', \qquad \omega = \beta', \qquad \Omega = \gamma',$$

so wird man leicht aus den Ausdrücken $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}$ etc. die partiellen Differentialquotienten von $x, y, z, x' = \frac{dx}{dt}, y' = \frac{dy}{dt}, z' = \frac{dz}{dt}$, in Bezug auf $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ genommen, oder die 36 Ausdrücke $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial x}{\partial \beta}$ etc. ableiten können. Ebenso wird man, wenn die Ausdrücke $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$ etc. bekannt sind, daraus leicht die 36 Ausdrücke $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial \beta}{\partial x}$ etc. finden. Aber wenn man diese neuen, nur wenig modificirten, Elemente wählt, und die partiellen Differentialquotienten der letztern Art mit den partiellen Differentialquotienten der erstern Art vergleicht, so wird man den merkwürdigen Satz finden, *dafs die 36 partiellen Differentialquotienten* $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial \beta}{\partial x}$ *etc. den 36 partiellen Differentialquotienten* $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial x}{\partial \beta}$ *etc. gleich oder von ihnen nur durch das Zeichen verschieden sind. In der That hat man:*

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \alpha'}{\partial x'}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \beta} = -\frac{\partial \beta'}{\partial x'}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \gamma} = -\frac{\partial \gamma'}{\partial x'},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha'} = \frac{\partial \alpha}{\partial x'}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \beta'} = \frac{\partial \beta}{\partial x'}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \gamma'} = \frac{\partial \gamma}{\partial x'},$$

$$\frac{\partial x'}{\partial \alpha} = \frac{\partial \alpha'}{\partial x}, \qquad \frac{\partial x'}{\partial \beta} = \frac{\partial \beta'}{\partial x}, \qquad \frac{\partial x'}{\partial \gamma} = \frac{\partial \gamma'}{\partial x},$$

$$\frac{\partial x'}{\partial \alpha'} = -\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \qquad \frac{\partial x'}{d \beta'} = -\frac{\partial \beta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial x'}{\partial \gamma'} = -\frac{\partial \gamma}{\partial x},$$

und ganz ähnliche Formeln, wenn man y und z für x setzt. Da α' die Zeit des Periheliums ist, so kommen in den Integralgleichungen der elliptischen Bewegung die Gröfsen t und α' nur in der Verbindung $t-\alpha'$ vor; man hat ferner zufolge des Satzes von der lebendigen Kraft:

$$\alpha = \frac{k^2}{2a} = \frac{k^2}{\sqrt{(xx+yy+zz)}} - \tfrac{1}{2}(x'x'+y'y'+z'z').$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial x'}{\partial \alpha'} = -\frac{dx'}{dt} = -\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{-k^2 x}{(xx+yy+zz)^{\frac{3}{2}}},$$

woraus man sieht, dafs die Gleichung $\frac{dx'}{d\alpha'} = -\frac{d\alpha}{dx}$ und die ähnlichen in Bezug auf y und z die *Differentialgleichungen des Problems* selber sind, die also nur besondere Formeln aus einem Systeme *ganz ähnlicher* sind, die aus den Integralgleichungen abgeleitet werden können. Es giebt eine unendliche Menge Systeme von Elementen, die man für α, β etc. wählen kann, für welche die obigen Formeln ebenfalls gelten; alle diese Systeme können aus einer allgemeinen Formel gefunden werden.

Ich habe das Beispiel der elliptischen Bewegung eines Himmelskörpers gewählt, weil in diesem das Theorem durch die bekannten Formeln ohne Schwierigkeit verificirt werden kann. Aber es ist das für dieses Beispiel aufgestellte Theorem nur ein besonderer Fall eines allgemeinen, welches für alle Probleme der Mechanik gilt, in welchen das Princip der Erhaltung der Summe der lebendigen Kräfte Statt findet, und auch aufserdem für den Fall, in welchem die Kräftefunction aufser den Coordinaten noch die Zeit t *explicite* enthält, wenn man nämlich in den *Lagrange*'schen Formeln der Dynamik *Kräftefunction* diejenige Function nennt, deren partielle Differentialquotienten, in Bezug auf die rechtwinklichten Coordinaten der Puncte des Systems genommen, die auf diese Puncte in der Richtung der Coordinatenachsen wirkenden Kräfte geben. Nach einer allgemeinen Formel, welche eine willkürliche Function involvirt, kann man immer solche Systeme von Elementen finden, für die mit den obigen ganz analoge Formeln gelten. Auch führt eine besondere Methode der Integration, welche ich an einem andern Orte mittheilen werde, schon von selber auf solches System Elemente. Wenn das System materieller Puncte ganz frei ist, so werden in allen mechanischen Problemen von der bezeichneten Gattung die dem Werthe $t=0$ entsprechenden Werthe der Coordinaten und der nach den Coordinaten-

Achsen zerlegten Geschwindigkeiten der materiellen Puncte ein derartiges System Elemente. Wenn zwischen den n Puncten irgend welche Verbindungen Statt finden, welche durch $3n-m$ Bedingungsgleichungen gegeben seien, so kann man die Position der Puncte immer durch m von einander unabhängige Gröfsen q_1, q_2, ... q_m bestimmen. Setzt man $q'_i = \frac{dq_i}{dt}$ und drückt die halbe Summe der lebendigen Kräfte T durch $q_1, q_2, \ldots q_m, q'_1, q'_2, \ldots q'_m$ aus, so werden ein System Elemente der genannten Art die dem $t=0$ entsprechenden Werthe der Gröfsen q_1, q_2 .... q_m und der Gröfsen

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q'_1},\quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q'_2},\quad \ldots\ldots\quad p_m = \frac{\partial T}{\partial q'_m}.$$

Nennt man diese Anfangswerthe $q_1^0, q_2^0, \ldots q_m^0, p_1^0, p_2^0, \ldots p_m^0$, so hat man immer:

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_x^0} = -\frac{\partial p_x^0}{\partial p_i},\quad \frac{\partial q_i}{\partial p_x^0} = \frac{\partial q_x^0}{\partial p_i},$$
$$\frac{\partial p_i}{\partial q_x^0} = \frac{\partial p_x^0}{\partial q_i},\quad \frac{\partial p_i}{\partial p_x^0} = -\frac{\partial q_x^0}{\partial q_i},$$

in welchen Formeln jeder der beiden Indices i und x alle Werthe $1, 2 \ldots m$ annehmen kann. Die partiellen Differentialquotienten links vom Gleichheitszeichen setzen voraus, dafs man in die Integralgleichungen des Problems die Gröfsen q_i^0 und p_i^0 als die willkürlichen Constanten eingeführt und diese Gleichungen dann nach den Gröfsen q_i und p_i aufgelöst hat, so dafs jede derselben eine Function von t und von den $2m$ Gröfsen q_i^0, p_i^0 wird. Umgekehrt setzen die partiellen Differentialquotienten rechts vom Gleichheitszeichen voraus, dafs man die Integralgleichungen nach den Gröfsen q_i^0, p_i^0 aufgelöst hat, so dafs jede dieser Gröfsen eine Function der Zeit t und der $2m$ Gröfsen q_i und p_i wird. Man sieht leicht, dafs man die letztern Ausdrücke aus den erstern blofs dadurch erhalten kann, dafs man q_i und q_i^0, p_i und p_i^0 mit einander vertauscht und $-t$ statt t setzt.

Für jedes System von Elementen, welches die im Vorigen erwähnte Eigenschaft besitzt, erhalten die Störungsformeln eine möglichst einfache Gestalt, indem das Differential jedes gestörten Elements einem einzigen partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction gleich wird, dessen Coëfficient nur $+1$ oder -1 ist, wie dies für die Elemente q_i^0, p_i^0 bekannt ist.

Königsberg, den 21. Nov. 1838.

8.

Über die Additionstheoreme der Abelschen Integrale zweiter und dritter Gattung.

1.

Es sei R eine gegebne ganze Function von x vom $2n$ten Grade,

$$1.\quad R = \alpha_1 x^{2n} + \alpha_2 x^{2n-1} + \alpha_3 x^{2n-2} \dots + 1;$$

V eine ganze Function von x vom $n$ten Grade, in welcher man den Coëfficient von x^n der Einheit gleich setze; ferner a eine Constante und

$$2.\quad xV^2 - a^2R = f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{2n+1})$$
$$= x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + a_2 x^{2n-1} \dots + a_{2n+1}.$$

Die in V vorkommenden Coëfficienten und die Gröfse a betrachte man als unabhängige Veränderliche, während dagegen die Coëfficienten der Function R unverändert bleiben sollen. Zwischen den ebenfalls veränderlichen $2n+1$ Wurzeln der Gleichung (2.) folgen dann aus dem Abelschen Theorem n transcendente Gleichungen, wodurch n Wurzeln als Functionen der übrigen $n+1$ bestimmt werden. Wenn nämlich m einen der Werthe $0, 1, 2, \dots n-1$ annimmt und man die Zeichen der Wurzelgröfse unter dem Integralzeichen gehörig bestimmt, so wird

$$3.\quad \int\frac{x_1^m dx_1}{\sqrt{(x_1 R(x_1))}} + \int\frac{x_2^m dx_2}{\sqrt{(x_2 R(x_2))}} \dots + \int\frac{x_{2n+1}^m dx_{2n+1}}{\sqrt{(x_{2n+1} R(x_{2n+1}))}} = 0.$$

Die Anfangs- und Endgränzen der Integrale sind die beiden Systeme der Wurzeln zweier Gleichungen von der Form (2.), in denen sich a und die Coëfficienten von V verändert haben, während die Function R ungeändert geblieben ist.

Entwickelt man den Ausdruck

$$4.\quad \Lambda = \frac{1}{\sqrt{(xR)}}\log\frac{\sqrt{(x)}.V + a\sqrt{R}}{\sqrt{(x)}.V - a\sqrt{R}}$$

nach den absteigenden Potenzen von x,

$$5.\quad \Lambda = \frac{\Lambda_0}{x^{n+1}} + \frac{\Lambda_1}{x^{n+2}} + \frac{\Lambda_2}{x^{n+3}} \text{ etc.},$$

so findet *Abel* ferner für die Werthe von m, welche $\geqq n$ sind,

$$6.\quad \int\frac{x_1^{n+i}dx_1}{\sqrt{(x_1R(x_1))}}+\int\frac{x_2^{n+i}dx_2}{\sqrt{(x_2R(x_2))}}\ldots+\int\frac{x_{2n+1}^{n+i}dx_{2n+1}}{\sqrt{(x_{2n+1}R(x_{2n+1}))}}=\Lambda_i.$$

Um die Entwicklungscoëfficienten Λ_i durch die Coëfficienten von $f(x)$ oder die Gröfsen x_1, x_2 etc. und durch die gegebnen Coëfficienten von R darzustellen, setze ich für $\sqrt{(x)}\cdot V$ vermöge (2.) den Ausdruck $\sqrt{(f(x)+a^2R)}$, wodurch man

$$7.\quad \Lambda=\frac{1}{\sqrt{(xR)}}\log\frac{\sqrt{(f(x)+a^2R)}+a\sqrt{R}}{\sqrt{(f(x)+a^2R)}-a\sqrt{R}}$$

erhält. Setzt man $y=\frac{a\sqrt{R}}{\sqrt{f(x)}}$, so wird

$$\sqrt{(xR)}\Lambda=\log\frac{\sqrt{(1+y^2)}+y}{\sqrt{(1+y^2)}-y}=2\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)}}$$
$$=2y-\frac{1}{3}y^3+\frac{3}{4\cdot5}y^5-\frac{3\cdot5}{4\cdot6\cdot7}y^7+\frac{3\cdot5\cdot7}{4\cdot6\cdot8\cdot9}y^9-\ldots$$

und daher

$$8.\quad \Lambda=\frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^a\frac{\partial a}{\sqrt{\{f(x)+a^2R\}}}=\frac{2a}{\sqrt{(xf(x))}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{a^3R}{\sqrt{x}\sqrt{f(x)^3}}+\frac{3}{4\cdot5}\cdot\frac{a^5R^2}{\sqrt{x}\sqrt{f(x)^5}}\text{ etc.}$$

Aus dieser Formel kann man zur Bestimmung von Λ_i folgende leichte Regel ableiten.

„*Man entwickle den Ausdruck* $(1+b_1z+b_2z^2\ldots+b_{2n+1}z^{2n+1})^{-\frac{1}{2}}$ *nach* „*den aufsteigenden Potenzen von* z, *setze in dem Coëfficienten von* „z^i *für* b_1, b_2 *etc. die Gröfsen* $a_1+\alpha_1$, $a_2+\alpha_2$ *etc., entwickle alle* „*Producte und Potenzen dieser Binome und multiplicire jeden Term,* „*der den Factor* $\alpha_1^{\mu_1}\alpha_2^{\mu_2}\ldots$ *enthält, noch mit* $\frac{a^{2(\mu_1+\mu_2\ldots)+1}}{2(\mu_1+\mu_2\ldots)+1}$, *so* „*wird der Ausdruck, welchen man erhält, der Werth von* $\frac{1}{2}\Lambda_i$."

Auf diese Weise findet man

$$9.\quad\begin{cases}\frac{1}{2}\Lambda_0=a,\\ \frac{1}{2}\Lambda_1=-\frac{1}{2}(a_1a+\frac{1}{3}\alpha_1a^3),\\ \frac{1}{2}\Lambda_2=-\frac{1}{2}(a_2a+\frac{1}{3}\alpha_2a^3)+\frac{3}{2\cdot4}\left(a_1^2a+2a_1\alpha_1\cdot\frac{a^3}{3}+\alpha_1^2\cdot\frac{a^5}{5}\right),\\ \frac{1}{2}\Lambda_3=-\frac{1}{2}(a_3a+\frac{1}{3}\alpha_3a^3)+\frac{3}{4}\left(a_1a_2\cdot a+(a_1\alpha_2+a_2\alpha_1)\frac{a^3}{3}+\alpha_1\alpha_2\frac{a^5}{5}\right)\\ \qquad-\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\left(a_1^3\cdot a+3a_1^2\alpha_1\cdot\frac{a^3}{3}+3a_1\alpha_1^2\cdot\frac{a^5}{5}+\alpha_1^3\cdot\frac{a^7}{7}\right),\\ \qquad\text{u. s. w.}\end{cases}$$

Man hat in diesen Formeln die auf a_{2n+1} und α_{2n+1} folgenden Gröfsen $=0$ und $\alpha_{2n+1}=1$ zu setzen. Da man aus (2.) den Werth

$$10. \quad a = \sqrt{(-a_{2n+1})} = \sqrt{(x_1 x_2 \dots x_{2n+1})}$$

findet, so giebt die erste der Formeln (9.) die einfache Gleichung

$$11. \int \frac{x_1^n dx_1}{\sqrt{(x_1 R(x_1))}} + \int \frac{x_2^n dx_2}{\sqrt{(x_2 R(x_2))}} \dots + \int \frac{x_{2n+1}^n dx_{2n+1}}{\sqrt{(x_{2n+1} R(x_{2n+1}))}} = 2\sqrt{(x_1 x_2 \dots x_{2n+1})},$$

welche für $n = 1$, wenn man die Zeichen der Quadratwurzeln unter dem Integralzeichen gehörig bestimmt, auf die bekannte Additionsformel der zweiten Gattung der elliptischen Functionen zurückkommt.

Man erhält dieselben Formeln (9.) für den allgemeineren Fall, wenn man noch einen Werth x_{2n+2} hinzunimmt und wieder

$$12. \quad \int \frac{x_1^{n+i} dx_1}{\sqrt{(x_1 R(x_1))}} + \int \frac{x_2^{n+i} dx_2}{\sqrt{(x_2 R(x_2))}} \dots + \int \frac{x_{2n+2}^{n+i} dx_{2n+2}}{\sqrt{(x_{2n+2} R(x_{2n+2}))}} = A_i$$

setzt. Die Gröfsen $a, a_1, \dots a_{2n+2}$ werden dann durch die Gleichung

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{2n+2}) = x^{2n+2} + a_1 x^{2n+1} + a_2 x^{2n+1} \dots + a_{2n+2}$$

bestimmt; der Ausdruck, dessen $(-\frac{1}{2})$te Potenz zu entwickeln ist, wird $1 + b_1 y + b_2 y^2 \dots + b_{2n+2} y^{2n+2}$. In den Formeln (9.), welche man aus der Entwicklung dieses Ausdrucks nach der oben angegebnen Regel ableitet, hat man die auf a_{2n+2} und α_{2n+1} folgenden Gröfsen a_{2n+3}, α_{2n+2} etc. $= 0$ und wieder $\alpha_{2n+1} = 1$ zu setzen. Die Gröfse a wird hier aber durch keine so einfache Formel wie (10.) bestimmt. Die Zahl dieser Gröfsen a, mit deren Hülfe man die Gröfsen A_i rational durch die Werthe x_1, x_2 etc. darstellen kann, vermehrt sich bei demselben R immer um eine, wenn die Zahl der Integrale, welche das Aggregat (6.) bilden, um zwei zunimmt.

Ich bemerke noch, dafs man für A statt des Ausdrucks (4.) eigentlich die Differenz zweier solcher Ausdrücke zu setzen hätte, welche den beiden Systemen der Anfangs- und Endgränzen der Integrale entsprechen. Es reicht aber hin in (6.) eines der Integrale und in (12.) zwei der Integrale von $x = 0$ an beginnen zu lassen, und auch in dem allgemeineren Falle, wenn man ein Aggregat von $2n + m$ Integralen betrachtet, m Integrale von der Gränze 0 an zu nehmen, weil dann immer die abzuziehende Function A verschwindet.

2.

Nach *Abel* findet man für die dritte Gattung

$$13. \int \frac{dx_1}{(\alpha - x_1)\sqrt{(x_1 R(x_1))}} + \int \frac{dx_2}{(\alpha - x_2)\sqrt{(x_2 R(x_2))}} \dots + \int \frac{dx_{2n+1}}{(\alpha - x_{2n+1})\sqrt{(x_{2n+1} R(x_{2n+1}))}} = A(\alpha),$$

wenn $\varDelta(\alpha)$ den Werth der oben (4.) definirten Function $\varDelta(x)$ für $x=\alpha$ bedeutet. Dieser Werth $\varDelta(\alpha)$ kann, wie ich im Folgenden zeigen will, durch Einführung von Gröfsen, welche von neuen transcendenten Gleichungen abhängen, eine merkwürdige Form annehmen, welche für $n=1$ das bekannte Additionstheorem der dritten Gattung der elliptischen Integrale giebt.

Man kann die Function $n$ten Grades $\frac{V}{a}$ dadurch bestimmen, dafs sie vermöge (2.) für $x=x_1, x_2, \dots x_{n+1}$ dieselben Werthe wie die gegebne Function $\sqrt{\frac{R}{x}}$ annimmt. Man bestimme jetzt zwei andre ganze Functionen von x vom $(n+1)$ten Grade, Y und Z, durch die Bedingung, dafs jede von ihnen für die Werthe $x=x_1, x_2, \dots x_{n+1}$ dieselben Werthe wie $\frac{xV}{a}$ oder wie $\sqrt{(xR(x))}$ annehmen, und aufserdem noch für $x=\alpha$ die Function Y den Werth $+\sqrt{(\alpha R(\alpha))}$, die Function Z den Werth $-\sqrt{(\alpha R(\alpha))}$ erhalten soll. Da zufolge dieser Annahme $\frac{x}{a}V-Y$ und $\frac{x}{a}V-Z$ für die Werthe $x=x_1, x_2, \dots x_{n+1}$ verschwinden müssen, so erhält man diese Functionen Y und Z sogleich durch die Formeln

$$14.\quad \begin{cases} Y = \frac{x}{a}.V - r.\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n+1})}{(\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\dots(\alpha-x_{n+1})}, \\ Z = \frac{x}{a}.V - s.\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n+1})}{(\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\dots(\alpha-x_{n+1})}, \end{cases}$$

wenn man wegen der letzten Bedingung die Constanten r und s durch die Gleichungen

$$15.\quad r=\frac{\alpha}{a}V(\alpha)-\sqrt{(\alpha R(\alpha))},\qquad s=\frac{\alpha}{a}V(\alpha)+\sqrt{(\alpha R(\alpha))}$$

bestimmt. Hier ist $V(\alpha)$ der Werth von V für $x=\alpha$ und daher zufolge (4.)

$$16.\quad \varDelta(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}}\log\frac{s}{r}.$$

Nach den gemachten Voraussetzungen müssen die beiden Ausdrücke $(2n+2)$ter Ordnung Y^2-xR, Z^2-xR durch das Product

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n+1})(x-\alpha)$$

theilbar sein. Man setze daher

$$17.\quad \begin{cases} Y^2-xR= \\ r_1(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n+1})(x-\alpha)(x-y_1)(x-y_2)\dots(x-y_n), \\ Z^2-xR= \\ s_1(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n+1})(x-\alpha)(x-z_1)(x-z_2)\dots(x-z_n). \end{cases}$$

Da die Function xR weder einen constanten Term enthält noch die Potenz x^{2n+2}, welche die höchste Potenz von x ist, welche in den Ausdrücken (17.) vorkommt, so wird man, wenn man respective in den Functionen Y und Z den Coëfficient von x^{n+1} durch den constanten Term dividirt, die Quotienten

$$(x_1 x_2 \ldots . x_{n+1} . \alpha y_1 y_2 \ldots . y_n)^{-1}, \qquad (x_1 x_2 \ldots . x_{n+1} . \alpha z_1 z_1 \ldots . z_n)^{-1}$$

erhalten. Die Werthe dieser Quotienten kann man aber auch anderseits aus den Gleichungen (14.) entnehmen, wenn man bemerkt, dafs in $\frac{x}{a} V$ der Coëfficient von x^{n+1} den Werth $\frac{1}{a}$ hat und der constante Term $=0$ ist. Durch Vergleichung der beiden Werthe, welche man auf diese Weise für jeden dieser Quotienten erhält, findet man, wenn man dieselben noch mit $x_1 x_2 \ldots . x_{n+1}$ multiplicirt,

$$18. \quad \begin{cases} (-1)^n \sqrt{\dfrac{x_1 x_2 \ldots . x_{n+1}}{\alpha y_1 y_2 \ldots . y_n}} = (\alpha - x_1)(\alpha - x_2) \ldots . (\alpha - x_{n+1}) \dfrac{1}{ar} - 1, \\ (-1)^n \sqrt{\dfrac{x_1 x_2 \ldots . x_{n+1}}{\alpha z_1 z_2 \ldots . z_n}} = (\alpha - x_1)(\alpha - x_2) \ldots . (\alpha - x_{n+1}) \dfrac{1}{as} - 1, \end{cases}$$

woraus

$$19. \quad \frac{s}{r} = \frac{\sqrt{\alpha}\, V(\alpha) + \alpha \sqrt{R(\alpha)}}{\sqrt{\alpha}\, V(\alpha) - \alpha \sqrt{R(\alpha)}} = \frac{1 + (-1)^n \sqrt{\dfrac{x_1 x_2 \ldots . x_{n+1}}{\alpha y_1 y_2 \ldots . y_n}}}{1 + (-1)^n \sqrt{\dfrac{x_1 x_2 \ldots . x_{n+1}}{\alpha z_1 z_2 \ldots . z_n}}}$$

folgt. Hieraus erhält man vermöge (13.) und (16.)

$$20. \quad \Delta(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}} \log \frac{1 + (-1)^n \sqrt{\dfrac{x_1 x_2 \ldots . x_{n+1}}{\alpha y_1 y_4 \ldots . y_n}}}{1 + (-1)^n \sqrt{\dfrac{x_1 x_2 \ldots . x_{n+1}}{\alpha z_1 z_2 \ldots . z_n}}} =$$

$$\int \frac{dx_1}{(\alpha - x_1)\sqrt{(x_1 R(x_1))}} + \int \frac{dx_2}{(\alpha - x_2)\sqrt{(x_2 R(x_2))}} \ldots + \int \frac{dx_{2n+1}}{(\alpha - x_{2n+1})\sqrt{(x_{2n+1} R(x_{2n+1}))}}.$$

Die in der vorstehenden Formel vorkommenden Hülfsgröfsen y_1, y_2 etc.; z_1, z_2 etc., welche aus x_1, x_2, ... x_{n+1}, α vermittelst der Gleichungen (17.) bestimmt werden, kann man aber auch nach dem *Abel*schen Theorem durch transcendente Gleichungen definiren und erhält dann, wenn man noch w_1, w_2, ... w_n für x_{n+2}, x_{n+3}, ... x_{2n+1} schreibt, und die diesen Variabeln entsprechenden Integrale mit entgegengesetzten Zeichen nimmt, folgendes Theorem.

Theorem.

„Aus $n+2$ gegebnen Gröfsen x_1, x_2, ... x_{n+1}, α bestimme man drei Systeme von n Gröfsen w_1, w_2, ... w_n; y_1, y_2, ... y_n;

$z_2, z_2, \ldots z_n$ *durch die drei Systemen von n transcendenten Gleichungen,*

$$\int\frac{w_1^m dw_1}{\sqrt{(w_1 R(w_1))}}+\int\frac{w_2^m dw_2}{\sqrt{(w_2 R(w_2))}}\cdots+\int\frac{w_n^m dw_n}{\sqrt{(w_n R(w_n))}}$$

$$=\int\frac{x_1^m dx_1}{\sqrt{(x_1 R(x_1))}}+\int\frac{x_2^m dx_2}{\sqrt{(x_2 R(x_2))}}\cdots+\int\frac{x_{n+1}^m dx_{n+1}}{\sqrt{(x_{n+1} R(x_{n+1}))}},$$

$$\int\frac{y_1^m dy_1}{\sqrt{(y_1 R(y_1))}}+\int\frac{y_2^m dy_2}{\sqrt{(y_2 R(y_2))}}\cdots+\int\frac{y_n^m dy_n}{\sqrt{(y_n R(y_n))}}$$

$$=\int\frac{x_1^m dx_1}{\sqrt{(x_1 R(x_1))}}+\int\frac{x_2^m dx_2}{\sqrt{(x_2 R(x_2))}}\cdots+\int\frac{x_{n+1}^m dx_{n+1}^m}{\sqrt{(x_{n+1} R(x_{n+1}))}}+\int\frac{\alpha^m d\alpha}{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}},$$

$$\int\frac{z_1^m dz_1}{\sqrt{(z_1 R(z_1))}}+\int\frac{z_2^m dz_2}{\sqrt{(z_2 R(z_2))}}\cdots+\int\frac{z_n^m dz_n}{\sqrt{(z_n R(z_n))}}$$

$$=\int\frac{x_1^m dx_1}{\sqrt{(x_1 R(x_1))}}+\int\frac{x_2^m dx_2}{\sqrt{(x_2 R(x_2))}}\cdots+\int\frac{x_{n+1}^m dx_{n+1}}{\sqrt{(x_{n+1} R(x_{n+1}))}}-\int\frac{\alpha^m d\alpha}{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}},$$

in welchen $R(x)$ eine gegebne Function von x vom $2n^{ten}$ Grade bedeutet und m jeden der n Werthe $0, 1, 2, \ldots n-1$ annehmen kann. Man erhält dann zwischen den Integralen dritter Gattung folgende Gleichung:

$$\int\frac{dw_1}{(\alpha-w_1)\sqrt{(w_1 R(w_1))}}+\int\frac{dw_2}{(\alpha-w_2)\sqrt{(w_2 R(w_2))}}\cdots+\int\frac{dw_n}{(\alpha-w_n)\sqrt{(w_n R(w_n))}}=$$

$$\int\frac{dx_1}{(\alpha-x_1)\sqrt{(x_1 R(x_1))}}+\int\frac{dx_2}{(\alpha-x_2)\sqrt{(x_2 R(x_2))}}\cdots+\int\frac{dx_{n+1}}{(\alpha-x_{n+1})\sqrt{(x_{n+1} R(x_{n+1}))}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}}\log\frac{1+(-1)^n\sqrt{\frac{x_1 x_2 \ldots x_{n+1}}{\alpha y_1 y_2 \ldots y_n}}}{1+(-1)^n\sqrt{\frac{x_1 x_2 \ldots x_{n+1}}{\alpha z_1 z_2 \ldots z_n}}}."$$

Man sieht aus diesem Theorem, dafs die Additionsformel für die dritte Gattung der *Abel*schen Integrale dieselbe Form wie bei den elliptischen Integralen annimmt. Auch in diesem Theorem, so wie in der Formel (13.), mufs man im Allgemeinen von dem logarithmischen Ausdrucke rechts vom Gleichheitszeichen einen ähnlichen, den Anfangsgränzen der Integrale entsprechenden, abziehn. Aber es reicht hin, eines der Integrale von $x=0$ an zu nehmen, weil in diesem Falle der Anfangswerth von a und mithin auch der Anfangswerth von $\Lambda(\alpha)$ verschwindet.

Berlin, den 25. August 1845.

9.

Über die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochne rationale Function.

1.

Die *Lagrangesche* Interpolationsformel, welche dazu dient, eine Reihe von n Werthen durch eine *ganze* Function $(n-1)$ten Grades darzustellen, ist von *Cauchy* durch eine Formel verallgemeinert worden, welche eine Reihe von $n+m$ Werthen durch eine *gebrochne* Function darstellt, deren Zähler und Nenner respective vom $(n-1)$ten und $m$ten Grade sind, und welche sich für $m=0$ auf die *Lagrangesche* Function selber reducirt. Sind u_0, u_1 etc. die Werthe, welche die gebrochne Function u annehmen soll, wenn x die Werthe x_0, x_1 etc. erhält, so ist der von *Cauchy* für u gegebne Ausdruck (*Analyse algébr.* S. 528),

$$u = \frac{u_0 u_1 \dots u_m \cdot \dfrac{(x-x_{m+1})(x-x_{m+2})\dots(x-x_{m+n-1})}{(x_0-x_{m+1})\dots(x_0-x_{m+n-1})\times\dots\times(x_m-x_{m+1})\dots(x_m-x_{m+n-1})} + \text{etc.}}{u_0 u_1 \dots u_{m-1} \cdot \dfrac{(x_0-x)(x_1-x)\dots(x_{m-1}-x)}{(x_0-x_m)\dots(x_0-x_{m+n-1})\times\dots\times(x_{m-1}-x_m)\dots(x_{m-1}-x_{m+n-1})} + \text{etc.}}.$$

Aus dem hingeschriebnen Term des Zählers und Nenners bildet man leicht alle übrigen, indem man im Zähler statt $0, 1, \dots m$ beliebige $m+1$ und im Nenner statt $0, 1, \dots m-1$ beliebige m von den Indices $0, 1, 2, \dots m+n-1$ setzt. Man kann diese Formel dadurch deduciren, dafs man die lineären Gleichungen, von welchen die Aufgabe abhängt, auflöst, und die Determinanten, welche man für den Zähler und Nenner von u findet, entwickelt. Aber die unentwickelten Determinanten, durch welche man auf mannichfache Art den Zähler und Nenner von u darstellen kann, werden bisweilen mit gröfserem Vortheil angewandt werden, und ich will diese verschiednen Darstellungsweisen um so eher mittheilen, als die Darstellung gegebner Werthe durch gebrochne rationale Functionen in der Theorie der *Abelschen* Transcendenten von so grofser Wichtigkeit ist.

Es sei die gesuchte Function $u = \frac{N(x)}{D(x)}$, wo $N(x)$ und $D(x)$ die ganzen Functionen vom $(n-1)$ten und $m$ten Grade bedeuten, welche ihren Zähler und Nenner bilden sollen, so hat man aus den $m+n$ lineären Gleichungen

$$N(x_0) = u_0 D(x_0), \quad N(x_1) = u_1 D(x_1), \quad \text{etc.}$$

die Verhältnisse der $m+n+1$ Coëfficienten von $N(x)$ und $D(x)$ zu bestimmen, wodurch man diese Functionen selbst, abgesehn von einem gemeinschaftlichen constanten Factor, erhält. Man kann aber auch aus diesen Gleichungen zuerst die n Coëfficienten von $N(x)$ eliminiren und dann die Verhältnisse der $m+1$ Coëfficienten von $D(x)$ aus den nach der Elimination erhaltnen Gleichungen bestimmen. Hiezu setze man

$$f(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots\dots(x-x_{m+n-1}), \qquad f'(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

und bilde für die ganzen positiven Werthe von p, welche $\leqq m-1$ sind, die Gleichungen

$$\Sigma\frac{x_i^p N(x_i)}{f'(x_i)} = \Sigma\frac{u_i x_i^p D(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Dehnt man für jeden der Werthe von p diese Summen über alle $m+n$ Werthe von x_i aus, so verschwinden nach der bekannten Theorie der Partialbrüche die Summen linker Hand vom Gleichheitszeichen, und man erhält die m Gleichungen,

$$1. \quad \Sigma\frac{u_i D(x_i)}{f'(x_i)} = 0, \quad \Sigma\frac{x_i u_i D(x_i)}{f'(x_i)} = 0, \quad \dots\dots \quad \Sigma\frac{x_i^{m-1} u_i D(x_i)}{f'(x_i)} = 0.$$

Diese m Gleichungen enthalten jetzt nur noch die $m+1$ Coëfficienten der Function $D(x)$ als Unbekannte, deren Verhältnisse aus ihnen zu bestimmen sind.

Setzt man

$$\frac{x_0^p\cdot u_0}{f'(x_0)} + \frac{x_1^p\cdot u_1}{f'(x_1)}\dots\dots + \frac{x_{m+n-1}^p\cdot u_{m+n-1}}{f'(x_{m+n-1})} = v_p,$$

und den Nenner

$$D(x) = \alpha+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2\dots\dots+\alpha_m x^m,$$

so werden die m Gleichungen (1.):

$$2. \quad \begin{cases} v_0\cdot\alpha+v_1\cdot\alpha_1+\ v_2\cdot\alpha_2\ \dots\dots+v_m\cdot\alpha_m &= 0, \\ v_1\cdot\alpha+v_2\cdot\alpha_1+\ v_3\cdot\alpha_2\ \dots\dots+v_{m+1}\cdot\alpha_m &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ v_{m-1}\cdot\alpha+v_m\cdot\alpha_1+v_{m+1}\cdot\alpha_2\dots\dots+v_{2m-1}\cdot\alpha_m &= 0, \end{cases}$$

in welchen die Coëfficienten v gegebne Gröfsen sind. Substituirt man die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Verhältnisse der Unbekannten $\alpha, \alpha_1, \dots\dots \alpha_m$ in den Ausdruck $\alpha+\alpha_1 x\dots\dots+\alpha_m x^m$, so *erhält man, abgesehn von einem constanten Factor, $D(x)$ gleich der Determinante der Gröfsen*

$$3. \quad \begin{cases} 1 & x & x^2 & \dots\dots & x^m \\ v_0 & v_1 & v_2 & \dots\dots & v_m \\ v_1 & v_2 & v_3 & \dots\dots & v_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{m-1} & v_m & v_{m+1} & \dots\dots & v_{2m-1}. \end{cases}$$

Setzt man den constanten Factor $= 1$, so erhält man für $m = 1$,

$$D(x) = v_1 - v_0 x,$$

für $m = 2$,

$$D(x) = v_1 v_3 - v_2^2 + (v_1 v_2 - v_0 v_3) x + (v_0 v_2 - v_1^2) x^2,$$

für $m = 3$,

$$\begin{aligned} D(x) = \;& v_1 v_3 v_5 + 2 v_2 v_3 v_4 - v_1 v_4^2 - v_2^2 v_5 - v_3^3 \\ &+ (v_1 v_2 v_5 + v_0 v_4^2 + v_2 v_3^2 - v_0 v_3 v_5 - v_1 v_3 v_4 - v_2^2 v_4) x \\ &+ (v_0 v_2 v_5 + v_1 v_2 v_4 + v_1 v_3^2 - v_0 v_3 v_4 - v_1^2 v_5 - v_2^2 v_3) x^2 \\ &+ (v_0 v_3^2 + v_1^2 v_4 + v_2^3 - v_0 v_2 v_4 - 2 v_1 v_2 v_3) x^3, \end{aligned}$$

u. s. w.

Der constante Term wird aus dem Coëfficienten der höchsten Potenz x^m erhalten, wenn man sämmtliche Indices um 1 erhöht und, wenn m ungerade ist, alle Zeichen ändert. Allgemeiner erhält man den Coëfficient von x^k aus dem Coëfficienten von x^{m-k}, wenn man sämmtliche Indices von $2m-1$ abzieht und, wenn m ungerade ist, alle Zeichen ändert.

Man kann für die Function $D(x)$ durch folgende Betrachtungen eine einfachere Form finden. Wenn in dem Schema der Gröfsen, aus welchen eine Determinante gebildet wird, $a_k^{(i)}$ die in der $(i+1)$ten Horizontalreihe und $(k+1)$ten Verticalreihe befindliche Gröfse bedeutet, so ändert sich nach einem bekannten Satze die Determinante nicht, wenn man für jedes $a_1^{(i)}$ setzt $a_1^{(i)} - \lambda a_0^{(i)}$, für jedes $a_2^{(i)}$ setzt $a_2^{(i)} - \lambda_1 a_1^{(i)} - \mu_1 a_0^{(i)}$, u. s. w., wo λ, λ_1, μ_1 etc. beliebige, von i unabhängige, Constanten bedeuten; oder, wie ich der Kürze wegen sagen will, die aus einem Systeme Gröfsen gebildete Determinante ändert sich nicht, wenn man von jeder Verticalreihe die vorhergehenden, mit beliebigen Constanten multiplicirt, abzieht. Das Gleiche gilt in Bezug auf die Horizontalreihen des Schemas der Gröfsen, aus denen man die Determinante bildet. Wenn man von jeder Verticalreihe blofs die unmittelbar vorhergehende, mit derselben Gröfse x multiplicirt, abzieht, so erhält man hieraus den allgemeinen Satz, *dafs die Determinanten der Gröfsen*

$$\begin{matrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ a^{(0)} & a' & a'' & \dots & a^{(p)} \\ a_1^{(0)} & a_1' & a_1'' & \dots & a_1^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{p-1}^{(0)} & a_{p-1}' & a_{p-1}'' & \dots & a_{p-1}^{(p)} \end{matrix}$$

und der Gröfsen

$$\begin{matrix} a' - a^{(0)}x & a'' - a'x & \dots & a^{(p)} - a^{(p-1)}x \\ a'_1 - a_1^{(0)}x & a''_1 - a'_1 x & \dots & a_1^{(p)} - a_1^{(p-1)}x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{p-1} - a_{p-1}^{(0)}x & a''_{p-1} - a'_{p-1}x & \dots & a_{p-1}^{(p)} - a_{p-1}^{(p-1)}x \end{matrix}$$

einander gleich sind. Transformirt man auf diese Weise die Gröfsen (3.), so erhält man, wenn

$$w_p = v_{p+1} - x v_p$$

gesetzt wird, folgenden Satz:

„*Es sei*

$$\frac{x_0^p (x_0 - x) u_0}{f'(x_0)} + \frac{x_1^p (x_1 - x) u_1}{f'(x_1)} \dots + \frac{x_{m+n-1}^p (x_{m+n-1} - x) u_{m+n-1}}{f'(x_{m+n-1})} = w_p,$$

so wird $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, gleich der Determinante der Gröfsen

$$4. \quad \begin{cases} w_0 & w_1 & \dots & w_{m-1} \\ w_1 & w_2 & \dots & w_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_{m-1} & w_m & \dots & w_{2m-2}." \end{cases}$$

Man erhält nach diesem Satz, wenn man wieder den constanten Factor $= 1$ setzt, für $m = 1$,

$$D(x) = w_0,$$

für $m = 2$,

$$D(x) = w_0 w_2 - w_1^2,$$

für $m = 3$,

$$D(x) = w_0 w_2 w_4 + 2 w_1 w_2 w_3 - w_0 w_3^2 - w_1^2 w_4 - w_2^3,$$

u. s. w.

Die *Cauchysche* Formel giebt für den Nenner einen Ausdruck, welcher aus $\frac{(n+m)(n+m-1)\dots(n+1)}{1\,.\,2\,\dots\,m}$ Gliedern besteht. Nehmen wir an, was bei dieser Untersuchung verstattet ist, dafs der Nenner nicht von höherm Grade als der Zähler ist, so wird $n \geqq m+1$, und daher die Zahl der Terme der *Cauchyschen* Formel gröfser oder so grofs als die Zahl $\frac{(2m+1)2m(2m-1)\dots(m+2)}{1\,.\,2\,\dots\,m}$, welche, so lange $m \geqq 7$, die Zahl der Terme der oben aus den Gröfsen w gebildeten Determinante, durch welche $D(x)$ dargestellt worden ist, übertrifft.

Wenn die Symmetrie der Formeln in Bezug auf die $m+n$ Werthe von x und u nicht berücksichtigt wird, so kann man die Gröfsen, aus denen die

Determinante gebildet wird, durch eine neue Transformation vereinfachen. Man setze nämlich in (4.) statt der zweiten Verticalreihe die Gröfsen

$$w_1 - x_0 w_0, \quad w_2 - x_0 w_1, \quad \dots \quad w_m - x_0 w_{m-1},$$

statt der dritten Verticalreihe die Gröfsen

$$w_2 - (x_0 + x_1) w_1 + x_0 x_1 w_0, \quad w_3 - (x_0 + x_1) w_2 + x_0 x_1 w_1, \quad \text{u. s. w.},$$

statt der vierten Verticalreihe die Gröfsen

$$w_3 - (x_0 + x_1 + x_2) w_2 + (x_1 x_2 + x_2 x_0 + x_0 x_1) w_1 - x_0 x_1 x_2 w_0, \quad \text{u. s. w. u. s. w.},$$

so erhält man folgenden Satz:

„*Es sei*

$$f_i(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{m+n-1}),$$

ferner

$$\frac{x_i^p (x_i - x) . u_i}{f_i'(x_i)} + \frac{x_{i+1}^p (x_{i+1} - x) . u_{i+1}}{f_i'(x_{i+1})} \dots + \frac{x_{m+n-1}^p (x_{m+n-1} - x) . u_{m+n-1}}{f_i'(x_{m+n-1})} = U_p^{(i)},$$

so wird $D(x)$, *abgesehn von einem constanten Factor, die Determinante der Gröfsen*

$$5. \quad \begin{cases} U_0^{(0)} & U_0' & \dots & U_0^{(m-1)} \\ U_1^{(0)} & U_1' & \dots & U_1^{(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{m-1}^{(0)} & U_{m-1}' & \dots & U_{m-1}^{(m-1)} . \end{cases}$$"

In diesem Theorem sind $U_0^{(0)}$, $U_1^{(0)}$, ... $U_{m-1}^{(0)}$ dieselben Gröfsen wie w_0, w_1, ... w_{m-1}.

Man erhält noch eine weitre Vereinfachung, wenn man auf ähnliche Art die Horizontalreihen der Gröfsen (5.) transformirt. Man setze nämlich statt der zweiten Horizontalreihe dieser Gröfsen die folgende:

$$U_1^{(0)} - x_{m-1} U_0^{(0)}, \quad U_1' - x_{m-1} U_0', \quad \dots \quad U_1^{(m-1)} - x_{m-1} U_0^{(m-1)},$$

statt der dritten die folgende:

$$U_2^{(0)} - (x_{m-1} + x_m) U_1^{(0)} + x_{m-1} x_m U_0^{(0)}, \quad U_2' - (x_{m-1} + x_m) U_1' + x_{m-1} x_m U_0', \quad \text{etc.}$$

u. s. f.; so bleibt wieder der Werth der Determinante unverändert, und man erhält jetzt folgendes Theorem:

„*Es sei*

$$f_{i,k}(x) =$$
$$(x - x_i)(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{m-2})(x - x_{m-1+k})(x - x_{m+k}) \dots (x - x_{m+n-1}),$$

ferner

$$\frac{(x_i-x)u_i}{f'_{i,k}(x_i)}+\frac{(x_{i+1}-x)u_{i+1}}{f'_{i,k}(x_{i+1})}\dots+\frac{(x_{m-2}-x)u_{m-2}}{f'_{i,k}(x_{m-2})}$$
$$+\frac{(x_{m-1+k}-x)u_{m-1+k}}{f'_{i,k}(x_{m-1+k})}+\frac{(x_{m+k}-x)u_{m+k}}{f'_{i,k}(x_{m+k})}\dots+\frac{(x_{m+n-1}-x)u_{m+n-1}}{f'_{i,k}(x_{m+n-1})}$$
$$=V_k^{(i)},$$

so wird $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, gleich der Determinante der Gröfsen

$$6.\quad\begin{cases} V_0^{(0)} & V'_0 & \dots & V_0^{(m-1)} \\ V_1^{(0)} & V'_1 & \dots & V_1^{(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{m-1}^{(0)} & V'_{m-1} & \dots & V_{m-1}^{(m-1)}.\text{“} \end{cases}$$

Hier sind $V_0^{(0)}, V'_0, \dots V_0^{(m-1)}$ dieselben Gröfsen wie $U_0^{(0)}, U'_0, \dots U_0^{(m-1)}$, und daher $V_0^{(0)}=w_0$, welche Gröfse allein unverändert geblieben ist.

Transformirt man auf ähnliche Art die letzten m Horizontalreihen der Gröfsen (3.), so erhält man folgenden Satz:

„*Es sei*

$$\frac{x_i^p u_i}{f'_i(x_i)}+\frac{x_{i+1}^p u_{i+1}}{f'_i(x_{i+1})}\dots+\frac{x_{m+n-1}^p u_{m+n-1}}{f'_i(x_{m+n-1})}=W_p^{(i)},$$

wo wieder

$$f_i(x)=(x-x_i)(x-x_{i+1})\dots(x-x_{m+n-1}),$$

so wird $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, die Determinante der Gröfsen

$$7.\quad\begin{cases} 1 & x & x^2 \dots & x^m \\ W_0^{(0)} & W_1^{(0)} & \dots & W_m^{(0)} \\ W'_0 & W'_1 & \dots & W'_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_0^{(m-1)} & W_1^{(m-1)} & \dots & W_m^{(m-1)}.\text{“} \end{cases}$$

Transformirt man aber auf ähnliche Art die Verticalreihen der Gröfsen (3.), so erhält man den Satz, *dafs $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, gleich wird der Determinante der Gröfsen*

$$8.\quad\begin{cases} 1 & x-x_0 & (x-x_0)(x-x_1) & \dots & (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{m-1}) \\ W_0^{(0)} & W'_0 & W''_0 & \dots & W_0^{(m)} \\ W_1^{(0)} & W'_1 & W''_1 & \dots & W_1^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{m-1}^{(0)} & W'_{m-1} & W''_{m-1} & \dots & W_{m-1}^{(m)}. \end{cases}$$

Endlich kann man wieder die m letzten Horizontalreihen dieser Gröfsen transformiren, und erhält dann den folgenden Satz:

„*Setzt man*

$$X_k^{(i)} = \frac{u_i}{F'_{i,k}(x_i)} + \frac{u_{i+1}}{F'_{i,k}(x_{i+1})} \dots + \frac{u_{m-1}}{F'_{i,k}(x_{m-1})}$$

$$+ \frac{u_{m+k}}{F'_{i,k}(x_{m+k})} + \frac{u_{m+k+1}}{F'_{i,k}(x_{m+k+1})} \dots + \frac{u_{m+n-1}}{F'_{i,k}(x_{m+n-1})},$$

wo wieder

$$F_{i,k}(x) = (x-x_i)(x-x_{i+1})\dots(x-x_{m-1})$$
$$(x-x_{m+k})(x-x_{m+k+1})\dots(x-x_{m+n-1}),$$

so wird $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, gleich der Determinante der Gröfsen

$$9.\quad \begin{cases} 1 & x-x_0 & (x-x_0)(x-x_1) & \dots & (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{m-1}) \\ X_0^{(0)} & X'_0 & X''_0 & \dots & X_0^{(m)} \\ X_1^{(0)} & X'_1 & X''_1 & \dots & X_1^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{m-1}^{(0)} & X'_{m-1} & X''_{m-1} & \dots & X_{m-1}^{(m)}.\text{"} \end{cases}$$

Aus diesen beiden letzten Theoremen erhält man eine nach den Gröfsen $x-x_0$, $(x-x_0)(x-x_1)$ etc. geordnete Darstellung der Function $D(x)$.

2.

Man kann auch sogleich dem System der m Gleichungen (1.) selber solche verschiedne Formen geben, die unmittelbar auf die verschiednen für $D(x)$ gefundnen Determinante führen. Man erhält nämlich verschiedne Formen des Systems der m Gleichungen (1.) durch die Betrachtung, dafs die Gleichung

$$\Sigma \frac{x_i^p u_i D(x_i)}{f'(x_i)} = \Sigma \frac{x_i^p N(x_i)}{f'(x_i)} = 0$$

nur erfordert, dafs $f(x)$ den Grad $n+p$ übersteige. Es ist daher nicht nöthig, für $f(x)$ das Product von allen $m+n$ Factoren $x-x_i$ anzunehmen, sondern man wird immer Gleichungen von der vorstehenden Form erhalten können, wofern nur die Zahl dieser Factoren die Zahl n übertrifft, wobei aber jedesmal wenn $n+k+1$ die Zahl der Factoren von $f(x)$ ist, der Exponent p nur einen der Werthe $0, 1, 2, \dots k$ annehmen darf. Die Summation mufs in allen diesen Fällen nur auf solche Werthe von x_i ausgedehnt werden, welche in den linearen

Factoren $x - x_i$ vorkommen, die man zur Bildung der Function $f(x)$ ausgewählt hat, oder solche, für welche $f(x_i) = 0$ wird, was man überall im Folgenden zum richtigen Verständnifs der Summenzeichen festzuhalten hat. Die verschiednen Annahmen, die man hiernach für $f(x)$ machen kann, ergeben eine sehr grofse Menge Gleichungen von der Form

$$10. \quad \Sigma \frac{x_i^p u_i D(x_i)}{f'(x_i)} = 0,$$

welche sämmtlich in Bezug auf die Coëfficienten von $D(x)$ lineär sind, und von denen m von einander unabhängige die Verhältnisse dieser Coëfficienten und mithin die Function $D(x)$ selbst, abgesehn von einem constanten Factor, bestimmen. Alle diese Gleichungen lassen sich aus den m Gleichungen (1.) ableiten und es werden daher alle Systeme von m von einander unabhängigen Gleichungen (10.) nur verschiedne Formen desselben Systems (1.) sein, welchen wiederum verschiedne Formen der Gröfsen, aus welchen man die der Function $D(x)$ proportionale Determinante zu bilden hat, entsprechen werden. Ich will jetzt die zwei hauptsächlichsten dieser Formen näher angeben.

1°. Man bilde m Gleichungen (10.), indem man für $f(x)$ immer nur das Product aus $n+1$ Factoren und daher $p=0$ setzt, von den $n+1$ Factoren ferner n unverändert läfst, während man für die $(n+1)$ten immer einen andern aus den m übrigen Factoren nimmt. Es sei

$$\Psi(x) = (x - x_m)(x - x_{m+1}) \dots (x - x_{m+n-1}), \qquad \frac{u_k}{\Psi'(x_k)} = s_k,$$

$$\frac{s_m x_m^p}{x_m - x_i} + \frac{s_{m+1} x_{m+1}^p}{x_{m+1} - x_i} \dots + \frac{s_{m+n-1} x_{m+n-1}^p}{x_{m+n-1} - x_i} + \frac{u_i x_i^p}{\Psi(x_i)} = t_p^{(i)},$$

so erhält man auf diese Weise, wenn man $f(x) = \Psi(x)(x - x_i)$ und für i nach und nach die Indices $0, 1, \dots m-1$ setzt, die Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
\alpha + x \cdot \alpha_1 \dots + x^m \cdot \alpha_m = D(x), \\
t_0^{(0)} \cdot \alpha + t_1^{(0)} \cdot \alpha_1 \dots + t_m^{(0)} \cdot \alpha_m = 0, \\
t_0' \cdot \alpha + t_1' \cdot \alpha_1 \dots + t_m' \cdot \alpha_m = 0, \\
\dots \dots \dots \dots \\
t_0^{(m-1)} \cdot \alpha + t_1^{(m-1)} \cdot \alpha_1 \dots + t_m^{(m-1)} \cdot \alpha_m = 0,
\end{array}$$

und daher

$$\frac{1}{\alpha} (\Sigma \pm t_1^{(0)} t_2' \dots t_m^{(m-1)}) . D(x)$$

gleich der Determinante der Gröfsen

$$11.\quad \begin{cases} 1 & x & x^2 & \dots & x^m \\ f_0^{(0)} & f_1^{(0)} & f_2^{(0)} & \dots & f_m^{(0)} \\ f_0' & f_1' & f_2' & \dots & f_m' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0^{(m-1)} & f_1^{(m-1)} & f_2^{(m-1)} & \dots & f_m^{(m-1)}. \end{cases}$$

2°. Setzt man für $f(x)$ nach und nach

$$\Psi(x).(x-x_{m-1})$$
$$\Psi(x).(x-x_{m-1})(x-x_{m-2})$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\Psi(x).(x-x_{m-1})(x-x_{m-2})\dots(x-x_0),$$

und immer $p=0$, so erhält man aus (10.) m Gleichungen, welche für $D(x)$ die aus den Gröfsen (7.) gebildete Determinante ergeben.

Andre Formen der linearen Gleichungen, durch welche die Function $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, bestimmt wird, und daher auch andre Formen der Elemente der dieser Function proportionalen Determinante erhält man, wenn man $D(x)$ auf andre Arten als nach den Potenzen von x entwickelt.

Es sei z. B.

$$12.\quad D(x) = \delta_0 + \delta_1(x-x_0) + \delta_2(x-x_0)(x-x_1)$$
$$\dots + \delta_m(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{m-1}),$$

wo δ_0, δ_1 etc. constante Coëfficienten bedeuten, so findet man,

3°. wenn man den Ausdruck (12.) in die m Gleichungen (1.) substituirt, in welchen $f(x)$ das aus allen $m+n$ Factoren gebildete Product bedeutet, $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, gleich der Determinante der Gröfsen (8.).

4°. Wenn man aus der Gleichung (10.) m Gleichungen bildet, indem man immer $p=0$ und für $f(x)$ zuerst das vollständige Product aus allen $m+n$ Factoren setzt, dann aber nach und nach die Factoren

$$x-x_m,\quad (x-x_m)(x-x_{m-1}),\quad \dots\quad (x-x_m)(x-x_{m+1})\dots(x-x_{2m-2})$$

fortläfst, und substituirt man in diesen m Gleichungen für $D(x)$ seinen Ausdruck (12.), so erhält man $D(x)$ der Determinante der Gröfsen (9.) proportional.

Wenn man $D(x)$ durch den Ausdruck (12.) darstellt, so wird man im Allgemeinen für die Coëfficienten der Unbekannten δ_0, δ_1 etc. in den m Gleichungen vereinfachte Ausdrücke dadurch erhalten, dafs man für $f(x)$ das Product

aus den m Factoren $x-x_0$, $x-x_1$, ... $x-x_{m-1}$ und aus $n-m+1$ oder einer gröfsern Zahl andern setzt, welche man beliebig aus den n übrigen Factoren $x-x_m$, $x-x_{m+1}$, ... $x-x_{m+n-1}$ auswählen kann. Es werden nämlich in dem Aggregate, welches den Coëfficient von δ_i bildet, immer die in u_0, u_1, ... u_{i-1} multiplicirten Terme verschwinden, und in jedem andern, in u_k multiplicirten, Term wird sich der Factor

$$(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{i-1})$$

fortheben.

Man kann aber auch statt der constanten Coëfficienten von $D(x)$ Functionen von x als die Unbekannten der lineären Gleichungen, durch welche man $D(x)$ bestimmen will, einführen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

5°. Es sei

$$\begin{aligned} D &= \alpha+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3 \dots + \alpha_m x^m, \\ D_1 &= \alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 x^2 \dots\dots + \alpha_m x^{m-1}, \\ D_2 &= \alpha_2+\alpha_3 x \dots\dots\dots + \alpha_m x^{m-2}, \\ &\dots\dots\dots \\ D_{m-1} &= \alpha_{m-1}+\alpha_m x, \qquad D_m = \alpha_m, \end{aligned}$$

woraus

$$\alpha=D-xD_1,\quad \alpha_1=D_1-xD_2,\quad \dots\quad \alpha_{m-1}=D_{m-1}-xD_m,\quad \alpha_m=D_m,$$

und daher

$$13.\quad D(x_i)=D+(x_i-x)D_1+x_i(x_i-x)D_2\dots+x_i^{m-1}(x_i-x)D_m$$

folgt. Setzt man

$$\Sigma\frac{x_i^p(x_i-x)u_i}{f'(x_i)}=w_p,\qquad \Sigma\frac{x_i^p u_i}{f'(x_i)}=v_p,$$

so erhält man durch Substitution des Ausdrucks (13.) in (10.), wenn $f(x)$ vom $(n+1+p)$ten oder einem höhern Grade angenommen wird,

$$14.\quad 0=v_p D+w_p D_1+w_{p+1}D_2\dots+w_{p+m-1}D_m.$$

Nimmt man beliebige m von einander unabhängige Gleichungen (14.), so hat man m lineäre Gleichungen zwischen den Unbekannten D, D_1, ... D_m, aus denen man ihre Verhältnisse bestimmen kann. Die $m+1$ partiellen Determinanten*), welche auf diese Weise den Functionen D, D_1, D_2, ... D_m proportional ge-

*) Wenn man mehr Verticalreihen als Horizontalreihen oder mehr Horizontalreihen als Verticalreihen hat, so nenne ich die Determinanten, welche dadurch, dafs man eine gleiche Zahl Horizontal- und Verticalreihen mit einander combinirt, erhalten werden, *partielle Determinanten*.

funden werden, müssen mit ihnen respective von demselben Grade sein. Denn da alle Gröfsen w in den Gleichungen (17.) lineäre Functionen von x und nur die Gröfsen v constant sind, so sind die den Unbekannten D und D_1 proportionalen Determinanten eben so wie diese selbst Functionen von x vom $m$ten und $(m-1)$ten Grade. Da ferner in unsrer Untersuchung α einen beliebigen Werth annehmen kann, so werden im Allgemeinen D und D_1 keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Wenn aber zwei ganze Functionen D und D_1, die keinen gemeinschaftlichen Factor haben, zweien anderen ganzen Functionen E und E_1 proportional und D und E von demselben Grade sind, so mufs $\frac{D}{E}=\frac{D_1}{E_1}$ eine Constante sein *). Es werden daher die Functionen D, D_1, D_2, ... D_m aus den partiellen Determinanten, denen sie vermöge der m Gleichungen (14.) proportional gefunden werden, durch Multiplication mit einer Constante erhalten und daher mit ihnen von demselben Grade sein. Es folgt hieraus, dafs sich in den Determinanten, welche den Functionen D_2, D_3, ... D_m proportional sind und deren einzelne Terme alle auf den $(m-1)$ten Grad steigen, respective die höchste, die beiden höchsten etc. oder endlich alle Potenzen von x fortheben müssen.

Nimmt man für $f(x)$ die vollständige Function vom $(m+n)$ten Grade und giebt, wie es für diesen Fall verstattet ist, dem Exponenten p die Werthe 0, 1, 2, ... $m-1$, so ergiebt sich aus den so erhaltnen m Gleichungen das Resultat, dafs $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, der aus den Gröfsen (4.) gebildeten Determinante gleich ist. Nimmt man zu den Gröfsen (4.) noch aus (3.) die Gröfsen v_0, v_1, ... v_{m-1} als $(m+1)$te Verticalreihe hinzu, so sieht man, dafs die übrigen partiellen Determinanten den Functionen niedreren Grades D_1, D_2, ... D_m proportional werden.

6°. Ich will jetzt als Unbekannte die ganzen Functionen von x annehmen, welche man, wenn man $D(x)$ hintereinander durch $x-x_0$, $x-x_1$, $x-x_2$, ... $x-x_{m-1}$ dividirt, successive als Quotienten erhält. Man findet die hierauf bezüglichen Formeln durch folgende Betrachtungen.

Das 5te Lemma des 3ten Buchs der *Newtonschen Principia* enthält bekanntlich folgenden Satz. „*Wenn* y_0, y_1, y_2 *etc. die Werthe einer Func-*

*) Wenn nämlich $DE_1-D_1E=0$, so mufs für alle Werthe von x, für welche D verschwindet, auch E verschwinden, weil D und D_1 keinen gemeinschaftlichen Factor haben; sind daher D und E von demselben Grade, so können sie nur durch einen constanten Factor verschieden sein.

tion y sind, welche den Werthen x_0, x_1, x_2 etc. der Variable x entsprechen, und man

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=y'_0,\quad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=y'_1,\quad \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=y'_2 \quad \text{etc.},$$

$$\frac{y'_1-y'_0}{x_2-x_0}=y''_0,\quad \frac{y'_2-y'_1}{x_3-x_1}=y''_1,\quad \frac{y'_3-y'_2}{x_4-x_2}=y''_2 \quad \text{etc.},$$

$$\frac{y''_1-y''_0}{x_3-x_0}=y'''_0,\quad \frac{y''_2-y''_1}{x_4-x_1}=y'''_1,\quad \frac{y''_3-y''_2}{x_5-x_2}=y'''_2 \quad \text{etc.}$$

setzt, so wird

$$y=y_0+y'_0(x-x_0)+y''_0(x-x_0)(x-x_1)+y'''_0(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \text{ etc."}$$

Ist y eine ganze rationale Function der $p$ten Ordnung, so erhält man den vollständigen Ausdruck dieser Function, wenn man ihre $p+1$ Werthe y_0, y_1, ... y_p kennt und die vorstehende Reihe bis zu dem Term

$$y_0^{(p)}(x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_{p-1})$$

fortsetzt. Allgemein kann die Formel, wie *Newton* will, zur Interpolation benutzt werden. Die Ausdrücke von y'_0, y''_0 etc. durch die gegebnen Werthe sind

$$15. \quad \begin{cases} y'_0 = \dfrac{y_0}{x_0-x_1}+\dfrac{y_1}{x_1-x_0}, \\ y''_0 = \dfrac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\dfrac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\dfrac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}, \\ \qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Setzt man in diese Formeln $y=D(x)$, betrachtet ferner $D(x)$ selbst als den ersten der gegebnen Werthe, dagegen $D(x_i)$ als den gesuchten Werth, so erhält man

$$16. \quad D(x_i)=D+D'(x_i-x)+D''(x_i-x)(x_i-x_0)+D'''(x_i-x)(x_i-x_0)(x_i-x_1) \\ \ldots.+D^{(m)}(x_i-x)(x_i-x_0)\ldots.(x_i-x_{m-2}),$$

wo D', D'', ... $D^{(m)}$ zufolge (15.) durch die folgenden Gleichungen bestimmt werden,

$$D = D(x),$$

$$D' = \frac{D(x)}{x-x_0}+\frac{D(x_0)}{x_0-x},$$

$$D'' = \frac{D(x)}{(x-x_0)(x-x_1)}+\frac{D(x_0)}{(x_0-x)(x_0-x_1)}+\frac{D(x_1)}{(x_1-x)(x_1-x_0)},$$

$$\text{etc.}$$

Diese Ausdrücke sind sämmtlich ganze Functionen von x, und man sieht aus

ihrer Zusammensetzung leicht, dafs man sie als Quotienten erhält, wenn man die erste von ihnen $D(x)$ durch die Gröfsen $x-x_0$, $(x-x_0)(x-x_1)$ etc. dividirt. Man kann dieselben auch successive bilden, indem D'' der Quotient der Division von D' durch $x-x_1$, D''' der Quotient der Division von D'' durch $x-x_2$ wird, etc. Substituirt man den Ausdruck (16.) in m von einander unabhängige Gleichungen (10.), und betrachtet darin die $m+1$ Gröfsen D, D', ... $D^{(m)}$ als Unbekannte, so kann man wieder, wie oben bei den Functionen D, D_1, D_2 etc., zeigen, dafs sie von den aus ihren Coëfficienten gebildeten partiellen Determinanten nur durch einen constanten Factor unterschieden sein können, und sich deshalb in den Determinanten, welche den $m-1$ Functionen D'', D''', ... $D^{(m)}$ proportional sind, die höchste Potenz von x, die beiden höchsten u. s. w. oder endlich alle Potenzen von x fortheben müssen.

Die Coëfficienten von D, D' etc. in den m aus (10.) erhaltnen Gleichungen vereinfachen sich, wenn $f(x)$ in (10.) den Factor $(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{m-2})$ enthält. Setzt man wieder $f_i(x) = \dfrac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})}$, so erhält man aus (10.) die Gleichung

$$17. \qquad S\cdot D + S_1\cdot D' + S_2\cdot D'' \dots + S_m\cdot D^{(m)} = 0,$$

wo

$$18. \qquad S = \Sigma\frac{u_i x_i^p}{f'(x_i)}, \quad S_1 = \Sigma\frac{u_i x_i^p(x_i-x)}{f'(x_i)}, \quad S_2 = \Sigma\frac{u_i x_i^p(x_i-x)}{f'_1(x_i)}, \quad \dots$$
$$\dots \quad S_m = \Sigma\frac{u_i x_i^p(x_i-x)}{f_{m-1}(x_i)}.$$

Nimmt man für $f(x)$ den vollständigen Ausdruck vom $(m+n)$ten Grade an und bildet die m Gleichungen, indem man nach und nach in (18.) für p seine Werthe 0, 1, 2, ... $m-1$ setzt, so erhält man aus denselben $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, gleich der Determinante der Gröfsen (5.). Bildet man aber die m Gleichungen, indem man in (18.) $p=0$ und für $f(x)$ nach und nach die Functionen

$$f(x), \quad \frac{f(x)}{x-x_{m-1}}, \quad \frac{f(x)}{(x-x_{m-1})(x-x_m)}, \quad \dots \quad \frac{f(x)}{(x-x_{m-1})(x-x_m)\dots(x-x_{2m-3})}$$

setzt, deren erste wieder die vollständige Function $(m+n)$ten Grades ist, so erhält man $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, der Determinante der Gröfsen (6.) gleich. Durch ganz ähnliche Determinanten erhält man aber auch, zufolge der vorstehenden Betrachtungen, die ganzen Functionen, welche sich als die Quotienten der Division von $D(x)$ durch $x-x_0$, $(x-x_0)(x-x_1)$ u. s. w. ergeben.

3.

Den Zähler $N(x)$ kann man, abgesehn von einem constanten Factor, unmittelbar aus dem Nenner $D(x)$ erhalten, wenn man nur für die Gröfsen u_0, u_1 etc. ihre reciproken Werthe $\frac{1}{u_0}$, $\frac{1}{u_1}$ etc. setzt, und gleichzeitig m und n in $n-1$ und $m+1$ ändert, so dafs umgekehrt der Nenner von der Ordnung $n-1$, der Zähler von der Ordnung m wird. Denn die Aufgabe, die Gröfsen u_0, u_1 etc. durch den Bruch $\frac{N(x)}{D(x)}$ darzustellen, ist dieselbe wie die Aufgabe, die Gröfsen $\frac{1}{u_0}$, $\frac{1}{u_1}$ etc. durch den Bruch $\frac{D(x)}{N(x)}$ darzustellen. Es bleibt dann noch übrig, den constanten Factor, mit welchem der Quotient der beiden so gefundnen Determinanten multiplicirt werden mufs, zu bestimmen, wozu einer der gegebnen Werthe des Bruchs hinreicht.

Da der Nenner als eine Determinante vom $m$ten Grade gefunden wurde, (wenn man den *Grad der Determinante* nach der Zahl der Horizontal- oder Verticalreihen der Gröfsen, aus denen sie gebildet ist, bestimmt,) so wird auf die angegebne Weise der Zähler als eine Determinante vom $(n-1)$ten Grade erhalten werden. Wenn daher der Grad des Zählers und Nenners sehr verschieden ist, so wird die eine Determinante von einem hohen Grade werden, während die andre von einem niedern Grade sein kann. Man wird aber aus dem Folgenden ersehen, dafs man auch immer den Zähler durch eine Determinante vom $(m+1)$ten Grade darstellen kann. Diese Darstellung wird einfacher als die obige, wenn die Grade des Zählers und Nenners um zwei oder mehr Einheiten verschieden sind und man, wie es nach der oben gemachten Bemerkung verstattet ist, die Aufgabe so stellt, dafs der Nenner vom niedrigeren Grade als der Zähler wird. Auch wird man bei dieser Darstellung der Bestimmung des hinzuzufügenden constanten Factors überhoben.

Es sei $\varphi(x)$ eine Function von x vom $n$ten oder einem höhern Grade und das Product von einer entsprechenden Anzahl der linearen Factoren $x-x_0$, $x-x_1$ etc. Man hat dann durch die bekannten Formeln der Theorie der Partialbrüche,

$$-\frac{N(x)}{\varphi(x)} = \Sigma \frac{N(x_r)}{(x_r-x)\varphi'(x_r)} = \Sigma \frac{u_r D(x_r)}{(x_r-x)\varphi'(x_r)},$$

wo man unter dem Summenzeichen für r alle diejenigen Indices $0, 1, 2, \ldots m+n-1$ zu setzen hat, für welche $\varphi(x_r)=0$ wird. Setzt man für $D(x)$

wieder $\alpha+\alpha_1 x \ldots + \alpha_m x^m$ und

$$\Sigma \frac{x_r^p u_r}{(x_r - x)\varphi'(x_r)} = T_p,$$

so giebt die vorstehende Formel:

$$-\frac{N(x)}{\varphi(x)} = \alpha T_0 + \alpha_1 T_1 \ldots + \alpha_m T_m.$$

Wenn man daher die Gröfsen α, α_1 etc. den partiellen Determinanten der Gleichungen (2.) §. 1. *gleich* setzt, oder der constante Factor, mit welchem die Determinanten multiplicirt werden müssen, überall $= 1$ angenommen wird, *so wird* $-\frac{N(x)}{\varphi(x)}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$19. \quad \begin{cases} T_0 & T_1 & \ldots & T_m \\ v_0 & v_1 & \ldots & v_m \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_{m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{m-1} & v_m & \ldots & v_{2m-1}, \end{cases}$$

wo die Gröfsen v dieselben sind wie in (3.).

Transformirt man auf dieselbe Art wie zu Ende des §. 1. die m letzten Horizontalreihen, so erhält man $-\frac{N(x)}{\varphi(x)}$ gleich der Determinante der Gröfsen

$$20. \quad \begin{cases} T_0 & T_1 & \ldots & T_m \\ W_0^{(0)} & W_1^{(0)} & \ldots & W_m^{(0)} \\ W_0' & W_1' & \ldots & W_m' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W_0^{(m-1)} & W_1^{(m-1)} & \ldots & W_m^{(m-1)}, \end{cases}$$

wo die Gröfsen W dieselben wie in (7.) sind.

Multiplicirt man in (19.) jede Verticalreihe mit x und zieht sie von der folgenden ab, *so ergiebt sich, wenn*

$$\Sigma \frac{u_r x_r^p}{\varphi'(x_r)} = S_p$$

gesetzt wird, die Function $-\frac{N(x)}{\varphi(x)}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$21. \quad \begin{cases} T_0 & S_0 & S_1 & \ldots & S_{m-1} \\ v_0 & w_0 & w_1 & \ldots & w_{m-1} \\ v_1 & w_1 & w_2 & \ldots & w_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{m-1} & w_{m-1} & w_m & \ldots & w_{2m-2}, \end{cases}$$

wo die Gröfsen w dieselben wie in (4.) sind. Der in dieser Determinante in T_0 multiplicirte Ausdruck ist der Nenner $D(x)$.

Um die Gröfsen (21.) noch weiter zu reduciren, will ich annehmen, dafs die Function $\varphi(x)$ dem Product

$$(x-x_{m-1})(x-x_m)\dots.(x-x_{m+n-2})$$

entweder gleich sei oder dieses Product als Factor enthalte. Ferner sei

$$\varphi_k(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-x_{m-1})(x-x_m)\dots.(x-x_{m+k-2})}, \qquad S_p^{(k)} = \Sigma \frac{x_r^p u_r}{\varphi_k'(x_r)},$$

wenn die Summe nur auf diejenigen Indices r erstreckt wird, für welche $\varphi_k(x_r) = 0$ wird. Wenn man jetzt auf die §. 1. angewandte Art sowohl die m letzten Horizontalreihen als die m letzten Verticalreihen der Gröfsen (21.) transformirt, *so erhält man* $-\frac{N(x)}{\varphi(x)}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$22. \quad \begin{cases} T_0 & S_0^{(0)} & S_0' & \dots. & S_0^{(m-1)} \\ W_0^{(0)} & V_0^{(0)} & V_1^{(0)} & \dots. & V_{m-1}^{(0)} \\ W_0' & V_0' & V_1' & \dots. & V_{m-1}' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W_0^{(m-1)} & V_0^{(m-1)} & V_1^{(m-1)} & \dots. & V_{m-1}^{(m-1)}, \end{cases}$$

wo die Gröfsen V dieselben wie in (6.) sind.

Es sei jetzt

$$T_p^{(k)} = \Sigma \frac{x_r^p u_r}{(x_r - x)\varphi_k'(x_r)},$$

wo immer wieder die Summation nur auf diejenigen Indices r sich erstreckt, für welche $\varphi_k(x_r) = 0$ wird. Man hat dann die Formeln,

$$(x-x_{m-1})T_p + S_p^{(0)} = T_p',$$
$$(x-x_m)T_p' + S_p' = T_p'',$$

u. s. w.

Ferner ist, wenn die Gröfsen $X_k^{(i)}$ dieselbe Bedeutung wie in (9.) haben,

$$(x-x_{m-1})W_0^{(i)} + V_0^{(i)} = X_1^{(i)},$$
$$(x-x_m)X_1^{(i)} + V_1^{(i)} = X_2^{(i)},$$

u. s. w.

Wenn man die Gröfsen der ersten Verticalreihe in (22.) sämmtlich mit $x-x_{m-1}$ multiplicirt, so wird der Werth der ganzen Determinante mit derselben Gröfse multiplicirt und daher $= -\frac{N(x)}{\varphi_1(x)}$. Addirt man nach der Multiplication zu den

Gröfsen der ersten Verticalreihe respective die unveränderten Gröfsen der zweiten Verticalreihe, so wird die erste Verticalreihe

$$T_0', \quad X_1^{(0)}, \quad X_1', \quad \dots \quad X_1^{(m-1)},$$

während sich der Werth der Determinante $-\frac{N(x)}{\varphi_1(x)}$ nicht ändert. Multiplicirt man die letztern Gröfsen mit $x-x_m$ und addirt dann respective die Gröfsen der dritten Verticalreihe, so wird die erste Verticalreihe

$$T_0'', \quad X_2^{(0)}, \quad X_2', \quad \dots \quad X_2^{(m-1)},$$

während die Determinante $-\frac{N(x)}{\varphi_2(x)}$ wird. Fährt man so fort, so erhält man den Satz, *dafs* $-\frac{N(x)}{\varphi_m(x)}$ *gleich ist der Determinante der Gröfsen*

$$23. \quad \begin{cases} T_0^{(m)} & S_0^{(0)} & S_0' & \dots & S_0^{(m-1)} \\ X_m^{(0)} & V_0^{(0)} & V_1^{(0)} & \dots & V_{m-1}^{(0)} \\ X_m' & V_0' & V_1' & \dots & V_{m-1}' \\ X_m'' & V_0'' & V_1'' & \dots & V_{m-1}'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_m^{(m-1)} & V_0^{(m-1)} & V_1^{(m-1)} & \dots & V_{m-1}^{(m-1)}. \end{cases}$$

Transformirt man die m letzten Verticalreihen in (20.) auf dieselbe Art, wie in §. 1. die Gröfsen (8.) in (9.) transformirt wurden, *so erhält man* $-\frac{N(x)}{\varphi(x)}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$24. \quad \begin{cases} T_0 & T_0' & T_0'' & \dots & T_0^{(m)} \\ X_0^{(0)} & X_1^{(0)} & X_2^{(0)} & \dots & X_m^{(0)} \\ X_0' & X_1' & X_2' & \dots & X_m' \\ X_0'' & X_1'' & X_2'' & \dots & X_m'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_0^{(m-1)} & X_1^{(m-1)} & X_2^{(m-1)} & \dots & X_m^{(m-1)}, \end{cases}$$

wo nur die erste Horizontalreihe die Variable x enthält.

Setzt man für $\varphi(x) = f(x)$ die vollständige Function $(n+m)$ten Grades und

$$R_p = \Sigma \frac{x_r^p u_r}{(x_r - x) f'(x_r)},$$

so verwandeln sich in der ersten Horizontalreihe von (19.) die Gröfsen T_p in die Gröfsen R_p. Man hat zwischen diesen und den Gröfsen

$$v_p = \Sigma \frac{x_r^p u_r}{f'(x_r)},$$

welche die übrigen Horizontalreihen in (19.) bilden, die Gleichungen

$$xR_p + v_p = R_{p+1}.$$

Wenn man daher in (19.) für die Gröfsen T_p in der ersten Horizontalreihe die Gröfsen R_p setzt und dann zu der zweiten Horizontalreihe die erste, mit x multiplicirt, addirt, so verwandelt sich die zweite Horizontalreihe in $R_1, R_2, \dots R_{m+1}$; addirt man diese, mit x multiplicirt, zur dritten Horizontalreihe, so verwandelt sich die dritte Horizontalreihe in $R_2, R_3, \dots R_{m+2}$. Fährt man auf diese Weise fort, wobei der Werth der Determinante nicht geändert wird, und wählt für den Nenner $D(x)$ die Bestimmung durch die Determinante der Gröfsen (4.), so erhält man folgenden Satz.

Theorem I.

„Es sei

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{m+n-1}),$$

$$R_p = \frac{x_0^p u_0}{(x_0 - x)f'(x_0)} + \frac{x_1^p u_1}{(x_1 - x)f'(x_1)} \dots + \frac{x_{m+n-1}^p u_{m+n-1}}{(x_{m+n-1} - x)f'(x_{m+n-1})},$$

$$w_p = \frac{x_0^p(x_0 - x)u_0}{f'(x_0)} + \frac{x_1^p(x_1 - x)u_1}{f'(x_1)} \dots + \frac{x_{m+n-1}^p(x_{m+n-1} - x)u_{m+n-1}}{f'(x_{m+n-1})},$$

so wird

$$25. \quad -\frac{1}{f(x)}\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\Sigma \pm R_0^{(0)} R_1' \dots R_m^{(m)}}{\Sigma \pm w_0^{(0)} w_1' \dots w_{m-1}^{(m-1)}},$$

wenn man nach Bildung der beiden Determinanten in jedem ihrer Terme respective $R_{\alpha+\beta}$ und $w_{\alpha+\beta}$ für $R_\alpha^{(\beta)}$ und $w_\alpha^{(\beta)}$ setzt."

Aus dem Ausdrucke, welchen in der *Lagrangeschen* Interpolationsformel der Coëfficient der höchsten Potenz der Variable erhält, bildet man nach einer einfachen Regel die gesuchte Function selbst. Sind nämlich $x_0, x_1, \dots x_p$ die Werthe von x, für welche eine ganze Function $p$ten Grades die Werthe $u_0, u_1, \dots u_p$ annehmen soll, und ist $F(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_p)$, so wird der Coëfficient von x^p in der gesuchten Function,

$$\frac{u_0}{F'(x_0)} + \frac{u_1}{F'(x_1)} \dots + \frac{u_p}{F'(x_p)},$$

und man erhält aus diesem Ausdrucke die gesuchte Function selbst, wenn man darin für $u_0, u_1, \dots u_p$ respective $\frac{u_0}{x - x_0}, \frac{u_1}{x - x_1}, \dots \frac{u_p}{x - x_p}$ setzt und mit $F(x)$ multiplicirt. Ganz dieselbe Regel gilt, wie man aus dem Theorem I. sieht, bei der Darstellung gegebner Werthe durch eine gebrochne

rationale Function für die Bildung des Zählers. Aber auch für den Nenner $D(x)$ gilt eine ähnliche noch einfachere Bildungsweise, indem man nur nöthig hat, um diese Function zu erhalten, in dem algebraischen Ausdrucke des Coëfficienten ihres höchsten, mit x^m multiplicirten, Terms statt u_0, u_1 etc. respective $u_0(x-x_0)$, $u_1(x-x_1)$ etc. zu setzen. Man hat daher folgendes Theorem.

Theorem II.

„Wenn man eine rationale gebrochne Function von x, deren Nenner auf den m^{ten} Grad steigt, durch die Werthe u_0, u_1, u_2 etc. bestimmt, welche dieselbe für die Werthe x_0, x_1, x_2 etc. der Variable x annimmt, so werden die algebraischen Ausdrücke der Coëfficienten der höchsten Potenz von x im Zähler und Nenner ganze homogene Functionen von u_0, u_1, u_2 etc. vom $(m+1)^{ten}$ und m^{ten} Grade, und man erhält aus ihnen den Zähler und Nenner selbst, wenn man respective für u_0, u_1, u_2 etc. in dem einen Ausdrucke die Gröfsen

$$\frac{u_0}{x-x_0},\quad \frac{u_1}{x-x_1},\quad \frac{u_2}{x-x_2}\quad \textit{etc.}$$

und in dem andern Ausdrucke die Gröfsen

$$u_0(x-x_0),\quad u_1(x-x_1),\quad u_2(x-x_2)\quad \textit{etc.}$$

setzt, und hierauf den ersten Ausdruck noch mit dem Product sämmtlicher Factoren $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ etc. multiplicirt."

Das Theorem I. zeigt auch noch, dafs die Coëfficienten der höchsten Potenz der Variable im Zähler und im Nenner beide einem ähnlichen Bildungsgesetz unterworfen sind, in der Art, dafs dieser Coëfficient im Zähler so gebildet wird, wie der Coëfficient der höchsten Potenz von x in einem Nenner, welcher auf den $(m+1)$ten Grad steigt. Man erkennt dies, so wie das Theorem II., auch mit grofser Leichtigkeit aus der von *Cauchy* gegebnen Formel.

Auf dieselbe Art wie §. 1. die Gröfsen w in die Gröfsen V transformirt wurden, kann man auch die Gröfsen R transformiren. Setzt man wieder

$$f_{i,k}(x) = (x-x_i)(x-x_{i+1})\dots(x-x_{m-2}) \\ \times(x-x_{m-1+k})(x-x_{m+k})\dots(x-x_{m+n-1}),$$

ferner

$$Q_k^{(i)} = \Sigma\frac{(x_r-x)u_r}{f'_{i,k}(x_r)},$$

wo man die Summation nur auf diejenigen Indices r ausdehnt, für welche

$f_{i,k}(x_r) = 0$ wird, *so erhält man*

$$26. \quad -\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\Sigma \pm Q_0^{(0)} Q_1' \ldots . Q_m^{(m)}}{\Sigma \pm V_0^{(0)} V_1' \ldots . V_{m-1}^{(m-1)}}.$$

Man kann in den Ausdrücken der Gröfsen R und w oder der Gröfsen Q und V überall $x - x_r$ für $x_r - x$ setzen, wenn man gleichzeitig in den Formeln (25.) und (26.) das Minuszeichen links vom Gleichheitszeichen fortläfst, da für jene Änderungen der Bruch den entgegengesetzten Werth annimmt.

4.

Man kann aus dem Theorem I. die von *Cauchy* angegebne Form des Bruchs u auf folgende Weise ableiten. Setzt man

$$q_r = \frac{u_r(x_r - x)}{f'(x_r)} = \frac{u_r(x_r - x)}{(x_r - x_0)(x_r - x_1) \ldots . (x_r - x_{m+n-1})},$$

wo im Nenner der Factor $x_r - x_r$ fortzulassen ist, so wird

$$w_p = q_0 x_0^p + q_1 x_1^p \ldots . + q_{m+n-1} x_{m+n-1}^p.$$

Führt man statt $w_{\alpha+\beta}$ den allgemeineren Ausdruck

$$w_\alpha^{(\beta)} = q_0 x_0^\alpha y_0^\beta + q_1 x_1^\alpha y_1^\beta \ldots . + q_{m+n-1} x_{m+n-1}^\alpha y_{m+n-1}^\beta$$

ein, so wird zufolge des Theorems I.

$$D(x) = \Sigma \pm w_0^{(0)} w_1' \ldots . w_{m-1}^{(m-1)},$$

wenn man nach Bildung der Determinante überall $y_r = x_r$ setzt. Aber zufolge eines von *Cauchy* und auch von mir später bewiesenen Satzes (s. *Crelle* Journal Bd. 22. S. 308 folg.) wird die vorstehende Determinante gleich der Summe aller Gröfsen, welche sich bilden lassen, wenn man in dem Producte

$$q_0 q_1 \ldots . q_{m-1} \Sigma \pm x_0^0 x_1^1 \ldots . x_{m-1}^{m-1} \Sigma \pm y_0^0 y_1^1 \ldots . y_{m-1}^{m-1}$$

für die untern Indices auf alle mögliche Arten je m verschiedne Indices aus der Zahl der Indices $0, 1, 2, \ldots . m+n-1$ setzt. Man hat aber ferner für jede solche Combination nach einer bekannten, zuerst von *Vandermonde* bemerkten Formel

$$\Sigma \pm x_0^0 x_1^1 \ldots . x_{m-1}^{(m-1)} =$$

$$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \ldots . (x_{m-1} - x_0)(x_{m-1} - x_1) \ldots . (x_{m-1} - x_{m-2}),$$

und es wird daher, wenn man $y_r = x_r$ setzt, in $D(x)$ jeder mit $q_0 q_1 \ldots . q_{m-1}$ multiplicirte Term

$$q_0 q_1 \ldots . q_{m-1} \{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \ldots . (x_{m-1} - x_0)(x_{m-1} - x_1) \ldots . (x_{m-1} - x_{m-2})\}^2$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} u_0 u_1 \ldots . u_{m-1} (x_0 - x)(x_1 - x) \ldots . (x_{m-1} - x)}{(x_0 - x_m)(x_0 - x_{m+1}) \ldots . (x_0 - x_{m+n-1})(x_1 - x_m)(x_1 - x_{m+1}) \ldots . (x_1 - x_{m+n-1}) \ldots . (x_{m-1} - x_m)(x_{m-1} - x_{m+1}) \ldots . (x_{m-1} - x_{m+n-1})}.$$

Der Complexus dieser Terme ist der Nenner der *Cauchyschen* Formel, mit $(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ multiplicirt. Ganz auf dieselbe Art wird aus dem im Theorem I. gegebnen Zähler der gebrochnen Function der Zähler der *Cauchyschen* Formel gefunden.

Man findet auch auf einmal den Zähler und Nenner der *Cauchyschen* Formel durch folgende Betrachtung. Es sei

$$D = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \ldots + \alpha_m x^m, \qquad N = a + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_{n-1} x^{n-1},$$

so hat man $n+m+1$ Gleichungen:

$$\begin{array}{rcl} D\{a + x\; a_1 \ldots\ldots + x^{n-1} a_{n-1}\} & = & N\{\alpha + x\; \alpha_1 \ldots\ldots + x^m \alpha_m\}, \\ a + x_0 a_1 \ldots\ldots + x_0^{n-1} a_{n-1} & = & u_0\{\alpha + x_0 \alpha_1 \ldots\ldots + x_0^m \alpha_m\}, \\ a + x_1 a_1 \ldots\ldots + x_1^{n-1} a_{n-1} & = & u_1\{\alpha + x_1 \alpha_1 \ldots\ldots + x_1^m \alpha_m\}, \\ \ldots & & \ldots \\ a + x_{m+n-1} a_1 \ldots + x_{n+m-1}^{n-1} a_{n-1} & = & u_{n+m-1}\{\alpha + x_{n+m-1}\alpha_1 \ldots + x_{n+m-1}^m \alpha_m\}, \end{array}$$

aus welchen man die $n+m+1$ Unbekannten a, a_1 etc., α, α_1 etc. eliminiren kann, und dann eine Bedingungsgleichung $\nabla = 0$ erhält, in welcher ∇ die aus den $n+m+1$ Horizontal- und Verticalreihen der Coëfficienten der Unbekannten gebildete Determinante ist. Nach einer von *Laplace* gemachten Bemerkung kann jede Determinante als ein Aggregat von Producten einfacherer Determinanten dargestellt werden, wenn man die Verticalreihen in zwei Gruppen theilt und auf alle mögliche Arten immer zwei partielle Determinanten der beiden Gruppen, welche sich auf verschiedne Horizontalreihen beziehen, mit einander multiplicirt. Bei der Determinante ∇ sondern sich die Verticalreihen von selbst in die beiden Gruppen der n ersten und $m+1$ letzten Verticalreihen. Sondert man ferner die Terme von ∇, je nachdem sie mit D oder N multiplicirt sind, in zwei verschiedne Aggregate, so erhält man die Bedingungsgleichung in folgender Form:

$$0 = \nabla =$$
$$D\cdot S(\Sigma \pm x^0 x_0^1 x_1^2 \ldots x_{n-2}^{n-1} \times u_{n-1} u_n \ldots u_{n+m-1} \Sigma \pm x_{n-1}^0 x_n^1 \ldots x_{n+m-1}^m)$$
$$+ N\cdot S(\Sigma \pm x_0^0 x_1^1 x_2^2 \ldots x_{n-1}^{n-1} \times u_n u_{n+1} \ldots u_{n+m-1} \Sigma \pm x^0\; x_n^1 \ldots x_{n+m-1}^m).$$

Man wird hier die einzelnen Terme jeder mit Σ bezeichneten Determinante durch Vertauschung der Exponenten erhalten, und dann die beiden Summen S bilden, indem man für die Indices $0, 1, \ldots n-2$ oder $0, 1, \ldots, n-1$ je $n-1$ oder n aus den Indices $0, 1, 2, \ldots n+m-1$ und für die Indices $n-1, n, \ldots n+m-1$ oder $n, n+1, \ldots n+m-1$ die $m+1$ oder m übrigen nimmt. Bezeichnet man mit $P(a, b, c, \ldots)$ das Product aus den Differenzen der Gröfsen $a, b, c, \ldots$, so wird die gefundne Gleichung, wenn

man nach der oben angeführten Formel die Determinanten durch die Producte der Differenzen ersetzt,

$$0 = D\cdot S(u_{n-1}u_n \dots u_{n+m-1} P(x, x_0, x_1, \dots x_{n-2}) P(x_{n-1}, x_n, \dots x_{n+m-1}))$$
$$+N\cdot S(u_n u_{n+1} \dots u_{n+m-1} P(x_0, x_1, \dots x_{n-1}) P(x, x_n, x_{n+1}, \dots x_{n+m-1})).$$

Die verschiednen Zeichen, mit welchen die Producte P genommen werden können, müssen nach der Natur der Determinante ∇ so bestimmt werden dafs, wenn man die Gröfsen D und N und die Gröfsen $u_0, u_1, \dots u_{n+m-1}$ einander gleich setzt und zwei beliebige von den $m+n+1$ Gröfsen $x, x_0, x_1, \dots x_{m+n-1}$ mit einander vertauscht, der ganze Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen den entgegengesetzten Werth annimmt. Wenn man daher diesen Ausdruck mit dem Product $P(x, x_0, x_1, \dots x_{m+n-1})$ dividirt, so mufs derselbe in Bezug auf die $m+n+1$ Gröfsen symmetrisch werden, und es werden umgekehrt, wenn dieser Quotient in Bezug auf alle Gröfsen $x, x_0, x_1, \dots x_{m+n-1}$ symmetrisch wird, alle Zeichen so, wie es die Bedingungen der Determinantenbildung fordern, bestimmt sein. Bezeichnet man mit

$$\{(A, B, C, \dots)(A', B', C', \dots)\}$$

das Product aus allen Differenzen der Gröfsen $A, B, C \dots$ von den Gröfsen $A', B', C' \dots$, indem man immer die zweiten von den ersten abzieht,

$$\{(A, B, C, \dots)(A', B', C', \dots)\}$$
$$= (A-A')(A-B')(A-C') \dots (B-A')(B-B') \dots (C-A') \dots,$$

so erhält man auf die angegebne Art die Gleichung

$$0 = DS\cdot\frac{u_{n-1}u_n \dots u_{n+m-1}}{\{(x, x_0, x_1, \dots x_{n-2})(x_{n-1}, x_n, \dots x_{n+m-1})\}}$$
$$+NS\cdot\frac{u_n u_{n+1} \dots u_{n+m-1}}{\{(x_0, x_1, x_2, \dots x_{n-1})(x_n, x_{n+1}, \dots x_{n+m-1}, x)\}},$$

wo der Ausdruck rechts, wie verlangt wurde, wenn $D = N$ und $u_0 = u_1 \dots = u_{n+m-1}$, in Bezug auf alle Gröfsen $x, x_0, x_1, \dots x_{n+m-1}$ symmetrisch ist, wenngleich sich das Summenzeichen nur auf die $m+n$ Gröfsen $x_0, x_1, \dots x_{m+n-1}$ bezieht. Entnimmt man aus dieser Gleichung den Werth von $\frac{N}{D}$ und multiplicirt Zähler und Nenner mit $(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{m+n-1})$, so erhält man die *Cauchysche* Formel.

5.

Die im Theorem I. dem Zähler und Nenner der gebrochnen Function gegebne Form kann mit besonderm Vortheil in dem Fall angewandt werden, wenn alle oder mehrere der Gröfsen $x_0, x_1, \dots x_{m+n-1}$ untereinander gleich

werden. Ist

$$f(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_r)F(x)$$

und bedeutet $\Psi(x)$ eine beliebige Function von x, so verwandelt sich bekanntlich, wenn

$$x_0 = x_1 \dots = x_r = a$$

wird, das Aggregat

$$\frac{\Psi(x_0)}{f'(x_0)} + \frac{\Psi(x_1)}{f'(x_1)} \dots + \frac{\Psi(x_r)}{f'(x_r)}$$

in den Differentialausdruck

$$\frac{d^r.\Psi(a)\{F(a)\}^{-1}}{\Pi(r).da^r},$$

wo $1.2\dots r = \Pi(r)$. Man kann hienach sogleich die Gröfsen angeben, in welche sich in den oben aufgestellten Sätzen die verschiednen Systeme von Elementen, aus denen die Determinanten zu bilden sind, verwandeln, wenn $r+1$ von den Gröfsen x_0, x_1 etc. denselben Werth a erhalten, für welchen dann die entsprechenden Werthe von u und seiner r ersten Differentialquotienten gegeben sein müssen.

Man nehme insbesondre an, dafs *alle* Gröfsen $x_0, x_1, x_2, \dots x_{n+m-1}$ derselben Gröfse a gleich seien, und dafs für diesen Werth von x sowohl der Werth des gesuchten Bruchs als auch die Werthe seiner $n+m-1$ ersten Differentialquotienten gegeben seien. Bezeichnet man den gesuchten Bruch mit

$$\chi(x) = u,$$

so werden die verschiednen §. 1. eingeführten Gröfsen,

$$v_p = \frac{d^{m+n-1}.a^p\chi(a)}{\Pi(m+n-1)\cdot da^{m+n-1}},$$

$$w_p = \frac{d^{m+n-1}.a^p(a-x)\chi(a)}{\Pi(m+n-1)\cdot da^{m+n-1}},$$

$$U_p^{(i)} = \frac{d^{m+n-i-1}.a^p(a-x)\chi(a)}{\Pi(m+n-i-1)\cdot da^{m+n-i-1}},$$

$$V_k^{(i)} = \frac{d^{m+n-i-k-1}.(a-x)\chi(a)}{\Pi(m+n-i-k-1)\cdot da^{m+n-i-k-1}},$$

$$W_p^{(i)} = \frac{d^{m+n-i-1}.a^p\chi(a)}{\Pi(m+n-i-1)\cdot da^{m+n-i-1}},$$

$$X_k^{(i)} = \frac{d^{m+n-i-k-1}\chi(a)}{\Pi(m+n-i-k-1)\cdot da^{m+n-i-k-1}}.$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man aus §. 1. für den Fall, dafs die $m+n$ Werthe x_0, x_1 etc. einander gleich sind, *sechs* verschiedne Darstellungen des Nenners $D(x)$ durch eine Determinante.

Die §. 3. eingeführten Gröfsen werden, wenn man dort $\varphi(x)$ vom $n$ten Grade annimmt,

$$\varphi(x) = (x-a)^n, \qquad \varphi_k(x) = (x-a)^{n-k},$$

$$S_0^{(k)} = \frac{d^{n-k-1}\cdot\chi(a)}{\Pi(n-k-1)\cdot da^{n-k-1}},$$

$$T_0^{(k)} = \frac{d^{n-k-1}\cdot(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-k-1)\cdot da^{n-k-1}},$$

$$R_p = \frac{d^{n+m}\cdot a^p(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n+m)\cdot da^{n+m}},$$

$$Q_k^{(i)} = \frac{d^{n+m-i-k-1}\cdot(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n+m-i-k-1)\cdot da^{n+m-i-k-1}}.$$

Substituirt man diese Werthe in (19.) — (25.), so erhält man den Zähler $N(x)$ auf ***sieben*** verschiedne Arten durch eine Determinante ausgedrückt.

Es wird zweckmäfsig sein, bei Anordnung der Gröfsen, aus welchen man die Determinanten zu bilden hat, von den niedrigsten Differentialen zu beginnen, weshalb man in den betreffenden Schemas von dem entgegengesetzten Ende der Diagonale ausgehn mufs. Ich werde zugleich der Kürze halber durch χ_0 und χ_p die Ausdrücke

$$\chi(a) = \chi_0, \qquad \frac{d^p\chi(a)}{\Pi(p)\cdot da^p} = \chi_p$$

bezeichnen.

Setzt man hiernach

$$D_0 = V_{m-1}^{(m-1)} = \frac{d^{n-m+1}\cdot(a-x)\chi(a)}{\Pi(n-m+1)\cdot da^{n-m+1}} = (a-x)\chi_{n-m+1} + \chi_{n-m},$$

$$D_i = \frac{d^{n-m+i+1}\cdot(a-x)\chi(a)}{\Pi(n-m+i+1)\cdot da^{n-m+i+1}} = (a-x)\chi_{n-m+i+1} + \chi_{n-m+i},$$

so ergiebt die Darstellung von $D(x)$ durch die Gröfsen (6.),

$$27.\qquad D(x) = \Sigma \pm D_0^{(0)} D_1' D_2'' \dots D_{m-1}^{(m-1)},$$

wenn man nach Bildung der Determinante überall $D_{\alpha+\beta}$ für $D_\alpha^{(\beta)}$ schreibt.

Braucht man das Schema (9.), *so erhält man $D(x)$ gleich der Determinante der Gröfsen*

$$28.\qquad \begin{cases} \chi_{n-m} & \chi_{n-m+1} & \dots & \chi_{n-1} & \chi_n \\ \chi_{n-m+1} & \chi_{n-m+2} & \dots & \chi_n & \chi_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_{n-1} & \chi_n & \dots & \chi_{m+n-2} & \chi_{m+n-1} \\ (x-a)^m & (x-a)^{m-1} & \dots & x-a & 1. \end{cases}$$

Wählt man zur Bestimmung des Zählers die Gröfsen (22.), (23.) oder (24.), *so wird für den Fall der Gleichheit aller x_i der Ausdruck* $-\frac{N(x)}{(x-a)^n}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$29.\quad \begin{cases} D_0 & D_1 & \dots & D_{m-1} & \chi_n \\ D_1 & D_2 & \dots & D_m & \chi_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{m-1} & D_m & \dots & D_{2m-2} & \chi_{n+m-1} \\ \chi_{n-m} & \chi_{n-m+1} & \dots & \chi_{n-1} & \frac{d^{n-1}.(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-1)\cdot da^{n-1}} \end{cases};$$

oder $-\frac{N(x)}{(x-a)^{n-m}}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$30.\quad \begin{cases} D_0 & D_1 & \dots & D_{m-1} & \chi_{n-m} \\ D_1 & D_2 & \dots & D_m & \chi_{n-m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{m-1} & D_m & \dots & D_{2m-2} & \chi_{n-1} \\ \chi_{n-m} & \chi_{n-m+1} & \dots & \chi_{n-1} & \frac{d^{n-m-1}.(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-m-1)\cdot da^{n-m-1}} \end{cases};$$

oder wieder $-\frac{N(a)}{(x-a)^n}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$31.\quad \begin{cases} \chi_{n-m} & \chi_{n-m+1} & \dots & \chi_n \\ \chi_{n-m+1} & \chi_{n-m+2} & \dots & \chi_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \chi_{n-1} & \chi_n & \dots & \chi_{n+m-1} \\ \frac{d^{n-m-1}.(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-m-1)\cdot da^{n-m-1}} & \frac{d^{n-m}.(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-m)\cdot da^{n-m}} & \dots & \frac{d^{n-1}.(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-1)\cdot da^{n-1}} \end{cases}.$$

Endlich erhält man aus (26.)

$$32.\quad -\frac{1}{(x-a)^{n+m}}\cdot\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\Sigma\pm N_0^{(0)}N_1'\dots N_m^{(m)}}{\Sigma\pm D_0^{(0)}D_1'\dots D_{m-1}^{(m-1)}},$$

wenn man nach Bildung der beiden Determinanten überall $N_{\alpha+\beta}$ *und* $D_{\alpha+\beta}$ *für* $N_\alpha^{(\beta)}$ *und* $D_\alpha^{(\beta)}$ *schreibt und*

$$-N_i = \frac{d^{n-m+i-1}.(x-a)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-m+i-1)\cdot da^{n-m+i-1}}$$

$$= \frac{1}{(x-a)^{n-m+i}}\{\chi_0+\chi_1(x-a)+\chi_2(x-a)^2\dots+\chi_{n-m+i-1}(x-a)^{n-m+i-1}\},$$

$$-D_i = \frac{d^{n-m+i+1}.(x-a)\chi(a)}{\Pi(n-m+i+1)\cdot da^{n-m+i+1}} = (x-a)\chi_{n-m+i+1}-\chi_{n-m+i}$$

setzt. Man kann in diesen Formeln gleichzeitig N, N_i, D_i für $-N$, $-N_i$, $-D_i$ schreiben.

In der aus den Gröfsen (30.) gebildeten Determinante ist das Aggregat der Terme, welche mit $\frac{d^{n-1}.(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-1)\cdot d\,a^{n-1}}$ multiplicirt werden, dem Nenner $D(x)$ gleich. Dieser Theil der Determinante ist der einzige, welcher entwickelt negative Potenzen von $x-a$ darbietet. Da nun aber der Bruch $-\frac{N(x)}{(x-a)^n}$, welchem die Determinante gleich ist, *nur* negative Potenzen von $x-a$ enthält, wenn man den Zähler $N(x)$ nach Potenzen von $x-a$ entwickelt, so wird man aus diesem Theile den Werth der ganzen Determinante oder den Bruch $-\frac{N(x)}{(x-a)^n}$ selbst erhalten, wenn man nach geschehner Entwicklung alle positiven Potenzen von $x-a$ fortwirft. Multiplicirt man mit $(x-a)^n$, so folgt hieraus, *dafs man den Zähler $N(x)$ erhält, wenn man den Nenner $D(x)$ nach den Potenzen von $x-a$ entwickelt, ihn mit*

$$(x-a)^n\frac{d^{n-1}.(x-a)^{-1}\chi(a)}{1.2\ldots(n-1)\cdot d\,a^{n-1}}=\chi_0+\chi_1(x-a)+\chi_2(x-a)^2\ldots+\chi_{n-1}(x-a)^{n-1}$$

multiplicirt und nur diejenigen Potenzen von $x-a$ beibehält, welche die $(n-1)$te nicht übersteigen.

6.

Man findet die im Vorigen aus den allgemeinen Formeln abgeleiteten Resultate auch unmittelbar durch folgende Betrachtungen.

Entwickelt man eine Function $\chi(x)$ nach den aufsteigenden Potenzen von $x-a$, so erhält man nach dem *Taylorschen* Satz, wenn man die im vorigen Paragraph angewandte Bezeichnung benutzt,

$$\chi(x)=\chi_0+\chi_1(x-a)+\chi_2(x-a)^2\ldots+\chi_{n+m-1}(x-a)^{n+m-1}+\text{etc.}$$

Ist $\chi(x)=\frac{N(x)}{D(x)}$, wo $N(x)$ und $D(x)$ ganze Functionen von x respective vom $(n-1)$ten und $m$ten Grade sind, und setzt man

$$D(x)=\beta+\beta_1(x-a)+\beta_2(x-a)^2\ldots+\beta_m(x-a)^m,$$

so wird das Product dieses Ausdrucks mit der vorstehenden Entwicklung von $\chi(x)$ der Zähler $N(x)$. Es müssen daher alle die $(n-1)$te übersteigenden Potenzen von $x-a$ verschwinden, welches der zu Ende des vorigen Paragraphs gefundne Satz ist. Man erhält auf diese Weise die folgenden Gleichungen:

$$33.\quad \begin{cases} 0 = \beta_m \chi_{n-m} + \beta_{m-1}\chi_{n-m+1} \ldots + \beta\chi_n, \\ 0 = \beta_m \chi_{n-m+1} + \beta_{m-1}\chi_{n-m+2} \ldots + \beta\chi_{n+1}, \\ 0 = \beta_m \chi_{n-m+2} + \beta_{m-1}\chi_{n-m+3} \ldots + \beta\chi_{n+2} \\ \qquad\qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Aus m von diesen Gleichungen findet man die Werthe, welche den $m+1$ Coëfficienten $\beta, \beta_1, \ldots \beta_m$ proportional sind, und wenn man dieselben in den für $D(x)$ angenommnen Ausdruck substituirt, so ergiebt sich für $D(x)$ die aus den Gröfsen (28.) gebildete Determinante.

Man kann noch bemerken, *dafs man, wenn man die $m+1$ Gröfsen β, β_1 etc. aus beliebigen $m+1$ von den Gleichungen* (33.) *eliminirt, Bedingungen zwischen den Differentialen der Function $\chi(x)$ erhält, die Statt finden müssen, so oft $\chi(x)$ ein rationaler Bruch ist, dessen Zähler und Nenner respective auf den $(n-1)^{ten}$ und m^{ten} Grad steigen.* Nimmt man die $m+1$ ersten von den Gleichungen (33.), so wird die Bedingung

$$34. \quad \Sigma \pm \vartheta_0^{(0)} \vartheta_1' \vartheta_2'' \ldots \vartheta_m^{(m)} = 0,$$

wenn man nach Bildung der Determinante $\vartheta_\alpha^{(\beta)} = \chi_{n-m+\alpha+\beta}$ setzt. Da a eine ganz allgemeine Gröfse ist, so kann man in den Functionen χ_i auch x für a setzen.

Es werde $N(x)$, nach den Potenzen von $x-a$ entwickelt,

$$N(x) = \gamma + \gamma_1(x-a) + \gamma_2(x-a)^2 \ldots + \gamma_{n-1}(x-a)^{n-1}.$$

Diesen Ausdruck mufs man nach dem Vorigen erhalten, wenn man die Entwicklung von $\chi(x)$ mit dem Nenner $D(x) = \beta + \beta_1(x-a) + \beta_2(x-a)^2 \ldots + \beta_m(x-a)^m$ multiplicirt. Man braucht hiebei nur die n ersten Terme der Entwicklung von $\chi(x)$ beizubehalten, weil aus den folgenden nur höhere Potenzen von $x-a$ als die $(n-1)$te hervorgehn, *so dafs $N(x)$ gleich wird dem Producte*

$$\{\beta + \beta_1(x-a) + \beta_2(x-a)^2 \ldots + \beta_m(x-a)^m\}$$
$$\times \{\chi_0 + \chi_1 \cdot (x-a) + \chi_2 \cdot (x-a)^2 \ldots + \chi_{n-1} \cdot (x-a)^{n-1}\},$$

wenn man nach geschehner Multiplication die Potenzen von $x-a$, welche die $(n-1)$te übersteigen, fortwirft. Man erhält auf diese Weise

$$\frac{N(x)}{(x-a)^n} = \beta_m \frac{d^{n-m-1} \cdot (x-a)^{-1} \chi(a)}{\Pi(n-m-1)\, da^{n-m-1}} + \beta_{m-1} \frac{d^{n-m} \cdot (x-a)^{-1} \chi(a)}{\Pi(n-m)\, da^{n-m}} \ldots$$
$$+ \beta \cdot \frac{d^{n-1} \cdot (x-a)^{-1} \chi(a)}{\Pi(n-1)\, da^{n-1}}.$$

Substituirt man in diese Formel die Gröfsen, denen zufolge (33.) die Coëffi-

cienten $\beta_m, \beta_{m-1}, \ldots \beta$ proportional sind, so erhält man die im vorigen Paragraph für $\frac{N(x)}{(x-a)^n}$ gefundne, aus den Gröfsen (31.) gebildete Determinante.

Man kann die Functionen $D(x)$ und $N(x)$ für den hier betrachteten Fall auf ähnliche Art wie in §. 2. durch Gleichungen von verschiedner Form bestimmen. Es ist nämlich

$$35. \quad \frac{d^r \cdot x^p \chi(x) D(x)}{dx^r} = 0,$$

wenn $r \geqq n+p$, da $x^p D(x)\chi(x) = x^p N(x)$ eine ganze Function von x vom $(n+p-1)$ten Grade ist. Man hat daher, wenn man mit $\Pi(r)$ dividirt und nach geschehner Differentiation den Werth $x=a$ substituirt, ferner

$$\chi_i^{(p)} = \frac{d^i \cdot a^p \chi(a)}{\Pi(i) \cdot da^i}$$

setzt, die allgemeine Gleichung,

$$36. \quad \chi_r^{(p)} \cdot D(a) + \chi_{r-1}^{(p)} \cdot \frac{d \cdot D(a)}{da} + \chi_{r-2}^{(p)} \cdot \frac{d^2 \cdot D(a)}{\Pi 2 \cdot da^2} \ldots + \chi_{r-m}^{(p)} \cdot \frac{d^m \cdot D(a)}{\Pi(m) \cdot da^m} = 0,$$

oder auch, wenn $r \geqq n+i+k$,

$$37. \quad \chi_r^{(i)} \cdot a^k D(a) + \chi_{r-1}^{(i)} \cdot \frac{d \cdot a^k D(a)}{da} + \chi_{r-2}^{(i)} \cdot \frac{d \cdot a^k D(a)}{\Pi 2 \cdot da^2} \ldots + \chi_{r-m-k}^{(i)} \cdot \frac{d^{m+k} \cdot a^k D(a)}{\Pi(m+k) \cdot da^{m+k}} = 0.$$

Substituirt man in (35.) für $D(x)$ den Ausdruck $\alpha + \alpha_1 x \ldots + \alpha_m x^m$, so erhält man:

$$38. \quad \alpha \cdot \frac{d^r \cdot a^p \chi(a)}{da^r} + \alpha_1 \cdot \frac{d^r \cdot a^{p+1} \chi(a)}{da^r} + \alpha_2 \cdot \frac{d^r \cdot a^{p+2} \chi(a)}{da^r} \ldots + \alpha_m \cdot \frac{d^r \cdot a^{p+m} \chi(a)}{da^r} = 0.$$

Wenn man in dieser Formel dem Exponenten p die Werthe $0, 1, 2, \ldots m-1$ giebt und immer $r \geqq n+p$ und zu gleicher Zeit $r \leqq n+m-1$ annimmt, so werden in den auf diese Art erhaltnen Gleichungen die Coëfficienten von α, α_1 etc. gegebne Gröfsen, da die Differentialquotienten von $\chi(a)$ bis zum $(n+m-1)$ten als gegeben angesehn werden. Wählt man daher aus der Zahl dieser Gleichungen beliebige m von einander unabhängige, so kann man daraus die Verhältnisse von α, α_1 etc. und daher $D(x)$ selber, abgesehn von einem constanten Factor, bestimmen. Man erhält dann $D(x)$ nach den Potenzen von x geordnet. Eben so würde man aus m von einander unabhängigen Gleichungen (36.), wenn in ihnen immer $n+p \leqq r \leqq n+m-1$ angenommen wird, die Verhältnisse von $D(a)$ und seiner m ersten Differentialquotienten finden, und hierdurch die Entwicklung von $D(x)$ nach den Potenzen von $x-a$ erhalten. Solche Systeme von m von einander unabhängigen Gleichungen erhält man zum Beispiel, wenn man $p=0$ und für r nach und nach $n, n+1, \ldots n+m-1$, oder $r=m+n-1$ und für p nach einander die Werthe $0, 1, 2, \ldots m-1$ setzt.

Führt man wie in §. 2. statt der Coëfficienten α, α_1 etc. die Functionen $D_0 = D(x)$, $D_1 = \frac{D-\alpha}{x}$, $D_2 = \frac{D_1 - \alpha_1}{x}$ etc. ein, so erhält man aus (13.), indem man $x_i = a$ setzt,

39. $$D(a) = D_0 + (a-x)D_1 + a(a-x)D_2 \ldots + a^{m-1}(a-x)D_m.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (35.), nachdem man darin $x = a$ gesetzt hat, so erhält man die Gleichung

40. $$\frac{d^r \cdot a^p \chi(a)}{da^r} \cdot D_0 + \frac{d^r \cdot a^p (a-x)\chi(a)}{da^r} \cdot D_1 + \frac{d^r \cdot a^{p+1}(a-x)\chi(a)}{da^r} \cdot D_2$$
$$\ldots + \frac{d^r \cdot a^{p+m-1}(a-x)\chi(a)}{da^r} \cdot D_m = 0.$$

Führt man in die Gleichung

$$\frac{d^r \cdot a^p \chi(a) D(a)}{da^r} = 0$$

für $D(a)$ den Ausdruck

$$D(x) + \frac{dD(x)}{dx}(a-x) + \frac{d^2 D(x)}{\Pi 2 \cdot dx^2}(a-x)^2 \ldots + \frac{d^m D(x)}{\Pi m \cdot dx^m}(a-x)^m = D(a)$$

ein, so erhält man zwischen den Unbekannten $D(x)$, $\frac{dD(x)}{dx}$ etc. folgende lineäre Gleichung

41. $$\frac{d^r \cdot a^p \chi(a)}{da^r} \cdot D(x) + \frac{d^r \cdot a^p (a-x)\chi(a)}{da^r} \cdot \frac{dD(x)}{dx} + \frac{d^r \cdot a^p (a-x)^2 \chi(a)}{da^r} \cdot \frac{d^2 D(x)}{\Pi 2 \cdot dx^2}$$
$$\ldots + \frac{d^r \cdot a^p (a-x)^m \chi(a)}{da^r} \cdot \frac{d^m D(x)}{\Pi m \cdot dx^m} = 0.$$

Die Gröfsen $D^{(i)}$ und S_i in §. 2. verwandeln sich, wenn die Function $f(x)$ vom $(r+1)$ten Grade angenommen und $x_0 = x_1 = x_2 \ldots = a$ wird, in folgende:

$$D^{(0)} = D(x); \quad D^{(i)} = \frac{D(x)}{(x-a)^p} - \frac{d^{p-1} \cdot \frac{D(a)}{x-a}}{\Pi(p-1)\, da^{p-1}}$$
$$= \frac{d^i D(a)}{\Pi i \cdot da^i} + \frac{d^{i+1} D(a)}{\Pi(i+1) \cdot da^{i+1}}(x-a) \ldots + \frac{d^m D(a)}{\Pi m \cdot da^m}(x-a)^{m-i},$$
$$S = \frac{d^r \cdot a^p \chi(a)}{\Pi r \cdot da^r}, \quad S_i = \frac{d^{r-i+1} \cdot a^p (a-x)\chi(a)}{\Pi(r-i+1) \cdot da^{r-i+1}}.$$

Substituirt man diese Werthe der Gröfsen S_i, so ergiebt die Formel (17.) §. 2. zwischen den Unbekannten $D^{(0)}$, D', D'', ... $D^{(m)}$ die lineäre Gleichung:

$$42.\quad \frac{d^r \cdot a^p \chi(a)}{\Pi r \cdot da^r} \cdot D^{(0)} + \frac{d^r \cdot a^p(a-x)\chi(a)}{\Pi r \cdot da} \cdot D' + \frac{d^{r-1} \cdot a^p(a-x)\chi(a)}{\Pi(r-1) \cdot da^{r-1}} \cdot D''$$
$$\ldots + \frac{d^{r-m+1} \cdot a^p(a-x)\chi(a)}{\Pi(r-m+1) \cdot da^{r-m+1}} \cdot D^{(m)} = 0.$$

Bildet man m von einander unabhängige Gleichungen (40.), so werden D_0, D_1, ... D_m den partiellen Determinanten ihrer Coëfficienten gleich, multiplicirt mit einem gemeinschaftlichen Factor. Eben so erhält man $D(x)$, $\frac{dD(x)}{dx}$, ... $\frac{d^m D(x)}{\Pi m . dx^m}$ aus m von einander unabhängigen Gleichungen (41.) und $D^{(0)}$, D', ... $D^{(m)}$ aus m von einander unabhängigen Gleichungen (42.). In allen diesen Gleichungen ist immer

$$n+p \leqq r \leqq n+m-1$$

anzunehmen. Die Gröfse $D_m = D^{(m)}$ ist, wie in §. 2., der Coëfficient der höchsten Potenz von x in $D(x)$ oder $= \frac{d^m D(x)}{\Pi m \cdot dx^m}$.

Im August 1845.

10.

Über die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie.

Auszug eines Schreibens an die Berliner Akad. d. Wiss.

(Abgedruckt aus den Monatsberichten der Königl. Akad. d. Wiss. zu Berlin vom Jahre 1837.)

Ist x eine Wurzel der Gleichung $\frac{x^p-1}{x-1}=0$, wo p eine Primzahl ist, und g eine primitive Wurzel von p, und setzt man

$$F(\alpha) = x+\alpha x^g+\alpha^2 x^{g^2} \ldots . + \alpha^{p-2} x^{g^{p-2}},$$

wo α irgend eine Wurzel der Gleichung $\frac{\alpha^{p-1}-1}{\alpha-1}=0$ bedeutet, so hat man

$$F(\alpha)F(\alpha^{-1}) = \alpha^{\frac{p-1}{2}}\cdot p.$$

Setzt man

$$F(\alpha^m)F(\alpha^n) = \psi(\alpha)F(\alpha^{m+n}),$$

so wird $\psi(\alpha)$ ein Ausdruck, der bloſs die Potenzen von α in ganze Zahlen multiplicirt enthält; es ist ferner

$$\psi(\alpha)\psi(\alpha^{-1}) = p\ ^{*}).$$

Bedeutet r eine primitive Wurzel der Gleichung $r^{p-1}=1$, und setzt man in der Function

$$\psi(r) = \frac{F(r^{-m})F(r^{-n})}{F(r^{-m-n})}$$

für r die Zahl g, so wird, wenn m und n positive Zahlen bedeuten die kleiner als $p-1$ sind,

$$\psi(g) \equiv -\frac{\Pi(m+n)}{\Pi m\, \Pi n} \quad (\text{mod. } p),$$

wo $\Pi n = 1.2.3\ldots . n$. Wenn also $m+n>p-1$, wird $\psi(g)\equiv 0$ (mod. p), welches letztere sich in den Anwendungen als einen der wichtigsten Sätze der Zahlentheorie erweist. Der Fall $m+n=p-1$ wird hier ausgenommen. Diese Sätze habe ich vor mehr als 10 Jahren *Gauſs* mitgetheilt.

Ich bemerke noch, daſs wenn $2\equiv g^m$, $3\equiv g^{m'}$ (mod. p), man die beiden merkwürdigen Formeln hat:

---

*) Die Fälle, wo α_m, α_n oder α_{m+n} der Einheit gleich sind, werden hier ausgenommen.

$$F(-1)F(\alpha^2) = \alpha^{2m} F(\alpha)F(-\alpha),$$
$$F(\alpha)F(\gamma\alpha)F(\gamma^2\alpha) = \alpha^{-3m'} p F(\alpha^3),$$

in deren letzterer γ eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit ist. Ist λ ein ungerader Factor von $p-1$, so kann man durch die erste der beiden Formeln diejenigen Functionen $F(\alpha)$, in welchen α eine 2λte Wurzel der Einheit ist, rational auf die Functionen $F(\alpha)$ zurückführen, in denen α eine λte Wurzel der Einheit ist. Man erhält so für $F(-\gamma)$ den Ausdruck

$$F(-\gamma) = \sqrt{p}\cdot\sqrt[3]{\left(\gamma^{-B}\frac{A-B\sqrt{-3}}{A+B\sqrt{-3}}\right)},$$

wo $A^2+3B^2 = p$. Mit Hülfe derselben Formel findet man, wenn α eine primitive 8te Wurzel der Einheit ist, und

$$p = aa+bb = cc+2dd, \quad a \equiv c \equiv -1 \pmod{4}$$

gesetzt wird,

$$F(\alpha) = \sqrt{\{(-1)^{\frac{c+1}{4}}(c+d\sqrt{-2})\sqrt{((a+b\sqrt{-1})\sqrt{p})}\}},$$

ferner

$$F(\alpha)F(\alpha^2) = (-1)^{\frac{c+1}{4}+\frac{p-1}{8}}(a+b\sqrt{-1})F(\alpha^3),$$
$$F(\alpha)F(\alpha^3) = (-1)^{\frac{p-1}{8}}(c+d\sqrt{-2})F(-1).$$

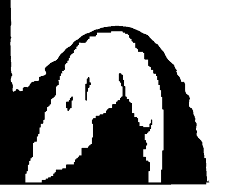
Man erhält ferner mit Hülfe der beiden Formeln, wenn γ und α eine imaginäre cubische und biquadratische Wurzel der Einheit sind:

$$F(\gamma\alpha) = \frac{F(\alpha)F(\gamma)}{a'+b'\alpha} = \frac{\sqrt{((a+b\alpha)\sqrt{p})}\sqrt[3]{\left(\frac{L+M\sqrt{-3}}{2}\cdot\sqrt{p}\right)}}{a'+b'\alpha},$$

wo

$$p = aa+bb = a'a'+b'b' = \frac{LL+3MM}{4},$$
$$a \equiv -1 \pmod{4},$$
$$a' \equiv -L \equiv -1 \pmod{3},$$
$$M \equiv 0 \pmod{3},$$
$$\frac{a'}{b'} \equiv \frac{a}{b} \pmod{p}.$$

Die zweifelhaften Zeichen werden immer durch Congruenzen *bestimmt* oder, wo sie von der Wahl der primitiven Wurzel g abhängen, wird diese Abhängigkeit auf eine einfache Weise angegeben; die Art dieser Abhängigkeit bildet die wichtigste Grundlage der Anwendung auf die Theorie der Potenzenreste. Ich bemerke noch, dafs wenn $p = cc+2dd$ von der Form $8n+1$ ist, c der absolut kleinste Rest ist, den die Zahl



$$-\tfrac{1}{2}\frac{\frac{p+1}{2}\cdot\frac{p+3}{2}\cdots\frac{5(p-1)}{8}}{1.2.3\ldots\frac{p-1}{8}}$$

durch p dividirt läfst, und dafs dieser absolut kleinste Rest immer positiv oder negativ ist, je nachdem er, abgesehen vom Zeichen, die Form $4n+3$ oder $4n+1$ hat. Die Functionen $F(\alpha)$, welche man nur bestimmt hatte, wenn α eine quadratische, cubische, biquadratische Wurzel der Einheit ist, sind durch die obigen Formeln nun auch bestimmt, wenn α eine 6te, 8te, 12te Wurzel der Einheit ist, man kann also *a priori* die Wurzeln der Gleichungen vom 6ten, 8ten, 12ten Grade, die in der Kreistheilung vorkommen, vollständig auflösen, und braucht hierzu nur die Zerfällung von p in die drei Formen $xx+yy$, $xx+2yy$, $xx+3yy$. Für die Primzahlen bis 12000 habe ich diese Zerfällungen meiner Arbeit beigefügt.

Eine allgemeine Formel von grofser Wichtigkeit auch in der Anwendung der Kreistheilung auf die Theorie der quadratischen Formen ist folgende. Es sei p von der Form $\lambda n+1$, β eine primitive λte Wurzel der Einheit, α *irgend eine* Wurzel der Gleichung $\alpha^{p-1}=1$, es sei ferner $\lambda\equiv g^m$ (mod. p), so wird, wenn λ ungerade ist:

$$F(\alpha)F(\beta\alpha)F(\beta^2\alpha)\ldots F(\beta^{\lambda-1}\alpha)=\alpha^{-\lambda m}p^{\frac{\lambda-1}{2}}F(\alpha^\lambda),$$

wenn λ gerade ist:

$$F(\alpha)F(\beta\alpha)F(\beta^2\alpha)\ldots F(\beta^{\lambda-1}\alpha)=(-1)^{\frac{(p-1)(\lambda-2)}{8}}p^{\frac{\lambda-2}{2}}F(-1)F(\alpha^\lambda)\ ^{*}),$$

wo, wie immer,

$$F(-1)=\sqrt{((-1)^{\frac{p-1}{2}}p)}$$

ist.

Wenn die Functionen ψ im Zusammenhange mit den Binominalcoëfficienten oder den *Euler*schen Integralen 1ster Gattung stehen, wie die Congruenz

$$\psi(g)\equiv-\frac{\Pi(m+n)}{\Pi m\,\Pi n}\ \text{(mod. }p)$$

zeigt, so scheint die Vergleichung mit der Formel

$$\psi(r)=\frac{F(r^{-m})F(r^{-n})}{F(r^{-m-n})}$$

---

*) Dieser Satz ist einem *Gaufs'*schen über die *Euler*schen Integrale analog, von welchem neuerdings *Dirichlet* einen merkwürdigen Beweis gegeben hat.

darauf hinzudeuten, dafs zwischen den Functionen F und den *Euler*schen Integralen 2ter Gattung eine ähnliche Beziehung Statt finden mufs, in der Art, dafs $-\frac{1}{\Pi n}$ der Function $F(r^{-n})$ entspricht. Aber ich habe lange diese Beziehung vergeblich gesucht, bis ich sie in folgendem Satze fand.

In dem Ausdruck von $F(\alpha)$ setze man für den Exponenten g^m den ihm in Bezug auf p congruenten kleinsten positiven Rest g_m, wodurch

$$F(x, \alpha) = x + \alpha x^{g_1} + \alpha^2 x^{g_2} \ldots + \alpha^{p-2} x^{g_{p-2}}$$

wird. Es seien ferner x und α nicht Wurzeln der Einheit, sondern x eine unbestimmte Variable und α eine Zahl $\equiv g^{p-1-m}$ (mod. p). Setzt man $x = 1 + y$ und bezeichnet mit Y_n die Entwicklung von $\{\log(1+y)\}^n$, wenn man die y^{p-1} übersteigenden Potenzen von y fortwirft: so wird für die verschiednen Zahlen α, welche man für die verschiednen Werthe von m erhält,

$$F(1+y, \alpha) \equiv -\frac{Y_m}{\Pi_m} \text{ (mod. } p),$$

wo die Congruenz für ein unbestimmtes y in Bezug auf die einzelnen Coëfficienten der Potenzen von y Statt findet. Dies ist die gesuchte Beziehung, aus welcher durch Multiplication zweier Functionen F die obige zwischen den Functionen ψ und den Binominalcoëfficienten folgt. Ich bemerke noch den Satz, dafs in der Entwicklung der $(2m)$ten Potenz von $\log(1+y)$ der Coëfficient von y^p, wenn p eine Primzahl und $> 2m+1$ ist, immer ein Vielfaches von p zum Zähler erhält, wenn man ihn auf seinen kleinsten Ausdruck bringt.

Die bisher noch nirgends angegebne wahre Form der Wurzeln der Gleichung $x^p = 1$ ist folgende. Man kann, wie bekannt, diese Wurzeln leicht durch blofse Addition aus den Functionen $F(\alpha)$ zusammensetzen. Ist λ ein Factor von $p-1$ und $\alpha^\lambda = 1$, so ist ferner bekannt, dafs $\{F(\alpha)\}^\lambda$ eine blofse Function von α ist. Man braucht aber nur diejenigen Werthe von $F(\alpha)$ zu kennen, für welche λ Potenz einer Primzahl ist. Es sei nemlich $\lambda\lambda'\lambda'' \ldots$ ein Factor von $p-1$; ferner seien $\lambda, \lambda', \lambda'' \ldots$ Potenzen verschiedener Primzahlen und $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$ primitive λte, λ'te, λ''te $\ldots$ Wurzeln der Einheit: so wird

$$F(\alpha\alpha'\alpha'' \ldots) = \frac{F(\alpha)F(\alpha')F(\alpha'') \ldots}{\psi(\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots)},$$

wo $\psi(\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots)$ eine ganze rationale Function von $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$ bedeutet, deren Coëfficienten ganze Zahlen sind. Es kommen daher, wenn man immer die $(p-1)$ten Wurzeln der Einheit als gegeben ansieht, in dem Ausdruck von x nur Wurzelgröfsen, deren Exponenten Potenzen von Primzahlen

sind, und die Producte solcher Wurzelgröfsen vor. Wenn $\lambda = \mu^n$ und μ eine Primzahl ist, findet man die Function $F(\alpha)$ auf folgende Art. Man setze

$$F(\alpha)F(\alpha^i) = \psi_i(\alpha)F(\alpha^{i+1}),$$

so wird

$$F(\alpha) = \sqrt[\mu]{\{\psi_1(\alpha)\psi_2(\alpha)\ \ldots\ldots\ \psi_{\mu-1}(\alpha)\cdot F(\alpha^\mu)\}}$$
$$F(\alpha^\mu) = \sqrt[\mu]{\{\psi_1(\alpha^\mu)\psi_2(\alpha^\mu)\ \ldots\ldots\ \psi_{\mu-1}(\alpha^\mu)\cdot F(\alpha^{\mu^2})\}}$$

u. s. w., zuletzt

$$F(\alpha^{\mu^{n-1}}) = \sqrt[\mu]{\{\psi_1(\alpha^{\mu^{n-1}})\psi_2(\alpha^{\mu^{n-1}})\ \ldots\ldots\ \psi_{\mu-2}(\alpha^{\mu^{n-1}})\cdot(-1)^{\frac{p-1}{\mu}}p\}}\ ^{*)}.$$

Die $\mu - 1$ Functionen ψ bestimmen nicht nur sämmtliche Gröfsen unter den Wurzelzeichen, sondern auch die gegenseitige Abhängigkeit der Wurzelgröfsen selber. Setzt man nemlich für α die verschiednen Potenzen von α, so kann man vermittelst der so erhaltnen Werthe dieser Functionen alle $\mu^n - 1$ Functionen $F(\alpha^i)$ durch die Potenzen von $F(\alpha)$ rational ausdrücken, indem alle $\mu^n - 1$ Gröfsen $\frac{[F(\alpha)]^i}{F(\alpha^i)}$ immer einem Product aus den Werthen mehrerer der $\mu - 1$ Functionen $\psi(\alpha)$ gleich werden. Hierin besteht einer der gröfsten Vorzüge der hier angegebnen Methode vor der *Gaufs*'schen, indem in dieser die Auffindung der Abhängigkeit der verschiednen Wurzelgröfsen eine ganz besondere, wegen ihrer grofsen Mühseligkeit selbst für kleine Primzahlen nicht mehr ausführbare Arbeit verursacht, während die Einführung der Functionen ψ *gleichzeitig* die Gröfsen unter den Wurzelzeichen und die Abhängigkeit der Wurzelgröfsen giebt. Die Bildung der Functionen ψ geschieht nach einem überaus einfachen Algorithmus, der nur erfordert, dafs man sich aus der Tabelle für die Reste von g^m eine andre bildet, welche $g^{m'} \equiv 1 + g^m$ (mod. p) giebt. Nach diesen Regeln hat jetzt einer meiner Zuhörer in einer von der hiesigen Universität gekrönten Preisschrift die Gleichungen $x^p = 1$ für alle Primzahlen p bis 103 vollständig aufgelöst **).

*) Wenn $n = 1$, lassen sich die $\mu - 1$ Functionen immer auf den 6ten Theil unmittelbar zurückführen. Ich habe sogar durch eine bis $\mu = 31$ fortgesetzte Induction gefunden, dafs sich alle Functionen ψ immer durch die Werthe einer einzigen ausdrücken lassen.

**) Bei dieser Gelegenheit hat derselbe (Herr *Rosenhain*) den merkwürdigen Satz bewiesen, dafs wenn α die 5te, γ die 3te Wurzel der Einheit, p von der Form $30n+1$, $24 \equiv g^m$ (mod. p) ist, immer $F(\alpha)F(-\gamma) = \alpha^m \cdot \frac{A+B\sqrt{-3}}{2} F(-\alpha\gamma)$ wird, wo $A \equiv -2$, $B \equiv 0$ (mod. 5), $AA + 3BB = 4p$.

Einer der für die Zahlentheorie fruchtbarsten Sätze ist folgender. Es seien die Zahlen m, m', m'' .... positiv und kleiner als $p-1$; es werden durch m_i, m'_i, m''_i .... die kleinsten positiven Reste bezeichnet, welche im, im', im'' .... durch $p-1$ dividirt ergeben; es sei

$$m_i + m'_i + m''_i + \ldots\ldots = n_i(p-1) + s_i,$$

wo s_i ebenfalls positiv und kleiner als $p-1$; ist ν die kleinste unter den Zahlen n_1, n_2, ... n_{p-1} und setzt man

$$F(r^{-m})F(r^{-m'})F(r^{-m''})\ldots\ldots = \chi(r)F(r^{-s}),$$

so werden die ganzzahligen Coëfficienten in $\chi(r)$ alle durch p^ν theilbar und durch keine höhere Potenz von p; setzt man $\chi(r) = p^\nu \chi'(r)$ und in $\chi'(r)$ für r die primitive Wurzel g, so wird

$$\chi'(g) \equiv \pm \frac{\Pi s}{\Pi m \Pi m' \Pi m'' \ldots\ldots} \text{ (mod. } p).$$

Die Anwendung dieses Satzes giebt eigenthümliche Theoreme, von denen ich vor einer Reihe von Jahren ein Specimen im *Crelle*'schen Journal mitgetheilt habe, die Zahl der reducirten quadratischen Formen der Theiler von $yy + pzz$ betreffend, wenn p eine Primzahl von der Form $4n+3$ ist *). Wenn ich diesen Theoremen die Allgemeinheit gegeben haben werde, deren sie fähig scheinen, werde ich mir die Ehre geben, sie ebenfalls der Akademie vorzulegen. Sie bilden gewissermaafsen ein Verbindungsglied zwischen den beiden Haupttheilen der höheren Arithmetik, der Kreistheilung und der Theorie der quadratischen Formen.

Die hauptsächlichste Anwendung der Kreistheilung habe ich auf die Theorie der cubischen und biquadratischen Reste gemacht, und mit grofser Leichtigkeit und Einfachheit den schönen *Gaufs*'schen Satz in seiner 2ten Abhandlung über die biquadratischen Reste, dessen bisher noch nicht bekannt gemachten Beweis derselbe als ein *mysterium maxime reconditum* bezeichnet, wahrscheinlich auf ganz verschiednem Wege abgeleitet **). Die höchste Einfachheit hat der Reciprocitätssatz für cubische Reste, dessen Beweis sich fast mit einem Striche aus den bekannten Formeln der Kreistheilung findet. Sind nämlich $\frac{L+M\sqrt{-3}}{2}$ und $\frac{L'+M'\sqrt{-3}}{2}$, wo M und M' durch 3 aufgehen (auch 0

*) Für die Primzahlen von der Form $4n+1$ findet ein ganz analoger Satz Statt; die Zahl der q. R. zwischen 0 und $\frac{1}{4}p$ giebt hier die Zahl der Formen.

**) Dieser Satz betrifft die biquadratische Reciprocität zwischen zwei complexen Primzahlen $a+b\sqrt{-1}$ und $c+b\sqrt{-1}$; den ebenfalls zuerst von *Gaufs* aufgestellten Satz über deren quadratische Reciprocität hat *Dirichlet* bewiesen.



sein können), zwei complexe Primzahlen und bezeichnet man durch $\left(\frac{x+y\sqrt{-3}}{\frac{1}{2}(L+M\sqrt{-3})}\right)$ diejenige der Gröſsen 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, welche in Bezug auf den Modul $\frac{L+M\sqrt{-3}}{2}$ der Potenz $(x+y\sqrt{-3})^{\frac{\frac{1}{4}(LL+3MM)-1}{3}}$ congruent ist, so wird geradezu

$$\left(\frac{\frac{1}{2}(L'+M'\sqrt{-3})}{\frac{1}{2}(L+M\sqrt{-3})}\right) = \left(\frac{\frac{1}{2}(L+M\sqrt{-3})}{\frac{1}{2}(L'+M'\sqrt{-3})}\right).$$

Die Beweise dieser Sätze konnten in den vergangenen Wintervorlesungen ohne Schwierigkeit meinen Zuhörern mitgetheilt werden *).

Die Anwendung des *Legendre*'schen Reciprocitätssatzes auf die Untersuchung, ob eine Primzahl einer andern quadratischer Rest oder Nichtrest sei, erfordert bekanntlich die Zerfällung der successiv gefundnen Reste in Primfactoren, und die besondere Behandlung jedes derselben. *Gauſs* hat die Theorie der quadratischen Reste wesentlich vervollkommnet, indem er durch einen ihm eigenthümlichen Satz diese Untersuchung, ohne Factorenzerfällung nöthig zu haben, auf die Verwandlung eines Bruchs in einen Kettenbruch zurückgeführt hat. Ich habe die gleiche Vollkommenheit der Theorie der biquadratischen und cubischen Reste gegeben, wozu es nur einer leicht sich ergebenden Verallgemeinerung der Reciprocitätssätze bedurfte. Ist nemlich, um diese Verallgemeinerung für die quadratischen Reste anzudeuten, p irgend eine ungerade Zahl $= ff'f'' \ldots$, wo $f, f', f'' \ldots$ gleiche oder verschiedene Primzahlen bedeuten, so dehne ich die schöne *Legendre*'sche Bezeichnung auf zusammengesetzte Zahlen p in der Art aus, daſs ich mit $\left(\frac{x}{p}\right)$, wenn x zu p Primzahl ist, das Product $\left(\frac{x}{f}\right)\left(\frac{x}{f'}\right)\left(\frac{x}{f''}\right) \ldots$ bezeichne. Sind p und p' zwei ungerade Zahlen, die keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, beide positiv

*) Diese aus vielfach verbreiteten Nachschriften der oben erwähnten Vorlesungen auch den Herren Professoren *Dirichlet* und *Kummer* seit mehreren Jahren bekannten Beweise sind neuerdings von Herrn Dr. *Eisenstein* im 27sten Bande des *Crelle*'schen Journals S. 289 und im 28ten Bande desselben Journals S. 53 publicirt worden. Der S. 41 des 28ten Bandes von Herrn Dr. *Eisenstein* gegebne Beweis des quadratischen Reciprocitätssatzes ist der nämliche, welchen ich im Jahre 1827 *Legendre* mitgetheilt und dieser in die 3te Ausgabe seiner Zahlentheorie aufgenommen hat.

Die oben erwähnten auf die quadratischen Formen bezüglichen Sätze sind jetzt Theile einer groſsen von *Dirichlet* gegründeten Theorie geworden.

October 1845. J.

oder auch eine positiv, die andre negativ, so hat man, ganz wie bei Primzahlen:

$$\left(\frac{p'}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p'-1}{2}}\left(\frac{p}{p'}\right),$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

und diese Formeln geben den Werth von $\left(\frac{p'}{p}\right)$ vermittelst der gewöhnlichen Verwandlung von $\frac{p'}{p}$ in einen Kettenbruch durch eine von der *Gaufs*'schen wesentlich verschiedne und einfachere Regel. Auf diese Weise erfordert die Bestimmung von $\left(\frac{p'}{p}\right)$ nur die Untersuchung, ob p und p' wirklich, wie die Definition verlangt, keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Genau dasselbe läfst sich bei den biquadratischen und cubischen Resten anwenden, für welche ich ähnliche Bezeichnungen eingeführt habe. Die Anwendung des so verallgemeinerten Zeichens $\left(\frac{x}{p}\right)$ gewährt bei einiger Übung die angenehmsten Erleichterungen.

Mit den Resten der 8ten und 5ten Potenzen, welche ganz neue Principien nöthig machen, bin ich ziemlich weit vorgerückt; sobald ich den betreffenden Reciprocitätsgesetzen die wünschenswerthe Vollendung gegeben habe, werde ich sie der Akademie mittheilen. Das Wichtigste hiebei dürfte die Aussicht sein, welche diese Prinzipien auf eine dereinstige Verallgemeinerung und Vereinfachung der höheren Arithmetik gewähren.

Eine meiner frühesten Anwendungen der Kreistheilung betrifft die cyclometrische Auflösung der *Pell*'schen Aufgabe. Aus einer vor mir liegenden von dem jetzt am Danziger Gymnasium angestellten Oberlehrer *Czwalina* angefertigten Nachschrift einer von mir vor mehreren Jahren gehaltenen Vorlesung entnehme ich folgende Sätze. Es sei p eine Primzahl von der Form $4n+1$; bezeichnet man mit a ihre quadratischen Reste zwischen o und $\frac{1}{2}p$, so wird

$$\sqrt{p}\{\sqrt{p}\cdot y + x\} = 2^{\frac{p+1}{2}}\Pi\sin^2\frac{a\pi}{p},$$

wo $x^2 - py^2 = -4$ und durch das vorgesetzte Π das Product aus sämmtlichen Factoren $\sin^2\frac{a\pi}{p}$ bezeichnet wird. Es sei q eine Primzahl von der Form $8n+3$; bezeichnet man mit a ihre quadratischen Reste, so wird

$$x + y\sqrt{q} = \sqrt{2}\,\Pi \sin\left(\frac{a\pi}{q} + \frac{\pi}{4}\right),$$

wo $x^2 - qy^2 = -2$. Es seien q und q' zwei Primzahlen von der Form $4n+3$, q quadratischer Rest von q'; es seien ferner respective a und a' die kleinsten positiven quadratischen Reste von q und von q', so wird

$$2^{\frac{q-1}{2}\cdot\frac{q'-1}{2}}\,\Pi \sin\left(\frac{a\pi}{q} + \frac{a'\pi}{q'}\right) = \sqrt{q}\cdot x + \sqrt{q'}\,y,$$

wo $qx^2 - q'y^2 = 4$, u. s. w. Wenn x und y nicht gerade sind, giebt die Cubirung der Gleichungen

$$x^2 - py^2 = -4, \qquad qx^2 - q'y^2 = 4$$

die Lösung der Gleichungen

$$u^2 - pv^2 = -1, \qquad qu^2 - q'v^2 = +1.$$

I. Zerfällung der Primzahlen p von der Form $4n+1$ in die Summe zweier Quadrate *).

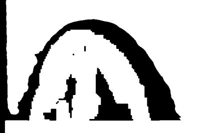
$$p = a^2 + b^2.$$

p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b
5	1	2	257	1	16	557	19	14	853	23	18	1181	5	34	1549	35	18
13	3	2	269	13	10	569	13	20	857	29	4	1193	13	32	1553	23	32
17	1	4	277	9	14	577	1	24	877	29	6	1201	25	24	1597	21	34
29	5	2	281	5	16	593	23	8	881	25	16	1213	27	22	1601	1	40
37	1	6	293	17	2	601	5	24	929	23	20	1217	31	16	1609	3	40
41	5	4	313	13	12	613	17	18	937	19	24	1229	35	2	1613	13	38
53	7	2	317	11	14	617	19	16	941	29	10	1237	9	34	1621	39	10
61	5	6	337	9	16	641	25	4	953	13	28	1249	15	32	1637	31	26
73	3	8	349	5	18	653	13	22	977	31	4	1277	11	34	1657	19	36
89	5	8	353	17	8	661	25	6	997	31	6	1289	35	8	1669	15	38
97	9	4	373	7	18	673	23	12	1009	15	28	1297	1	36	1693	37	18
101	1	10	389	17	10	677	1	26	1013	23	22	1301	25	26	1697	41	4
109	3	10	397	19	6	701	5	26	1021	11	30	1321	5	36	1709	35	22
113	7	8	401	1	20	709	15	22	1033	3	32	1361	31	20	1721	11	40
137	11	4	409	3	20	733	27	2	1049	5	32	1373	37	2	1733	17	38
149	7	10	421	15	14	757	9	26	1061	31	10	1381	15	34	1741	29	30
157	11	6	433	17	12	761	19	20	1069	13	30	1409	25	28	1753	27	32
173	13	2	449	7	20	769	25	12	1093	33	2	1429	23	30	1777	39	16
181	9	10	457	21	4	773	17	22	1097	29	16	1433	37	8	1789	5	42
193	7	12	461	19	10	797	11	26	1109	25	22	1453	3	38	1801	35	24
229	15	2	509	5	22	809	5	28	1117	21	26	1481	35	16	1861	31	30
233	13	8	521	11	20	821	25	14	1129	27	20	1489	33	20	1873	33	28
241	15	4	541	21	10	829	27	10	1153	33	8	1493	7	38	1877	41	14

---

*) Ich lasse hier die Tabellen folgen, die ich in dem vorstehenden Aufsatze erwähnt habe. Die Berechnung der Tabellen I. und II. verdanke ich der Gefälligkeit des Herrn Director *Zornow*.

Oct. 1845. *J.*



p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b
1889	17	40	2621	11	50	3413	7	58	4201	51	40	4993	63	32	5849	35	68
1901	35	26	2633	43	28	3433	27	52	4217	11	64	5009	65	28	5857	9	76
1913	43	8	2657	49	16	3449	43	40	4229	65	2	5021	11	70	5861	31	70
1933	13	42	2677	39	34	3457	39	44	4241	65	4	5077	71	6	5869	45	62
1949	43	10	2689	33	40	3461	31	50	4253	53	38	5081	59	40	5881	75	16
1973	23	38	2693	47	22	3459	45	38	4261	65	6	5101	51	50	5897	11	76
1993	43	12	2729	5	52	3517	59	6	4273	57	32	5113	53	48	5953	57	52
1997	29	34	2741	25	46	3529	35	48	4289	65	8	5153	23	68	5981	59	50
2017	9	44	2749	43	30	3533	13	58	4297	61	24	5189	17	70	6029	77	10
2029	45	2	2753	7	52	3541	25	54	4337	49	44	5197	29	66	6037	41	66
2053	17	42	2777	29	44	3557	49	34	4349	43	50	5209	5	72	6053	47	62
2069	25	38	2789	17	50	3581	59	10	4357	1	66	5233	7	72	6073	77	12
2081	41	20	2797	51	14	3593	53	28	4373	23	62	5237	71	14	6089	67	40
2089	45	8	2801	49	20	3613	43	42	4397	61	26	5261	70	19	6101	25	74
2113	33	32	2833	23	48	3617	41	44	4409	53	40	5273	67	28	6113	73	28
2129	23	40	2837	41	34	3637	39	46	4421	65	14	5281	41	60	6121	45	64
2137	29	36	2857	51	16	3673	37	48	4441	29	60	5297	71	16	6133	7	78
2141	5	46	2861	19	50	3677	59	14	4457	19	64	5309	53	50	6173	53	58
2153	37	28	2897	31	44	3697	49	36	4481	65	16	5333	73	2	6197	71	34
2161	15	44	2909	53	10	3701	55	26	4493	67	2	5381	65	34	6217	21	76
2213	47	2	2917	1	54	3709	53	30	4513	47	48	5393	73	8	6221	61	50
2221	45	14	2953	53	12	3733	57	22	4517	49	46	5413	63	38	6229	73	30
2237	11	46	2957	29	46	3761	25	56	4549	65	18	5417	59	44	6257	79	4
2269	37	30	2969	37	40	3769	13	60	4561	31	60	5437	69	26	6269	37	70
2273	47	8	3001	51	20	3793	33	52	4597	41	54	5441	71	20	6277	79	6
2281	45	16	3037	11	54	3797	41	46	4621	61	30	5449	43	60	6301	75	26
2293	23	42	3041	55	4	3821	61	10	4637	59	34	5477	1	74	6317	29	74
2297	19	44	3049	45	32	3833	53	32	4649	5	68	5501	5	74	6329	77	20
2309	47	10	3061	55	6	3853	3	62	4657	39	56	5521	65	36	6337	71	36
2333	43	22	3089	55	8	3877	31	54	4673	7	68	5557	9	74	6353	73	32
2341	15	46	3109	47	30	3881	59	20	4721	25	64	5569	63	40	6361	69	40
2457	41	26	3121	39	40	3889	17	60	4729	45	52	5573	47	58	6373	17	78
2377	21	44	3137	1	56	3917	61	14	4733	37	58	5581	35	66	6389	55	58
2381	35	34	3169	55	12	3929	35	52	4789	55	42	5641	75	4	6397	59	54
2389	25	42	3181	45	34	3989	25	58	4793	13	68	5653	73	18	6421	39	70
2393	37	32	3209	53	20	4001	49	40	4801	65	24	5657	61	44	6449	7	80
2417	49	4	3217	9	56	4013	13	62	4813	67	18	5669	65	38	6469	63	50
2437	49	6	3221	55	14	4021	39	50	4817	41	56	5689	75	8	6473	43	68
2441	29	40	3229	27	50	4049	55	32	4861	69	10	5093	43	62	6481	9	80
2473	13	48	3253	57	2	4057	59	24	4877	61	34	5701	15	74	6521	11	80
2477	19	46	3257	11	56	4073	37	52	4889	67	20	5717	71	26	6529	65	48
2521	35	36	3301	49	30	4093	27	58	4909	3	70	5737	51	56	6553	37	72
2549	7	50	3313	57	8	4129	23	60	4933	33	62	5741	29	70	6569	13	80
2557	21	46	3329	25	52	4133	17	62	4937	29	64	5749	57	50	6577	81	4
2593	17	48	3361	15	56	4153	43	48	4957	69	14	5801	5	76	6581	41	70
2609	47	20	3373	3	58	4157	59	26	4969	37	60	5813	73	22	6637	61	54
2617	51	4	3389	5	58	4177	9	64	4973	67	22	5821	75	14	6653	53	62

p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b
6661	81	10	7541	71	50	8329	75	52	9181	91	30	10069	87	50	11057	89	56
6673	63	52	7549	85	18	8353	87	28	9209	53	80	10093	93	38	11069	85	62
6689	17	80	7561	75	44	8369	25	88	9221	95	14	10133	23	98	11093	103	22
6701	35	74	7573	87	2	8377	51	76	9241	5	96	10141	85	54	11113	77	72
6709	25	78	7577	59	64	8389	17	90	9257	59	76	10169	13	100	11117	61	86
6733	3	82	7589	65	58	8429	77	50	9277	21	94	10177	31	96	11149	93	50
6737	31	76	7621	15	86	8461	19	90	9281	95	16	10181	95	34	11161	69	80
6761	19	80	7649	55	68	8501	55	74	9293	77	58	10193	97	28	11177	19	104
6781	75	34	7669	87	10	8513	7	92	9337	11	96	10253	83	58	11197	91	54
6793	67	48	7673	83	28	8521	85	36	9341	85	46	10273	87	52	11213	67	82
6829	77	30	7681	25	84	8537	91	16	9349	95	18	10289	17	100	11257	21	1 04
6833	47	68	7717	81	34	8573	43	82	9377	79	56	10301	101	10	11261	5	106
6841	21	80	7741	75	46	8581	65	66	9397	71	66	10313	43	92	11273	53	92
6857	61	56	7753	3	88	8597	89	26	9413	97	2	10321	95	36	11317	9	106
6869	55	62	7757	19	86	8609	53	80	9421	45	86	10333	27	98	11321	85	64
6917	79	26	7789	83	30	8629	23	90	9433	93	28	10337	79	64	11329	95	48
6949	15	82	7793	7	88	8641	71	60	9437	91	34	10357	39	94	11353	93	52
6961	81	20	7817	61	64	8669	85	38	9461	25	94	10369	63	80	11369	37	100
6977	71	44	7829	73	50	8677	81	46	9473	97	8	10429	5	102	11393	103	28
7001	35	76	7841	79	40	8681	91	20	9497	61	76	10433	97	32	11437	51	94
7013	17	82	7853	67	58	8689	15	92	9521	89	40	10453	7	102	11489	55	92
7057	1	84	7873	57	68	8693	73	58	9533	53	82	10457	101	16	11497	101	36
7069	75	38	7877	49	74	8713	93	8	9601	95	24	10477	99	26	11549	107	10
7109	47	70	7901	85	26	8737	41	84	9613	3	98	10501	49	90	11593	107	12
7121	55	64	7933	43	78	8741	79	50	9629	5	98	10513	73	72	11597	19	106
7129	27	80	7937	89	4	8753	17	92	9649	57	80	10529	23	100	11617	49	96
7177	11	84	7949	35	82	8761	75	56	9661	69	70	10589	85	58	11621	65	86
7193	67	52	7993	53	72	8821	89	30	9677	29	94	10597	79	66	11633	103	32
7213	83	18	8009	85	28	8837	1	94	9689	35	92	10601	101	20	11657	29	104
7229	85	2	8017	31	84	8849	65	68	9697	81	56	10613	103	2	11677	21	106
7237	81	26	8053	87	22	8861	5	94	9721	75	64	10657	81	64	11681	41	100
7253	23	82	8069	65	62	8893	53	78	9733	97	18	10709	103	10	11689	5	108
7297	39	76	8081	41	80	8929	73	60	9749	55	82	10729	27	100	11701	105	26
7309	35	78	8089	67	60	8933	47	82	9769	45	88	10733	83	62	11717	79	74
7321	61	60	8093	37	82	8941	29	90	9781	41	90	10753	103	12	11777	31	104
7333	63	58	8101	1	90	8969	35	88	9817	99	4	10781	91	50	11789	83	70
7349	25	82	8117	89	14	9001	51	80	9829	15	98	10789	95	42	11801	101	40
7369	85	12	8161	81	40	9013	87	38	9833	37	92	10837	89	54	11813	47	98
7393	47	72	8209	55	72	9029	95	2	9857	89	44	10853	97	38	11821	61	90
7417	19	84	8221	11	90	9041	95	4	9901	99	10	10861	45	94	11833	13	108
7433	53	68	8233	77	48	9049	93	20	9929	85	52	10889	67	80	11897	109	4
7457	41	76	8237	29	86	9109	55	78	9941	71	70	10909	53	90	11909	97	50
7477	9	86	8269	13	90	9133	93	22	9949	43	90	10937	11	104	11933	107	22
7481	85	16	8273	23	88	9137	71	64	9973	57	82	10949	65	82	11941	95	54
7489	33	80	8293	47	78	9157	79	54	10009	3	100	10957	99	34	11953	17	108
7517	11	86	8297	91	4	9161	85	44	10037	89	46	10973	37	98	11969	65	88
7529	77	40	8317	91	6	9173	73	62	10061	35	94	10993	57	88	11981	109	10
7537	79	36															

II. Zerfällung der Primzahlen p von der Form $6n+1$ in ein Quadrat und das Dreifache eines andern Quadrats.

$$p = A^2 + 3B^2.$$

p	A	B	p	A	B	p	A	B	p	A	B	p	A	B	p	A	B
7	2	1	433	1	12	997	5	18	1567	22	19	2143	46	3	2767	38	21
13	1	2	439	14	9	1009	31	4	1579	16	21	2161	31	20	2791	46	15
19	4	1	457	5	12	1021	7	18	1597	25	18	2179	44	9	2797	47	14
31	2	3	463	10	11	1033	29	8	1609	29	16	2203	4	27	2803	44	17
37	5	2	487	22	1	1039	26	11	1621	13	22	2221	47	2	2833	49	12
43	4	3	499	16	9	1051	32	3	1627	40	3	2239	34	19	2851	52	7
61	7	2	523	4	13	1063	14	17	1657	35	12	2251	8	27	2857	53	4
67	8	1	541	23	2	1069	31	6	1663	34	13	2269	41	14	2887	2	31
73	5	4	547	20	7	1087	2	19	1669	37	10	2281	43	12	2917	53	6
79	2	5	571	8	13	1093	11	18	1693	41	2	2287	10	27	2953	35	24
97	7	4	577	23	4	1117	23	14	1699	32	15	2293	29	22	2971	28	27
103	10	1	601	13	12	1123	16	17	1723	20	21	2311	38	17	3001	53	8
109	1	6	607	10	13	1129	19	16	1741	17	22	2341	37	18	3019	44	19
127	10	3	613	5	14	1153	31	8	1747	40	7	2347	32	21	3037	55	2
139	8	5	619	16	11	1171	32	7	1753	5	24	2371	28	23	3049	43	20
151	2	7	631	22	7	1201	1	20	1759	26	19	2377	5	28	3061	19	30
157	7	6	643	20	9	1213	25	14	1777	7	24	2383	14	27	3067	52	11
163	4	7	661	19	10	1231	34	5	1783	14	23	2389	19	26	3079	14	31
181	13	2	673	25	4	1237	35	2	1789	41	6	2437	43	14	3109	53	10
193	1	8	691	4	15	1249	7	20	1801	37	12	2467	40	17	3121	7	32
199	14	1	709	11	14	1279	14	19	1831	34	15	2473	11	28	3163	56	3
211	8	7	727	22	9	1291	28	13	1861	43	2	2503	50	1	3169	49	16
223	14	3	733	25	6	1297	23	16	1867	28	19	2521	13	28	3181	47	18
229	11	6	739	8	15	1303	34	7	1873	41	8	2539	4	29	3187	40	23
241	7	8	751	26	5	1321	11	20	1879	2	25	2551	26	25	3217	55	8
271	14	5	757	13	14	1327	2	21	1933	31	18	2557	23	26	3229	23	30
277	13	6	769	1	16	1381	37	2	1951	38	13	2593	49	8	3253	35	26
283	16	3	787	28	1	1399	34	9	1987	20	23	2617	43	16	3259	44	21
307	8	9	811	28	3	1423	10	21	1993	35	16	2647	50	7	3271	2	33
313	11	8	823	26	7	1429	29	14	1999	26	21	2659	28	25	3301	43	22
331	16	5	829	23	10	1447	38	1	2011	44	5	2671	22	27	3307	28	29
337	17	4	853	29	2	1453	1	22	2017	17	24	2677	35	22	3313	31	28
349	7	10	859	28	5	1459	28	15	2029	1	26	2683	40	19	3319	38	25
367	2	11	877	17	14	1471	38	3	2053	5	26	2689	31	24	3331	8	33
373	19	2	907	20	13	1483	20	19	2083	44	7	2707	52	1	3343	34	27
379	4	11	919	26	9	1489	17	20	2089	19	24	2713	19	28	3361	17	32
397	17	6	937	13	16	1531	32	13	2113	41	12	2719	14	29	3373	49	18
409	19	4	967	10	17	1543	26	17	2131	16	25	2731	52	3	3391	58	3
421	11	10	991	22	13	1549	31	14	2137	37	16	2749	7	30	3433	19	32

p	*A*	*B*	*p*	*A*	*B*	*p*	*A*	*B*	*p*	*A*	*B*	*p*	*A*	*B*	*p*	*A*	*B*
3457	55	12	4177	17	36	4999	46	31	5827	28	41	6661	37	42	7549	7	50
3463	14	33	4201	43	28	5011	56	25	5839	74	11	6673	79	12	7561	67	32
3469	1	34	4219	56	19	5023	50	29	5851	76	5	6679	46	39	7573	35	46
3499	56	11	4231	58	17	5059	4	41	5857	7	44	6691	8	47	7591	82	17
3511	58	7	4243	64	7	5077	67	14	5869	49	34	6703	34	43	7603	20	49
3517	7	34	4261	53	22	5101	49	30	5881	53	32	6709	19	46	7621	11	50
3529	59	4	4273	65	4	5107	8	41	5923	76	7	6733	49	38	7639	86	9
3541	29	30	4297	35	32	5113	35	36	5953	65	24	6763	80	11	7669	13	50
3547	32	29	4327	38	31	5119	38	35	6007	38	39	6781	73	22	7681	73	28
3559	26	31	4339	64	9	5167	62	21	6037	77	6	6793	61	32	7687	22	49
3571	52	17	4357	5	38	5179	64	19	6043	44	37	6823	14	47	7699	56	39
3583	50	19	4363	16	37	5197	65	18	6067	32	41	6829	79	14	7717	37	46
3607	58	9	4423	34	33	5209	59	24	6073	61	28	6841	67	28	7723	80	21
3613	55	14	4441	37	32	5227	52	29	6079	2	45	6871	82	7	7741	71	30
3631	38	27	4447	58	19	5233	71	8	6091	4	45	6883	16	47	7753	29	48
3637	13	34	4483	40	31	5281	47	32	6121	77	8	6907	80	13	7759	86	11
3643	56	13	4507	20	37	5323	56	27	6133	29	42	6949	59	34	7789	17	50
3673	59	8	4513	25	36	5347	28	39	6151	74	15	6961	7	48	7867	8	51
3691	4	35	4519	62	15	5407	70	13	6163	40	39	6967	82	9	7873	31	48
3697	25	32	4549	43	30	5413	11	42	6199	34	41	6991	38	43	7879	26	49
3709	41	26	4561	47	28	5419	64	21	6211	68	23	6997	83	6	7927	58	39
3727	58	11	4567	2	39	5431	62	23	6217	67	24	7027	20	47	7933	89	2
3733	61	2	4591	22	37	5437	73	6	6229	77	10	7039	58	35	7951	62	37
3739	8	35	4597	67	6	5443	20	41	6247	58	31	7057	73	24	7963	76	27
3769	61	4	4603	64	13	5449	61	24	6271	14	45	7069	71	26	7993	85	16
3793	55	16	4621	17	38	5479	74	1	6277	53	34	7129	77	20	8011	44	45
3823	50	21	4639	46	29	5503	74	3	6301	73	18	7159	46	41	8017	47	44
3847	62	1	4651	68	3	5521	73	8	6337	23	44	7177	37	44	8053	61	38
3853	49	22	4657	65	12	5527	22	41	6343	74	17	7207	2	49	8059	16	51
3877	43	26	4663	10	39	5557	35	38	6361	77	12	7213	79	18	8089	83	20
3889	1	36	4723	56	23	5563	4	43	6367	62	29	7219	4	49	8101	53	42
3907	32	31	4729	29	36	5569	41	36	6373	5	46	7237	85	2	8161	7	52
3919	62	5	4759	14	39	5581	17	42	6379	52	35	7243	56	37	8167	70	33
3931	16	35	4783	26	37	5623	74	7	6397	7	48	7297	65	32	8179	56	41
3943	26	33	4789	67	10	5641	29	40	6421	61	30	7309	31	46	8191	46	45
3967	38	29	4801	1	40	5647	10	43	6433	79	8	7321	83	12	8209	49	44
4003	56	17	4813	65	14	5653	19	42	6451	76	15	7333	85	6	8221	89	10
4021	61	10	4831	34	35	5659	56	29	6469	11	46	7351	74	25	8233	11	52
4027	52	21	4861	23	38	5683	64	23	6481	41	44	7369	59	36	8263	86	17
4051	28	33	4903	70	1	5689	67	20	6529	73	20	7393	71	28	8269	79	26
4057	13	36	4909	47	30	5701	37	38	6547	80	7	7411	28	47	8287	22	51
4093	25	34	4933	59	22	5737	43	36	6553	59	32	7417	85	8	8293	91	2
4099	64	1	4951	58	23	5743	14	43	6571	32	43	7459	16	49	8311	82	23
4111	2	37	4957	25	38	5749	61	26	6577	65	28	7477	83	14	8317	55	42
4129	49	24	4969	13	40	5779	76	1	6607	50	37	7489	41	44	8329	91	4
4153	61	12	4987	68	11	5791	46	35	6619	64	29	7507	68	31	8353	89	12
4159	22	35	4993	65	16	5821	23	42	6637	17	46	7537	25	48	8377	67	36



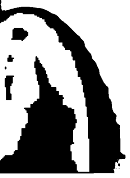
p	A	B	p	A	B	p	A	B	p	A	B	p	A	B	p	A	B
8389	91	6	8941	79	30	9547	92	19	10099	32	55	10753	95	24	11353	91	32
8419	88	15	8971	92	13	9601	97	8	10111	98	13	10771	32	57	11383	106	7
8431	2	53	9001	77	32	9613	95	14	10141	7	58	10789	101	14	11437	97	26
8443	4	53	9007	70	37	9619	88	25	10159	94	21	10831	82	37	11443	80	41
8461	31	50	9013	61	42	9631	98	3	10177	97	16	10837	67	46	11467	32	59
8467	92	1	9043	76	33	9643	64	43	10243	100	9	10861	97	22	11491	104	15
8521	61	40	9049	91	16	9649	89	24	10267	88	29	10867	100	17	11497	107	4
8527	10	53	9067	88	21	9661	73	38	10273	89	28	10891	104	5	11503	86	37
8539	92	5	9091	4	55	9679	98	5	10303	50	51	10903	34	57	11527	70	47
8563	44	47	9103	26	53	9697	17	56	10321	47	52	10909	103	10	11551	74	45
8581	91	10	9109	19	54	9721	53	48	10333	71	42	10939	56	51	11587	100	23
8599	82	25	9127	50	47	9733	91	22	10357	83	34	10957	47	54	11593	59	52
8623	14	53	9133	95	6	9739	44	51	10369	31	56	10987	92	29	11617	47	56
8629	77	30	9151	74	35	9769	19	56	10399	82	35	10993	89	32	11677	73	46
8641	23	52	9157	53	46	9781	67	42	10429	41	54	11047	62	49	11689	83	40
8647	38	49	9181	41	50	9787	92	21	10453	19	58	11059	104	9	11701	13	62
8677	85	22	9187	68	39	9811	8	57	10459	4	59	11071	86	35	11719	94	31
8689	89	16	9199	94	11	9817	77	36	10477	95	22	11083	100	19	11731	92	33
8707	92	9	9241	83	28	9829	59	46	10501	101	10	11113	85	36	11743	106	13
8713	91	12	9277	23	54	9859	28	55	10513	49	52	11119	26	59	11779	52	55
8719	86	21	9283	80	31	9871	38	53	10531	28	57	11131	52	53	11821	17	62
8731	68	37	9319	46	49	9883	76	37	10567	58	49	11149	49	54	11827	68	49
8737	25	52	9337	35	52	9901	49	50	10597	43	54	11161	19	60	11833	61	52
8761	43	48	9343	94	13	9907	52	49	10627	88	31	11173	101	18	11839	26	61
8779	52	45	9349	43	50	9931	88	27	10639	14	59	11197	103	14	11863	46	57
8803	40	49	9391	62	43	9949	89	26	10651	92	27	11239	106	1	11887	38	59
8821	67	38	9397	77	34	9967	98	11	10657	103	4	11251	68	47	11923	4	63
8839	94	1	9403	40	51	9973	35	54	10663	86	33	11257	43	56	11941	43	58
8863	94	3	9421	97	2	10009	91	24	10687	98	19	11287	82	39	11953	71	48
8887	62	41	9433	5	56	10039	74	39	10711	94	25	11299	64	49	11959	86	39
8893	89	18	9439	58	45	10069	61	46	10723	64	47	11317	35	58	11971	8	63
8923	80	29	9463	70	39	10093	1	58	10729	77	40	11329	23	60	12007	10	63
8929	71	36	9511	94	15												

III. Tabelle für die Zerfällung der Primzahlen von der Form $8n+1$ in ein Quadrat und das Doppelte eines andern Quadrats *).

$$p = cc + 2dd.$$

p	c	d	p	c	d	p	c	d	p	c	d	p	c	d	p	c	d
17	3	2	857	27	8	1777	25	24	2753	21	34	3793	61	6	4801	47	36
41	3	4	881	9	20	1801	1	30	2777	27	32	3833	39	34	4817	57	28
73	1	6	929	27	10	1873	35	18	2801	51	10	3881	3	44	4889	69	8
89	9	2	937	17	18	1889	33	20	2833	41	24	3889	19	42	4937	63	22
97	5	6	953	21	16	1913	39	14	2857	47	18	3929	27	40	4969	19	48
113	9	4	977	3	22	1993	29	24	2897	3	38	4001	63	4	4993	49	36
137	3	8	1009	19	18	2017	37	18	2953	19	36	4049	57	20	5009	3	50
193	11	6	1033	31	6	2081	27	26	2969	9	38	4057	23	42	5081	9	50
233	15	2	1049	9	22	2089	17	30	3001	43	24	4073	45	32	5113	71	6
241	13	6	1097	33	2	2113	31	24	3041	27	34	4129	59	18	5153	69	14
257	15	4	1129	29	12	2129	9	32	3049	49	18	4153	25	42	5209	41	42
281	9	10	1153	1	24	2137	43	12	3089	39	28	4177	55	24	5233	25	48
313	5	12	1193	15	22	2153	45	8	3121	23	36	4201	49	30	5273	69	16
337	7	12	1201	7	24	2161	19	30	3137	33	32	4217	57	22	5281	59	30
353	15	8	1217	33	8	2273	15	32	3169	37	30	4241	3	46	5297	57	32
401	3	14	1249	31	12	2281	47	6	3209	3	40	4273	41	36	5393	39	44
409	11	12	1289	33	10	2297	27	28	3217	25	36	4289	33	40	5417	3	52
433	19	6	1297	35	6	2377	35	24	3257	57	2	4297	65	6	5441	21	50
449	21	2	1321	13	24	2393	9	34	3313	55	12	4337	45	34	5449	29	48
457	13	12	1361	3	26	2417	45	14	3329	21	38	4409	39	38	5521	61	30
521	3	16	1409	21	22	2441	33	26	3361	47	24	4441	43	36	5569	31	48
569	21	8	1433	9	26	2473	49	6	3433	29	36	4457	15	46	5641	67	24
577	17	12	1481	33	14	2521	37	24	3449	57	10	4481	63	16	5657	75	4
593	9	16	1489	29	18	2593	1	36	3457	53	18	4513	65	12	5689	71	18
601	23	6	1553	39	4	2609	51	2	3529	1	42	4561	67	6	5737	47	42
617	15	14	1601	33	16	2617	5	36	3593	45	28	4649	51	32	5801	51	40
641	21	10	1609	31	18	2633	51	4	3617	27	38	4657	7	48	5849	21	52
673	5	18	1657	37	12	2657	33	28	3673	55	18	4673	21	46	5857	5	54
761	27	4	1697	27	22	2689	49	12	3697	13	42	4721	39	40	5881	7	54
769	11	18	1721	39	10	2713	11	36	3761	57	16	4729	11	48	5897	45	44
809	3	20	1753	41	6	2729	51	8	3769	59	12	4793	69	4	5953	11	54

*) Der verstorbne Director des altstädtischen Gymnasiums in Königsberg i. Pr., Dr. *Struve*, einer der geistreichsten Philologen, machte mir sehr umfangreiche Papiere zum Geschenk, welche die Zerfällungen aller geraden Zahlen bis 12000 in drei Quadrate enthalten. Aus diesen ist die vorstehende Tabelle entnommen. Leider sind in diesen Berechnungen, welche von ihm zur Zerstreuung in einer schweren Krankheit unternommen wurden, bisweilen einige der oft sehr zahlreichen Zerfällungen einer Zahl ausgelassen, wodurch der Werth dieser mühevollen und interessanten Arbeit verringert wird.



IV. Tabelle der Zahlen m' für das Argument m *).

$$1 + g^m \equiv g^{m'} \pmod{p}.$$

p	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103
g	3	2	6	10	10	10	10	17	5	6	28	10	26	10	10	12	62	5	29	50	30	10	2	35
m																								
0	2	1	5	10	17	8	11	12	11	26	39	30	25	25	47	29	58	8	50	3	72	86	1	70
1	4	8	7	18	6	3	23	8	9	39	25	27	27	45	45	23	69	14	77	56	57	82	69	74
2	1	4	11	8	4	18	3	29	24	32	6	38	33	43	35	61	43	67	18	72	4	76	24	60
3	*	6	4	2	13	14	17	18	35	27	20	22	15	54	28	56	59	53	51	52	66	26	38	100
4	5	9	2	7	12	5	8	6	16	17	22	24	46	33	12	37	20	47	73	25	55	1	30	16
5	3	*	8	9	16	9	26	9	7	11	14	12	24	21	32	6	52	23	66	76	80	40	82	96
6	.	5	*	1	3	21	24	26	20	20	11	43	13	1	57	25	33	16	70	81	76	33	90	36
7	.	3	3	5	14	13	9	23	25	23	33	23	28	9	6	21	24	32	29	23	40	39	11	49
8	.	2	10	*	9	20	13	22	5	3	10	6	5	42	49	47	37	6	23	38	3	61	37	76
9	.	7	1	14	*	19	15	28	28	34	1	4	50	19	2	58	4	55	36	22	26	64	3	53
10	.	.	9	11	1	17	20	5	27	18	37	11	1	48	56	44	61	27	56	68	69	12	93	99
11	.	.	6	4	7	*	27	21	34	7	40	39	40	8	22	43	53	40	39	44	48	88	91	88
12	.	.	.	3	15	7	19	13	6	22	28	45	8	27	17	52	30	9	42	4	43	21	65	35
13	.	.	.	15	11	10	25	24	3	4	12	21	45	37	55	4	10	54	3	77	45	56	71	31
14	.	.	.	6	8	12	*	17	15	29	7	17	37	31	29	41	6	33	20	40	20	92	86	4
15	.	.	.	12	10	6	12	*	10	12	38	25	17	28	31	3	54	11	74	42	34	69	62	72
16	.	.	.	.	2	15	7	3	29	9	31	34	22	30	20	24	25	1	63	61	15	57	21	79
17	.	.	.	.	5	4	16	11	21	5	36	2	16	6	30	15	40	39	49	31	24	85	98	43
18	.	.	.	.	.	1	10	1	*	19	21	14	4	12	52	2	46	49	7	66	71	5	49	19
19	.	.	.	.	.	11	6	10	4	21	32	5	39	39	38	45	50	45	72	69	41	90	51	51
20	.	.	.	.	.	16	5	25	13	*	8	29	30	56	10	30	13	62	24	57	81	31	74	84
21	.	.	.	.	.	2	2	19	31	2	*	15	8	3	24	18	32	20	62	19	11	63	63	66
22	.	.	.	.	.	.	18	14	1	1	30	35	14	26	48	11	7	59	34	2	47	73	36	50
23	.	.	.	.	.	.	21	16	26	28	13	*	18	11	21	36	35	58	60	28	14	29	8	52
24	.	.	.	.	.	.	4	20	30	33	3	13	35	23	1	20	38	12	55	9	82	7	70	15
25	.	.	.	.	.	.	14	4	23	37	19	40	9	32	43	42	3	4	33	59	54	70	13	59
26	.	.	.	.	.	.	1	2	17	15	15	9	*	18	40	31	45	56	13	17	38	46	78	40
27	.	.	.	.	.	.	22	15	19	31	23	32	36	49	36	65	21	3	44	51	62	87	45	7
28	.	.	.	.	.	.	.	27	33	10	35	42	11	5	7	35	15	64	21	60	44	50	76	67
29	.	.	.	.	.	.	.	7	18	36	41	31	47	*	23	9	8	34	26	39	1	37	95	21
30	.	.	.	.	.	.	.	.	14	8	16	18	44	35	*	12	26	2	35	36	9	34	39	8
31	.	.	.	.	.	.	.	.	2	25	29	10	34	22	54	16	5	38	45	43	39	24	33	24
32	.	.	.	.	.	.	.	.	12	35	27	3	10	50	39	60	22	21	11	15	50	16	55	101
33	.	.	.	.	.	.	.	.	32	16	34	8	20	7	9	*	34	24	58	29	10	47	40	71
34	.	.	.	.	.	.	.	.	22	14	2	33	38	57	14	28	36	28	43	35	23	49	44	17
35	.	.	.	.	.	.	.	.	8	6	26	28	51	46	18	51	*	15	54	46	21	30	27	90
36	.	.	.	.	.	.	.	.	.	13	5	1	6	4	37	48	2	*	10	54	49	94	64	9
37	.	.	.	.	.	.	.	.	.	24	9	41	2	40	58	46	1	52	38	8	64	65	12	62
38	.	.	.	.	.	.	.	.	.	30	18	44	23	36	26	7	60	66	40	79	68	48	25	41
39	.	.	.	.	.	.	.	.	.	38	17	16	32	20	3	38	44	63	*	20	36	75	96	86
40	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	37	48	52	50	5	66	61	2	47	86	59	56	46
41	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	24	7	29	47	19	17	49	7	1	*	5	17	61	37

*) Diese Tabelle ist während der Wintervorlesungen 1836—37 von meinen Zuhörern berechnet worden. Vermittelst des seitdem von mir herausgegebnen *Canon Arithmeticus* (Berlin 1839 bei Dümmler) kann dieselbe leicht auf alle Primzahlen unter 1000 ausgedehnt werden. Setzt man nämlich für eine Primzahl p unter 1000 eine Zahl der dort mit *Indices* überschriebnen Tabelle $= m$, so wird die unmittelbar folgende der Tabelle der entsprechende Werth von m'.

p	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103
g	10	26	10	10	12	62	5	29	50	30	10	2	35
m													
42	20	43	14	34	62	57	44	52	7	84	67	15	27
43	19	41	13	13	13	64	5	19	63	28	13	60	22
44	36	49	17	4	55	19	36	9	41	•	62	41	20
45	26	21	24	16	63	48	48	25	53	73	44	79	56
46	.	7	15	15	10	14	30	57	18	42	84	89	48
47	.	19	55	42	26	12	51	14	11	52	3	6	10
48	.	42	38	5	50	55	60	5	1	46	•	67	61
49	.	12	10	11	64	11	35	75	78	85	52	99	54
50	.	31	34	46	8	63	37	71	65	30	38	•	83
51	.	26	2	53	54	31	71	17	12	27	95	50	•
52	.	.	53	41	27	28	42	65	6	13	18	19	33
53	.	.	16	59	57	23	26	8	10	74	66	59	5
54	.	.	29	51	40	9	31	31	32	77	25	43	13
55	.	.	51	27	32	39	22	37	24	65	72	34	65
56	.	.	41	8	34	62	57	12	73	18	19	97	2
57	.	.	44	25	49	67	68	41	34	8	36	17	11
58	.	.	.	33	39	18	19	4	67	67	10	73	78
59	.	.	.	44	14	42	41	53	5	60	28	20	81
60	.	.	.	.	19	51	69	67	62	16	58	16	87
61	.	.	.	.	1	65	29	32	80	35	91	57	98
62	.	.	.	.	33	29	17	47	37	12	15	87	6
63	.	.	.	.	53	17	46	59	50	29	14	75	47
64	.	.	.	.	59	27	70	6	48	58	80	28	3
65	.	.	.	.	22	47	25	68	14	79	89	92	25
66	.	.	.	.	.	16	10	30	45	25	4	10	75
67	.	.	.	.	.	56	18	28	27	78	8	7	55
68	.	.	.	.	.	41	43	46	26	61	22	23	85
69	.	.	.	.	.	68	50	27	64	22	60	2	38
70	.	.	.	.	.	.	65	15	74	58	20	9	69
71	.	.	.	.	.	.	13	22	33	7	45	66	95
72	.	.	.	.	.	.	.	64	58	87	79	48	80
73	.	.	.	.	.	.	.	61	13	19	6	18	94
74	.	.	.	.	.	.	.	69	30	6	51	52	39
75	.	.	.	.	.	.	.	48	16	32	42	88	82
76	.	.	.	.	.	.	.	16	75	31	11	46	14
77	.	.	.	.	.	.	.	76	71	37	71	85	34
78	.	.	.	.	.	.	.	.	21	59	83	14	93
79	.	.	.	.	.	.	.	.	49	17	66	42	29
80	.	.	.	.	.	.	.	.	70	83	41	54	28
81	.	.	.	.	.	.	.	.	55	33	54	32	45
82	.	.	.	.	.	.	.	.	.	70	78	31	64
83	.	.	.	.	.	.	.	.	.	75	43	81	32
84	.	.	.	.	.	.	.	.	.	51	9	5	1
85	.	.	.	.	.	.	.	.	.	63	77	47	26
86	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	72	63
87	.	.	.	.	.	.	.	.	.	56	55	58	57
88	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	53	53	92
89	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	32	80	18
90	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	27	83	23
91	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	35	94	77
92	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	93	29	89
94	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	23	4	44
93	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	74	84	68
95	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	81	77	42

p	101	103
g	2	35
m		
96	26	30
97	35	91
98	22	12
99	68	97
100		58
101		73
102		

11.

Note sur les fonctions Abéliennes,

lue le 29 mai 1843.

(Tiré du *Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Acad. Imp. des sciences de St. Pétersbourg Tome II. No. 7.*)

Soit X une fonction rationnelle et entière de x du sixième degré, et nommons Y la même fonction de y; soit de plus

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}} = \Pi(x), \qquad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \Pi_1(x).$$

Déterminons deux quantités x et y en fonctions de u et v par les équations simultanées

$$\Pi(x)+\Pi(y) = u, \qquad \Pi_1(x)+\Pi_1(y) = v,$$

j'ai fait voir que ce sont ces fonctions de deux variables,

$$x = \lambda(u, v), \qquad y = \lambda_1(u, v),$$

qu'il convient d'introduire dans l'analyse des transcendantes *Abéliennes*, et qui sont analogues aux fonctions trigonométriques et elliptiques. Or je viens de trouver, *que ces fonctions de deux variables se composent algébriquement de fonctions d'une seule variable.* En effet, nommons x' et y' les valeurs de x et de y, que l'on tire des deux équations transcendantes simultanées, en mettant $v=0$, et soient x'' et y'' celles qui répondent à $u=0$: on aura

$$\Pi(x')+\Pi(y') = u, \qquad \Pi_1(x')+\Pi_1(y') = 0,$$
$$\Pi(x'')+\Pi(y'') = 0, \qquad \Pi_1(x'')+\Pi_1(y'') = v,$$

d'où il suit,

$$\Pi(x')+\Pi(y')+\Pi(x'')+\Pi(y'') = u,$$
$$\Pi_1(x')+\Pi_1(y')+\Pi_1(x'')+\Pi_1(y'') = v.$$

Mais, d'après le théorème d'*Abel*, on sait exprimer deux quantités x et y en fonctions *algébriques* des quatre variables x', x'', y', y'', de manière que l'on a les deux équations

$$u = \Pi(x')+\Pi(y')+\Pi(x'')+\Pi(y'') = \Pi(x)+\Pi(y),$$
$$v = \Pi_1(x')+\Pi_1(y')+\Pi_1(x'')+\Pi_1(y'') = \Pi_1(x)+\Pi_1(y).$$

Donc les deux fonctions x et y déterminées par les équations simultanées

$$\Pi(x)+\Pi(y) = u, \qquad \Pi_1(x)+\Pi_1(y) = v,$$

sont des fonctions algébriques des quatre quantités x', x'', y', y'', qui ne sont

elles-mêmes que des fonctions d'une seule variable, ou en d'autres termes, ***les deux fonctions de deux variables $\lambda(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$ s'expriment algébriquement par les quatre fonctions d'une seule variable***

$$\lambda(u,o),\quad \lambda_1(u,o),$$
$$\lambda(o,v),\quad \lambda_1(o,v).$$

La même remarque s'applique aux transcendantes *Abéliennes*, dans lesquelles la fonction X est d'un degré quelconque *).

---

*) Dans un mémoire publié dans le vol. 27 du Journal de M. *Crelle* page 185, M. *Eisenstein* s'est mépris sur la nature des fonctions $\lambda(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$, faute d'avoir bien saisi le principe fondamental de la coëxistence des périodes relatives aux deux argumens u et v. Le mémoire „Sur les fonctions à deux variables et à quatre périodes" tome XIII page 55 a posé les vrais principes dans cette branche nouvelle de l'analyse.

On sait que la fonction $x = \sin\operatorname{am}(u)$ est donnée en u au moyen d'une équation *linéaire*, $A+Bx=0$, A et B étant des fonctions de u qui ont une valeur unique et finie pour chaque valeur finie, réelle ou imaginaire, de l'argument u. D'une manière analogue, étant données les deux équations établies ci-dessus,

$$\Pi(x)+\Pi(y)=u,\qquad \Pi_1(x)+\Pi_1(y)=v,$$

les quantités x et y se trouvent être les deux racines d'une équation *quadratique*

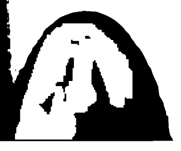
$$A+Bt+Ct^2=0,$$

où A, B, C sont des fonctions de u et v qui ont une valeur unique et finie pour toutes les valeurs finies, réelles ou imaginaires des deux argumens u et v. C'est là la véritable nature des fonctions x et y. Le caractère de la fonction $\sin\operatorname{am}(u)$ étant d'être un *quotient* $-\frac{B}{A}$, M. *Eisenstein* dit (pg. 180), que, par analogie, dans la théorie des intégrales Abéliennes il faudrait considérer *des quotients de quotients*. Mais qu'est ce que c'est que *des quotients de quotients?* C'est tout simplement *des quotients*.

Dans le même mémoire M. *Eisenstein* a considéré certains produits doublement infinis, que l'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques, et qu'il n'a pas reconnus être du nombre de ceux qui prennent des valeurs différentes suivant l'ordre dans lequel on range les facteurs. Ces erreurs, ayant été reproduites dans un autre mémoire (page 285 du même volume), ont été la cause, que M. *Eisenstein* y a établi des formules fautives relatives aux fonctions $\Theta(x)$. Les formules exactes ont été données depuis longtemps dans le mémoire tome IV pg. 382.

Oct. 1845. J.





12.

Über einige, die elliptischen Functionen betreffenden Formeln.

Es sei

$$x = \sin\operatorname{am}(u, k), \quad \int_0^u (1-k^2x^2)\,du = E(u), \quad \int_0^u E(u) = \log\Omega.$$

Bedeutet $F(x)$ den rationellen Nenner der Substitution, welche eine Transformation der $n$ten Ordnung ergiebt, und $\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$ die transformirte Function, so wird

$$1.\quad F(x) = e^{-\tau uu}\cdot\frac{\Omega\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)}{(\Omega u)^n},$$

wo τ eine Constante ist. (S. *Crelle's* Journal Bd. IV. S. 374.) Es sei

$$x^2 = u^2(1 + S_1^{(2)}u^2 + S_2^{(2)}u^4 + \text{etc.}),$$

so wird

$$E(u) = u - k^2u^3\left\{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5}S_1^{(2)}u^2 + \tfrac{1}{7}S_2^{(2)}u^4 + \text{etc.}\right\},$$

$$2.\quad \log\Omega(u) = \tfrac{1}{2}u^2 - k^2u^4\left\{\frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{5\cdot6}S_1^{(2)}u^2 + \frac{1}{7\cdot8}S_2^{(2)}u^4 + \text{etc.}\right\}.$$

Ist $T_m^{(2)}$ dieselbe Function von λ wie $S_m^{(2)}$ von k, so folgt aus (1.) und (2.):

$$\log F(x) = -k^2\varrho u^2 - \frac{\lambda^2u^4}{M^4}\left(\frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{5\cdot6}T_1^{(2)}\frac{u^2}{M^2} + \frac{1}{7\cdot8}T_2^{(2)}\frac{u^4}{M^4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ nk^2u^4\left(\frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{5\cdot6}S_1^{(2)}u^2 + \frac{1}{7\cdot8}S_2^{(2)}u^4 + \text{etc.}\right),$$

wo, wie am a. O. S. 372 (6.), $k\varrho = \frac{n}{2} + \tau - \frac{1}{2M^2}$. Setzt man jetzt

$$u^n = x^n\{1 + R_1^{(n)}x^2 + R_2^{(n)}x^4 + \text{etc.}\},$$
$$\log F(x) = C_1x^2 + C_2x^4 + C_3x^6 + \text{etc.},$$

so wird

$$3.\quad C_m = -k^2\varrho R_{m-1}^{(2)} - \lambda^2\left(\frac{R_{m-2}^{(4)}}{3\cdot4\cdot M^4} + \frac{R_{m-3}^{(6)}T_1^{(2)}}{5\cdot6\cdot M^6} + \frac{R_{m-4}^{(8)}T_2^{(2)}}{7\cdot8\cdot M^8} + \text{etc.}\right)$$
$$+ nk^2\left(\frac{R_{m-2}^{(4)}}{3\cdot4} + \frac{R_{m-3}^{(6)}S_1^{(2)}}{5\cdot6} + \frac{R_{m-4}^{(8)}S_2^{(2)}}{7\cdot8} + \text{etc.}\right).$$

Diese Formel umfafst auch die Multiplication. Soll nämlich $F(x)$ den Nenner in dem Ausdrucke von $\sin\operatorname{am}(nu)$ bedeuten, so hat man in (1.) und dem vor-

stehenden Werthe von C_m nur $\tau = \varrho = 0$, $\lambda = k$, $M = n$ zu setzen; ferner n^2 für n und S für T. Hiedurch erhält man

$$C_m = -k^2\left\{\frac{n^4-n^2}{3\cdot 4}R^{(4)}_{m-2} + \frac{n^6-n^2}{5\cdot 6}R^{(6)}_{m-3}S^{(2)}_1 + \frac{n^8-n^2}{7\cdot 8}R^{(8)}_{m-4}S^{(2)}_2 + \text{etc.}\right\}.$$

Auf diesem und ähnlichem Wege erhält man die von Herrn Dr. *Eisenstein* gegebnen, auf die Multiplication und Transformation bezüglichen Formeln, und zwar als eine unmittelbare Folge der Theoreme, durch welche man vermittelst der Transcendente $\Omega(u)$ den Zähler und Nenner der Multiplications- und Transformationsformeln abgesondert definiren kann.

Setzt man $\{(1-x^2)(1-k^2x^2)\}^{-\frac{1}{2}} = 1 + c_1x^2 + c_2x^4 + \cdots$ und

4. $$\tfrac{1}{2}u^2 - \log\Omega(u) = k^2x^4(D_0 + D_1x^2 + D_2x^4 + \cdots)$$
$$= k^2\int(1 + c_1x^2 + c_2x^4 + \cdots)(\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}c_1x^5 + \tfrac{1}{7}c_2x^7 + \cdots)\,dx,$$

so wird

$$D_n = \frac{1}{2n+4}\left(\frac{1}{2n+3}c_n + \frac{1}{2n+1}c_1c_{n-1} + \frac{1}{2n-1}c_2c_{n-2} + \cdots \tfrac{1}{3}c_n\right).$$

Die Gröfse D_{n-2} ist die in (3.) und *Fund.* S. 126 etc. vorkommende,

$$\frac{1}{3\cdot 4}R^{(4)}_{n-2} + \frac{1}{5\cdot 6}S^{(2)}_1R^{(6)}_{n-3} + \frac{1}{7\cdot 8}S^{(2)}_2R^{(8)}_{n-4} + \cdots \frac{1}{(2n-1)2n}S^{(2)}_{n-2}\ ^{*}).$$

Für $k^2 = -1$ oder für die Lemniscate wird $\frac{d^2\cdot x^m}{du^2} = m(m-1)x^{m-2} - m(m+1)x^{m+2}$. Man erhält daher aus (4.), durch zweimalige Differentiation nach u,

$$x^2 = 3\cdot 4D_0x^2 + 5\cdot 6D_1x^4 + 7\cdot 8D_2x^6 + 9\cdot 10D_3x^8 + 11\cdot 12D_4x^{10} + \cdots$$
$$-\{4\cdot 5D_0x^6 + 6\cdot 7D_1x^8 + 8\cdot 9D_2x^{10} + \cdots\},$$

und hieraus $D_1 = D_3 = \cdots = 0$, $D_0 = \frac{1}{3\cdot 4}$, $D_2 = \frac{1\cdot 5}{3\cdot 7\cdot 8}$, etc., also

$$\log\Omega(u) - \tfrac{1}{2}uu = \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{5\cdot x^8}{3\cdot 7\cdot 8} + \frac{5\cdot 9\cdot x^{12}}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 12} + \frac{5\cdot 9\cdot 13\cdot x^{16}}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 15\cdot 16} + \cdots$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$\tfrac{1}{2}uu = \tfrac{1}{2}\left(\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}\right)^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{3\cdot x^6}{5\cdot 6} + \frac{3\cdot 7\cdot x^{10}}{5\cdot 9\cdot 10} + \frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot x^{14}}{5\cdot 9\cdot 13\cdot 14} + \cdots,$$

$$(n+1)\int_0^u du\int_0^u x^n\,du = \frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{(n+3)x^{n+6}}{(n+5)(n+6)} + \frac{(n+3)(n+7)x^{n+10}}{(n+5)(n+9)(n+10)} + \cdots,$$

$$\tfrac{1}{2}u^2\log x - \int_0^u du\int_0^u \log x\,du = \frac{b_0x^2}{2} + \frac{3b_1x^6}{5\cdot 6} + \frac{3\cdot 7\cdot b_2x^{10}}{5\cdot 9\cdot 10} + \cdots,$$

wo $b_i = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{4i+1} + \frac{1}{4i+2}$.

Berlin, im Dec. 1845.

---

*) Am a. O. fehlen die Factoren $R^{(4)}_{n-2}$, $R^{(6)}_{n-3}$, etc.; auch ist *Fund.* S. 130 Z. 10 für $m+n$ zu lesen $2m+n$.

13.

Über den Werth, welchen das bestimmte Integral $\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-A\cos\varphi-B\sin\varphi}$ für beliebige imaginäre Werthe von A und B annimmt.

Ich will im Folgenden den Werth untersuchen, welchen das bestimmte Integral

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-A\cos\varphi-B\sin\varphi}$$

annimmt, wenn die Constanten A und B beliebige imaginäre Werthe haben, welche jedoch nicht so beschaffen sein dürfen, dafs die Function unter dem Integralzeichen für einen reellen Werth von φ unendlich werden kann. Wenn die Constanten A und B reell sind, ist bekanntlich die Bedingung $AA+BB<1$ erforderlich, damit der Ausdruck unter dem Integralzeichen für keinen reellen Werth des Winkels φ unendlich werden kann. Wenn man aber den Fall der Realität von A und B ausschliefst und

$$A=a+a'\sqrt{-1},\qquad B=b+b'\sqrt{-1}$$

setzt, wo a, a', b, b' reell sind und a' und b' nicht beide gleichzeitig verschwinden, so kann für einen reellen Werth von φ der Ausdruck unter dem Integralzeichen nur unendlich werden oder der Nenner

$$1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi$$

verschwinden, wenn zu gleicher Zeit

$$a\cos\varphi+b\sin\varphi=1,\qquad a'\cos\varphi+b'\sin\varphi=0$$

wird. Setzt man also

$$\cos\varphi=\frac{b'}{\sqrt{(a'a'+b'b')}},\qquad \sin\varphi=\frac{-a'}{\sqrt{(a'a'+b'b')}},$$

so mufs

$$ab'-a'b=\sqrt{(a'a'+b'b')}$$

werden. Dies ist also die Bedingung, welche Statt finden mufs, damit für einen reellen Werth des Winkels φ der Nenner $1-A\cos\varphi-B\sin\varphi$ verschwinden

kann. Man kann dieselbe auch so darstellen:

$$aa'+bb' = \sqrt{(a'a'+b'b')}\cdot\sqrt{(aa+bb-1)}.$$

Schliefst man also den Fall aus, wo diese Gleichung zwischen den Constanten a, b etc. Statt findet, wie es nöthig ist, damit das zu betrachtende Integral nicht unendlich oder unbestimmt werde, so wird der absolute Werth der Gröfse $ab'-a'b$ entweder gröfser oder kleiner als $\sqrt{(a'a'+b'b')}$ sein. Ich will im Folgenden diese Gröfse mit

$$\Delta = ab'-a'b$$

bezeichnen und, was erlaubt ist, *positiv* annehmen. Wenn nämlich Δ nicht positiv ist, so kann man es leicht dazu machen, indem man blofs $2\pi-\varphi$ für φ setzt, wodurch die Gränzen der Integration und a und a' ungeändert bleiben, während gleichzeitig b und b' und also auch Δ das Zeichen ändern.

Ich bemerke zunächst folgende identische Gleichung:

$$\frac{1}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$= \frac{1}{n-n'\sqrt{-1}}\left\{\frac{1}{1-Ce^{\varphi\sqrt{-1}}}+\frac{1}{1-C'e^{-\varphi\sqrt{-1}}}-1\right\},$$

wo

$$n-n'\sqrt{-1} = \sqrt{(1-AA-BB)}$$
$$= \sqrt{(1-(a+a'\sqrt{-1})^2-(b+b'\sqrt{-1})^2)},$$

ferner

$$C = \frac{a+b'+(a'-b)\sqrt{-1}}{1+n-n'\sqrt{-1}} = \frac{A-B\sqrt{-1}}{1+\sqrt{(1-AA-BB)}},$$

$$C' = \frac{a-b'+(a'+b)\sqrt{-1}}{1+n-n'\sqrt{-1}} = \frac{A+B\sqrt{-1}}{1+\sqrt{(1-AA-BB)}}.$$

Das Zeichen der Wurzelgröfse, deren Werth durch $n-n'\sqrt{-1}$ ausgedrückt wird, ist willkürlich; ich werde annehmen, dafs es so bestimmt ist, *dafs ihr reeller Theil n einen positiven Werth erhält.*

Es ist jetzt zu untersuchen, ob die *Moduln* von C und C' gröfser oder kleiner als 1 sind, dieses Wort in dem Sinne von *Cauchy* genommen. Hiezu bemerke ich, dafs

$$CC' = \frac{1-n+n'\sqrt{-1}}{1+n-n'\sqrt{-1}};$$

es ist also das Product der Moduln von C und C',

$$\sqrt{\frac{(1-n)^2+n'n'}{(1+n)^2+n'n'}},$$



da n positiv angenommen worden, kleiner als 1. Mithin können nicht beide Moduln gleichzeitig gröſser als 1 sein, sondern der kleinere von beiden wird nothwendig < 1. Es sind aber die Moduln von C und C' respective die Gröſsen

$$\sqrt{\frac{aa+a'a'+bb+b'b'+2\varDelta}{(1+n)^2+n'n'}}, \qquad \sqrt{\frac{aa+a'a'+bb+b'b'-2\varDelta}{(1+n)^2+n'n'}},$$

von denen, da $\varDelta$ positiv angenommen worden, die letztere die kleinere ist, und es ist daher *der Modul von C' immer* < 1. Es handelt sich also nur noch darum, ob der Modul von C oder die erste der beiden vorstehenden Gröſsen gröſser oder kleiner als 1 ist. Man findet hierfür ein einfaches Criterium durch folgende Betrachtungen.

Das Product aus den Quadraten der Moduln von C und C' ist

$$\frac{(aa+a'a'+bb+b'b')^2-4\varDelta\varDelta}{(1+nn+n'n'+2n)^2} = \frac{1+nn+n'n'-2n}{1+nn+n'n'+2n}.$$

Es wird daher

$$(aa+a'a'+bb+b'b')^2-4\varDelta\varDelta = (1+nn+n'n')^2-4nn.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daſs je nachdem $\varDelta$ kleiner oder gröſser als n ist, auch $aa+a'a'+bb+b'b'$ kleiner oder gröſser als $1+nn+n'n'$ und daher *a fortiori* auch $aa+a'a'+bb+b'b'+2\varDelta$ kleiner oder gröſser als $1+nn+n'n'+2n$ ist. *Es wird daher der Modul von C kleiner oder gröſser als* 1, *je nachdem $\varDelta$ kleiner oder gröſser als n ist.*

Da $(n-n'\sqrt{-1})^2 = 1-(a+a'\sqrt{-1})^2-(b+b'\sqrt{-1})^2$, so werden die Gröſsen n und n' durch die beiden folgenden Gleichungen bestimmt:

$$nn-n'n' = 1-aa+a'a'-bb+b'b', \qquad nn' = aa'+bb'.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\begin{aligned}(\varDelta\varDelta+n'n')(\varDelta\varDelta-nn) &= \varDelta^4+\varDelta^2(aa+bb-a'a'-b'b')-(aa+bb)(a'a'+b'b')\\ &= (\varDelta\varDelta+aa+bb)(\varDelta\varDelta-a'a'-b'b').\end{aligned}$$

Man ersieht hieraus den Satz, daſs $\varDelta$ kleiner oder gröſser als n oder $=n$ ist, je nachdem $\varDelta$ kleiner oder gröſser als $\sqrt{(a'a'+b'b')}$ oder $=\sqrt{(a'a'+b'b')}$ ist. Das gefundne Criterium kann man daher so ausdrücken: *je nachdem* $(ab'-a'b)^2$ *kleiner oder gröſser als* $a'a'+b'b'$, *wird der Modul von C kleiner oder gröſser als* 1. Den Fall $\varDelta = \sqrt{(a'a'+b'b')}$ haben wir oben ausgeschlossen.

Da der Modul von C' immer <1, so wird

$$\frac{1}{1-C'e^{-\varphi\sqrt{-1}}} = 1+C'e^{-\varphi\sqrt{-1}}+C'^2e^{-2\varphi\sqrt{-1}}+C'^3e^{-3\varphi\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$

Es wird ferner, je nachdem der Modul von C gröfser oder kleiner als 1,

$$\frac{1}{1-Ce^{\varphi\sqrt{-1}}}-1 = Ce^{\varphi\sqrt{-1}}+C^2e^{2\varphi\sqrt{-1}}+C^3e^{3\varphi\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$

oder

$$\frac{1}{1-Ce^{\varphi\sqrt{-1}}}-1 = -\{1+C^{-1}e^{-\varphi\sqrt{-1}}+C^{-2}e^{-2\varphi\sqrt{-1}}+C^{-3}e^{-3\varphi\sqrt{-1}}+\text{etc.}\}.$$

Je nachdem daher $(ab'-a'b)^2$ *kleiner oder gröfser als* $a'a'+b'b'$, *mufs man, um eine convergirende Reihe zu haben, entweder*

$$\frac{n-n'\sqrt{-1}}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$= 1+Ce^{\varphi\sqrt{-1}}+C^2e^{2\varphi\sqrt{-1}}+C^3e^{3\varphi\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$
$$+C'e^{-\varphi\sqrt{-1}}+C'^2e^{-2\varphi\sqrt{-1}}+C'^3e^{-3\varphi\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$

oder

$$\frac{n-n'\sqrt{-1}}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$=(C'-C^{-1})e^{-\varphi\sqrt{-1}}+(C'^2-C^{-2})e^{-2\varphi\sqrt{-1}}+(C'^3-C^{-3})e^{-3\varphi\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$

setzen. Man erhält hieraus folgende Sätze:

I. *Wenn* a, a', b, b' *beliebige reelle Gröfsen sind, welche die Ungleichheit*

$$(ab'-a'b)^2 > a'a'+b'b'$$

erfüllen, so wird

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi} = 0,$$

und allgemein, wenn $ab'-a'b$ *positiv ist, für jedes ganze positive* i,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos i\varphi\cdot d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$=\sqrt{-1}\int_0^{2\pi}\frac{\sin i\varphi\, d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}.$$

II. *Wenn* a, a', b, b' *beliebige reelle Gröfsen sind, welche die Ungleichheit*

$$(ab'-a'b)^2 < a'a'+b'b'$$

erfüllen, so wird

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$=\frac{2\pi}{\sqrt{\{1-(a+a'\sqrt{-1})^2-(b+b'\sqrt{-1})^2\}}},$$

wenn man die Wurzelgröfse so bestimmt, dafs ihr reeller Theil positiv wird.

Die Gröfse C^{-1} wird vermittelst des oben für CC' gegebnen Werthes,

$$C^{-1} = \frac{1+n-n'\sqrt{-1}}{1-n+n'\sqrt{-1}}\cdot C' = \frac{a-b'+(a'+b)\sqrt{-1}}{1-n+n'\sqrt{-1}}.$$

Es wird daher

$$\frac{C'-C^{-1}}{n-n'\sqrt{-1}} = \frac{-2(a-b'+(a'+b)\sqrt{-1})}{(a+a'\sqrt{-1})^2+(b+b'\sqrt{-1})^2} = \frac{-2}{a+b'+(a'-b)\sqrt{-1}}.$$

Man hat daher den Satz:

Wenn a, a', b, b' beliebige reelle Gröfsen sind, welche die Ungleichheit $(ab'-a'b)^2 > a'a'+b'b'$ erfüllen und $ab'-a'b$ positiv ist, so wird

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$= \sqrt{-1}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$
$$= \frac{-2\pi}{a+b'+(a'-b)\sqrt{-1}}.$$

Setzt man

$$a+b'+(a'-b)\sqrt{-1} = D,$$
$$a-b'+(a'+b)\sqrt{-1} = D',$$

so wird

$$n-n'\sqrt{-1} = \sqrt{(1-DD')}$$

und daher

$$C = \frac{D}{1+\sqrt{(1-DD')}} = \frac{1-\sqrt{(1-DD')}}{D'},$$
$$C' = \frac{D'}{1-\sqrt{(1-DD')}} = \frac{1-\sqrt{(1-DD')}}{D}.$$

Wendet man diese Ausdrücke an, so erhält man aus den oben gegebnen Reihenentwicklungen die folgenden allgemeinen Sätze.

IV. *Es seien a, a', b, b' beliebige reelle Gröfsen, welche jedoch nicht die Gleichung $(ab'-a'b)^2 = a'a'+b'b'$ erfüllen; es sei ferner $ab'-a'b$ positiv und*

$$a+b'+(a'-b)\sqrt{-1} = D, \qquad a-b'+(a'+b)\sqrt{-1} = D';$$

ist $(ab'-a'b)^2 < a'a'+b'b'$, so wird für ein ganzes positives i:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos i\varphi\, d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{(1-DD')}}\cdot\frac{D^i+D'^i}{\{1+\sqrt{(1-DD')}\}^i},$$
$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin i\varphi\, d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi} = \frac{\pi\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-DD')}}\cdot\frac{D^i-D'^i}{\{1+\sqrt{(1-DD')}\}^i};$$

wenn dagegen $(ab'-a'b)^2 > a'a'+b'b'$ *ist, so wird für ein ganzes positives* i:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos i\varphi \, d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$

$$=\sqrt{-1}\int_0^{2\pi} \frac{\sin i\varphi \, d\varphi}{1-(a+a'\sqrt{-1})\cos\varphi-(b+b'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$

$$=-\pi\frac{\{1+\sqrt{(1-DD')}\}^i-\{1-\sqrt{(1-DD')}\}^i}{\sqrt{(1-DD')}\cdot D^i},$$

wo die Wurzelgröfse $\sqrt{(1-DD')}$ *immer so zu bestimmen ist, dafs ihr reeller Theil positiv wird.*

Man ersieht aus dem vorstehenden Theorem, dafs für den Fall, wo $(ab'-a'b)^2 < a'a'+b'b'$, genau dieselben Formeln als für reelle Werthe von A und B gelten; dafs dagegen für den andern Fall, wo $(ab'-a'b)^2 > a'a'+b'b'$, ganz verschiedene Resultate Statt finden. Um diese Resultate unmittelbar durch die Gröfsen A und B darzustellen, braucht man in den vorstehenden Formeln nur die Werthe $D=A+B\sqrt{-1}$, $D'=A-B\sqrt{-1}$ zu substituiren. Giebt man dem Nenner durch Multiplication mit einer imaginären Constante die Form

$$\alpha+\alpha'\sqrt{-1}-(\beta+\beta'\sqrt{-1})\cos\varphi-(\gamma+\gamma'\sqrt{-1})\sin\varphi,$$

wo α, α', β etc. reell sind, so werden die beiden zu unterscheidenden Fälle die, wo $(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2$ kleiner und wo es gröfser als $(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2+(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)^2$ ist. Man wird also z. B. den Satz haben, dafs *wenn für reelle Gröfsen* α, α', β *etc. die Ungleichheit*

$$(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2 > (\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2+(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)^2$$

Statt findet, das bestimmte Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\alpha+\alpha'\sqrt{-1}-(\beta+\beta'\sqrt{-1})\cos\varphi-(\gamma+\gamma'\sqrt{-1})\sin\varphi}$$

verschwindet.

Berl. d. 14. Febr. 1846.

14.

Beweis des Satzes, dafs jede nicht fünfeckige Zahl eben so oft in eine gerade als ungerade Anzahl verschiedener Zahlen zerlegt werden kann.

Wenn man eine ganze positive Zahl P auf alle mögliche Arten aus andren, von einander verschiednen, ganzen positiven Zahlen durch Addition zusammensetzt, so wird die Anzahl dieser Zusammensetzungen der Coëfficient von q^P in der Entwicklung des unendlichen Products

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots.$$

Darf bei den Zusammensetzungen dieselbe Zahl wiederholt angewandt werden, so wird ihre Anzahl der Coëfficient von q^P in der Entwicklung des Bruchs

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots},$$

wie man sogleich sieht, wenn man jeden Factor $\frac{1}{1-q}$, $\frac{1}{1-q^2}$ etc. besonders entwickelt, und die erhaltnen Reihen mit einander multiplicirt. Die letztere Betrachtung veranlafste *Euler*, den Nenner dieses Bruchs durch wirkliche Ausführung der Multiplication zu bilden, und er entdeckte, dafs in dem erhaltnen Producte nur solche Potenzen von q übrig bleiben, deren Exponenten die in der Formel $\frac{1}{2}(3ii \pm i)$ enthaltnen, sogenannten fünfeckigen Zahlen sind; dafs sich ferner die Coëfficienten dieser Potenzen immer auf die Einheit reduciren, und zwar auf die positive, wenn i gerade, auf die negative, wenn i ungerade ist. Man findet diese merkwürdige Induction in dem 16ten Capitel des 4ten Theiles seiner *Introductio in Analysin Infinitorum*, welches von der Theilung der Zahlen handelt, und mit wenigen Abänderungen und Auslassungen aus einer Abhandlung gleichen Inhaltes entnommen ist, welche *Euler* im 3ten Bande der Neuen Petersb. Comm. für die Jahre 1750 und 51 (S. 155 ff.) publicirt hat. Er hatte aber diese glückliche Bemerkung bereits im J. 1740 gemacht, wie aus einem von Hrn. Staatsrath von *Fufs* publicirten Briefe *Daniel Bernoullis* vom 28. Jan. 1741 erhellt *). *Euler* erlangte hiedurch für die Entwicklungs-

---

*) *Correspondance Mathématique et Physique de quelques célèbres Géomètres du 17ième siècle t. II pg. 467.* „Das *problema de combinandis numeris datam sum-*

coëfficienten des obigen Bruchs eine einfache Recursionsscale, und indem er das unendliche Product und die ihr gleiche Reihe logarithmisch differentiirte, später auch eine ähnliche Recursionsscale für die Factorensumme der auf einander folgenden natürlichen Zahlen. S. die Abhandlung *„Observatio de Summis Divisorum"* *im 5ten Bande der Neuen Comm. für die Jahre 1754 und 55 S. 59—74.* Aber diese Anwendungen mufsten gegen den Umstand ganz unbedeutend erscheinen, dafs hier zum ersten Male in der Analysis eine Entwicklung auftrat, in welcher die Exponenten eine *arithmetische Reihe zweiter Ordnung* bilden. Einen einfachen Beweis des von ihm durch Induction gefundnen Resultats gab *Euler* bereits in dem zuletzt genannten Bande der *Neuen Comm.*, in einer Abhandlung *Demonstratio Theorematis Circa Ordinem in Summis Divisorum Observatum (S. 75—83).* Derselbe Beweis wurde von ihm 25 Jahre später, wenige Jahre vor seinem Tode, in dem *1ten Theile des 4ten Bandes der Acta der Petersb. Ak. für das Jahr 1780* in der Abhandlung *Evolutio producti infiniti* $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots$ *in seriem simplicem* etwas modificirt, so wie er auch in demselben Bande in der Abhandlung *De mirabilibus proprietatibus Numerorum Pentagonalium* die Anwendung auf die rücklaufende Bildung der Factorensummen wiederholt hat. In den *Philosophical Transactions vom Jahr 1788 (S. 388—394)* hat *Eduard Waring* in der Abh. *„Some Properties of the Sum of the Divisors of Numbres"* diese letztre Arbeit *Eulers* wiedergegeben, ohne etwas hinzuzufügen und ohne den *Eulerschen* Beweis des Entwicklungsgesetzes des unendlichen Productes mitzutheilen. Von diesem Beweise findet man nur in dem Wörterbuche des gelehrten *Klügel* unter dem Artikel *Pentagonalzahlen* Erwähnung gethan, bis ich im J. 1829 in meinen *Fundamentis Novis Theoriae Functionum Ellipticarum* wieder auf denselben aufmerksam gemacht habe. Die dort bewiesnen Theoreme geben Entwicklungen unendlicher Producte in Reihen, in denen die Exponenten eine *beliebige* Reihe zweiter Ordnung bilden.

---

mam efficientibus ist *in casibus particularibus* gar leicht: einige Circumstanzen machen, dafs man die *regulam generalem* nicht siehet, doch aber kann man die *methodum generalem* anzeigen. Den *calculum* von Ihrem Exempel *de numero 50 in 7 partes dividendo* habe ich nicht gemacht, solches aber meinem Vetter *Nicolas Bernoulli* gegeben, welcher eben die Zahl gefunden, die Ew. herausgebracht. Das andre *problema, transformare expressionem* $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{n^3}\right)\ldots$ *in seriem* $1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^5}+\frac{1}{n^7}-\frac{1}{n^{12}}-\frac{1}{n^{15}}+$ etc. kommt auch leicht *per inductionem* heraus, wenn man viele *factores* von der *proposita expressione actu* multiplicirt."



Setzt man nämlich in den in den *Fundamentis* gegebenen Formeln q^n statt q und $z = \pm q^m$, so erhält man die Gleichungen,

$$(1-q^{n-m})(1-q^{n+m})(1-q^{2n})(1-q^{3n-m})(1-q^{3n+m})(1-q^{4n})\ldots = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^i q^{nii+mi},$$

$$(1+q^{n-m})(1+q^{n+m})(1-q^{2n})(1+q^{3n-m})(1+q^{3n+m})(1-q^{4n})\ldots = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{nii+mi},$$

deren erste für $n = \frac{3}{2}$, $m = \frac{1}{2}$ die *Eulersche* Formel giebt. *Gaufs* hat im 1[ten] *Bande der Göttinger Commentarien für die Jahre 1808—11* in seiner Abhandlung *Summatio Serierum quarundam singularium* zuerst wieder nach *Euler* das Beispiel einer ähnlichen Entwicklung eines unendlichen Productes gegeben, welches der zweiten der beiden vorstehenden allgemeinen Formeln für die Werthe $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$ entspricht. Ob er das *Eulersche* Resultat gekannt hat, läfst sich aus seiner Arbeit nicht ersehen. *Legendre* hat in der *dritten* Ausgabe seiner *Théorie des Nombres* Th. II. S. 128 einen Beweis der *Eulerschen* Formel gegeben, der von dem *Eulerschen* Beweise verschieden ist. Da er bei dieser Gelegenheit nur der ersten Arbeiten *Eulers* über diesen Gegenstand in der *Introductio* und dem Bande III. der *Novi Commentarii* Erwähnung thut, wo das Resultat durch Induction gefunden wird, so scheint *Legendre* den *Beweis*, den später *Euler* selbst gegeben hat, nicht gekannt zu haben.

Obgleich ich in den *Fundamentis Novis* zwei einfache Beweise der allgemeinen Formeln mitgetheilt habe, und insbesondere der zweite dieser Beweise einen ganz elementaren Character hat, so scheint es mir doch nicht ohne Interesse, auf jenen schönen *Eulerschen*, den Mathematikern fast unbekannt gebliebnen Beweis der speciellen Formel zurückzukommen. Ich werde daher im Folgenden den *Eulerschen* Beweis seinem wesentlichen Gedankengange nach reproduciren, den Resultaten aber dadurch eine gröfsere Allgemeinheit geben, dafs ich die von *Euler* gebrauchte Methode auf begränzte Producte anwende. Ich werde ferner hiebei der *Eulerschen* Formel den correspondirenden Satz über die Theilung der Zahlen substituiren, und diesen Satz selbst ohne Vermittlung von unendlichen Producten oder Reihen beweisen.

Aus der *Eulerschen* Formel folgt nämlich der nachstehende Satz, aus welchem sie selbst wieder eine unmittelbare Folge ist:

Jede Zahl, welche nicht die Form $\frac{1}{2}(3ii \pm i)$ hat, kann eben so oft in eine gerade als in eine ungerade Menge andrer von einander verschiedner Zahlen zerlegt werden; Zahlen von der Form $\frac{1}{2}(3ii \pm i)$ aber können in

eine gerade Menge *einmal* mehr oder weniger als in eine ungerade zerlegt werden, und zwar das eine oder das andre, je nachdem i gerade oder ungerade ist.

Diesen aus der *Eulerschen* Formel sich ergebenden Satz bemerkt auch *Legendre* am angeführten Orte. Es wird dadurch eine elementare Operation, das Abzählen, wie oft eine Zahl aus einer geraden oder ungeraden Menge andrer von einander verschiedner durch Addition zusammengesetzt werden kann, in eine Beziehung zu der *Dreitheilung der elliptischen Integrale* gesetzt, welcher die *Eulersche* Formel in der Theorie der elliptischen Functionen entspricht. Ich wende mich jetzt zu dem Beweise selbst.

Wenn man eine Gröfse P auf alle mögliche Arten aus andern, welche unter sich und von Null verschieden sind, und aus der Zahl gegebner Elemente α, β, γ etc. genommen werden sollen, durch Addition zusammensetzt, ohne dabei ein Element wiederholt anzuwenden, so will ich den Überschufs der Anzahl derjenigen Zusammensetzungen, in welchen die Zahl der angewandten Elemente gerade ist, über die Anzahl derjenigen, in welchen diese Zahl ungerade ist, durch

$$(P, \alpha, \beta, \gamma, \ldots.)$$

bezeichnen, wobei ich unter Überschufs sowohl eine positive als eine negative Gröfse verstehen werde. Wenn die gegebnen Elemente α, β, γ etc. alle positiv sind, so kann der Werth von P nicht kleiner als das kleinste derselben und nicht gröfser als die Summe aller sein, widrigenfalls die Gröfse $(P, \alpha, \beta, \gamma, \ldots.)$ verschwindet. Die Ordnung, in welcher die Elemente α, β etc. geschrieben werden, ist, wie man sieht, gleichgültig.

Um den nachfolgenden Sätzen eine allgemeine Gültigkeit zu geben, will ich ferner festsetzen, dafs für $P = 0$ das Zeichen $(P, \alpha, \beta, \gamma, \ldots.)$ den angegebnen Überschufs *noch um 1 vermehrt* bedeute, und dafs die Gröfse $(P, \alpha, \beta, \gamma, \ldots.)$ verschwinde, so wie eines der Elemente α, β etc. $= 0$ wird.

Wenn man den im Vorigen bezeichneten Überschufs nur in Bezug auf diejenigen Zusammensetzungen von P betrachtet, in welchen das Element α nicht vorkommt, so wird dieser Theil desselben $(P, \beta, \gamma, \ldots.)$. Jeder Zusammensetzung ferner, in welcher α unter den Elementen vorkommt, entspricht eine andre von $P-\alpha$ aus den übrigen gegebnen Elementen. Aber da die Anzahl der Elemente, die bei der Zusammensetzung verwendet werden, um *eines* geringer geworden ist, ist zugleich aus einer geraden immer eine ungerade, aus einer ungeraden eine gerade Anzahl geworden. Es wird daher der andre

Theil des Überschusses, welcher sich auf die Zusammensetzungen von P bezieht, bei welchen das Element α concurrirt, durch $-(P-\alpha, \beta, \gamma, \ldots.)$ ausgedrückt. Hieraus folgt die Formel

$$\text{I.}\quad (P, \alpha, \beta, \gamma, \ldots.) = (P, \beta, \gamma, \ldots.) - (P-\alpha, \beta, \gamma, \ldots.),$$

welche, wie man sich leicht überzeugt, unter den festgesetzten Bestimmungen auch auf diejenigen Fälle ausgedehnt werden kann, in welchen P oder $P-\alpha$ oder eines der Elemente α, β etc. verschwindet.

Für *ein* Element α wird in Folge der gegebnen Definitionen $(P, \alpha) = 0$, 1 oder -1, je nachdem P von α und 0 verschieden, $= 0$ oder $= \alpha$ ist; es wird ferner $(P, \alpha) = 0$, wenn $P = \alpha = 0$. *Wenn man daher mit*

$$[N]$$

eine Gröfse bezeichnet, welche $= 1$ *ist, wenn N verschwindet, und* $= 0$ *ist, wenn N von 0 verschieden ist*, so wird in allen Fällen

$$\text{II.}\quad (P, \alpha) = [P] - [P-\alpha].$$

Auf den Formeln I. und II. beruht die ganze nachstehende Untersuchung.

Ich betrachte das Aggregat

$$(b_0, a) + (b_1, a, a_1) + (b_2, a, a_1, a_2) \ldots. + (b_{m-1}, a, a_1, \ldots. a_{m-1}),$$

in welchem die Elemente a, a_1, ... a_{m-1} eine beliebige arithmetische Reihe und die Zahlen b_0, b_1, ... b_{m-1} eine arithmetische Reihe mit der Differenz $-a$ bilden. Dieses Aggregat verwandelt sich mittelst I. in folgendes:

$$\begin{aligned}\text{III.}\quad (b_0, a) + (b_1, a_1) + (b_2, a_1, a_2) + (b_3, a_1, a_2, a_3) \ldots. &+ (b_{m-1}, a_1, a_2, \ldots. a_{m-1})\\ -(b_2, a_1) \quad -(b_3, a_1, a_2) \quad \ldots. &-(b_{m-1}, a_1, a_2, \ldots. a_{m-2})\\ &-(b_m, a_1, a_2, \ldots. a_{m-1}).\end{aligned}$$

In diesem Ausdruck reducire man je zwei unter einander stehende Terme mittelst der aus I. folgenden Formel

$$(P, a_1, a_2, \ldots. a_{i+1}) - (P, a_1, a_2, \ldots. a_i) = -(P - a_{i+1}, a_1, a_2, \ldots. a_i).$$

Wenn man

$$c_i = b_{i+1} - a_{i+1}$$

setzt, und die aus II. sich ergebende Gleichung

$$(b_0, a) + (b_1, a_1) = [b_0] - [c_0]$$

zu Hülfe ruft, so erhält man hiedurch

$$\begin{aligned}\text{IV.}\quad (b_0, a) + (b_1, a, a_1) + (b_2, a, a_1, a_2) \ldots. &+ (b_{m-1}, a, a_1, \ldots. a_{m-1})\\ = [b_0] - [c_0] &- (b_m, a_1, a_2, \ldots. a_{m-1})\\ -\{(c_1, a_1) + (c_2, a_1, a_2) + (c_3, a_1, a_2, a_3) \ldots. &+ (c_{m-2}, a_1, a_2, \ldots. a_{m-2})\}.\end{aligned}$$

Da $c_{i+1} - c_i = -a - a_{i+2} + a_{i+1} = -a_1$, so bilden die Gröfsen c_0, c_1, c_2 etc.

... arithmetische Reihe mit der constanten Differenz a_1. Bestimmt man nach und nach die $k-1$ Gröfsen d_i, e_i, ... z_i durch die ähnlichen Gleichungen,

$$d_i = c_{i+1} - a_{i+1}, \quad e_i = d_{i+1} - a_{i+1}, \quad f_i = e_{i+1} - a_{i+1}, \text{ etc.}, \quad z_i = y_{i+1} - a_{i+1},$$

so werden die Gröfsen d_i, e_i, f_i, ... y_i, z_i arithmetische Reihen bilden, welche respective die Gröfsen $-a_2$, $-a_3$, ... $-a_{k-1}$, $-a_k$ zu ihrer constanten Differenz haben. Setzt man

$$(b_0, a) + (b_1, a, a_1) + (b_2, a, a_1, a_2) \dots + (b_{m-1}, a, a_1, a_2, \dots a_{m-1}) = A_1,$$
$$(c_1, a_1) + (c_2, a_1, a_2) + (c_3, a_1, a_2, a_3) \dots + (c_{m-2}, a_1, a_2, a_3, \dots a_{m-2}) = A_2,$$
$$(d_2, a_2) + (d_3, a_2, a_3) + (d_4, a_2, a_3, a_4) \dots + (d_{m-3}, a_2, a_3, a_4, \dots a_{m-3}) = A_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(y_{k-1}, a_{k-1}) + (y_k, a_{k-1}, a_k) + (y_{k+1}, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}) \dots + (y_{m-k}, a_{k-1}, a_k, \dots a_{m-k}) = A_k,$$

so wird durch IV. das Aggregat A_1 auf A_2 zurückgeführt. Da aber die Aggregate A_1, A_2, ... A_k alle auf dieselbe Art gebildet sind, so kann man durch analoge Formeln A_2 auf A_3, A_3 auf A_4 etc. zurückführen. Wenn man nämlich nach und nach c und d für b und c, d und e für c und d u. s. f., ferner immer $m-2$ für m setzt, und jedesmal alle Indices um 1 vergröfsert, so giebt die Formel IV. das folgende System Gleichungen:

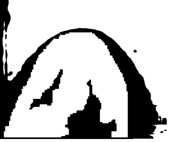
$$A_1 + A_2 = [b_0] - [c_0] - (b_m, a_1, a_2, \dots a_{m-1}),$$
$$A_2 + A_3 = [c_1] - [d_1] - (c_{m-1}, a_2, a_3, \dots a_{m-2}),$$
$$A_3 + A_4 = [d_2] - [e_2] - (d_{m-2}, a_3, a_4, \dots a_{m-3}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A_{k-1} + A_k = [x_{k-2}] - [y_{k-2}] - (x_{m-k+2}, a_{k-1}, a_k, \dots a_{m-k+1}).$$

Wenn man in der 2ten, 4ten etc. Gleichung alle Zeichen ändert, und dann sämmtliche Gleichungen addirt, so erhält man hieraus

$$\text{V.} \quad A_1 + (-1)^k A_k$$
$$= [b_0] - [c_1] + [d_2] \dots + (-1)^k [x_{k-2}]$$
$$- [c_0] + [d_1] - [e_2] \dots - (-1)^k [y_{k-2}]$$
$$- (b_m, a_1, a_2, \dots a_{m-1}) + (c_{m-1}, a_2, a_3, \dots a_{m-2}) - \dots$$
$$\dots - (-1)^k (x_{m-k+2}, a_{k-1}, a_k \dots a_{m-k+1}).$$

Da im letzten Aggregat mit jedem folgenden Term sich die Zahl der Elemente um zwei verringert, so ist der gröfste Werth, welchen k annehmen kann, je nachdem m gerade oder ungerade ist, $k = \frac{1}{2} m$ oder $k = \frac{1}{2}(m+1)$. Für den ersten Werth von k reducirt sich der oben für A_k gegebne Ausdruck auf

$$(y_{k-1}, a_{k-1}) + (y_k, a_{k-1}, a_k) = (y_{k-1}, a_{k-1}) + (y_k, a_k) - (y_{k+1}, a_k)$$
$$= [y_{k-1}] - [z_{k-1}] - (y_{k+1}, a_k).$$



oder auf

$$A_{\frac{1}{2}m} = [y_{\frac{1}{2}m-1}] - [z_{\frac{1}{2}m-1}] - (y_{\frac{1}{2}m+1}, a_{\frac{1}{2}m}),$$

für den zweiten Werth von k wird derselbe

$$A_{\frac{1}{2}(m+1)} = (y_{\frac{1}{2}(m-1)}, a_{\frac{1}{2}(m-1)}) = [y_{\frac{1}{2}(m-1)}] - [z_{\frac{1}{2}(m-3)}].$$

Man erhält daher aus V., wenn man dem Index k seinen gröfsten Werth giebt,

$$\text{VI.}\quad (b_0, a) + (b_1, a, a_1) + (b_2, a, a_1, a_2) \dots + (b_{m-1}, a, a_1, \dots a_{m-1})$$
$$= \Delta - (b_m, a_1, a_2, \dots a_{m-1}) + (c_{m-1}, a_2, a_3, \dots a_{m-2}) - \text{etc.},$$

wo man den Ausdruck rechts bis

$$(-1)^{\frac{1}{2}m}(y_{\frac{1}{2}m+1}, a_{\frac{1}{2}m})$$

oder bis

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}\cdot(x_{\frac{1}{2}(m+3)}, a_{\frac{1}{2}(m-1)}, a_{\frac{1}{2}(m+1)})$$

fortsetzen mufs, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Es wird ferner

$$\text{VII.}\quad \Delta = [b_0] - [c_0] - [c_1] + [d_1] + [d_2] - [e_2] - \text{etc.},$$

welchen Ausdruck man, je nachdem m gerade oder ungerade, bis

$$(-1)^{\frac{1}{2}m-1}[y_{\frac{1}{2}m-1}] + (-1)^{\frac{1}{2}m}[z_{\frac{1}{2}m-1}]$$

oder bis

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}[y_{\frac{1}{2}(m-1)}] + (-1)^{\frac{1}{2}(m+1)}[z_{\frac{1}{2}(m-3)}]$$

fortzusetzen hat, *in welchem letztern Ausdruck das zweite Glied dadurch von dem allgemeinen Bildungsgesetze abweicht, dafs sein Index um* 1 *verringert ist.* Da zufolge der oben gegebnen Definition $[N]=1$ oder 0, je nachdem $N=0$ oder von 0 verschieden ist, so wird Δ im Allgemeinen nur 0 oder ± 1 werden.

Die Gröfsen b_m, c_{m-1}, d_{m-2} etc. in VI. bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung, deren erste Differenzreihe $-a_m$, $-a_{m-1}$, $-a_{m-2}$ etc. ist. Die Gröfsen b_0, c_1, d_2, e_3, ... y_{k-1} und c_0, d_1, e_2, ... z_{k-1} in VII. bilden ebenfalls arithmetische Reihen zweiter Ordnung, deren erste Differenzreihen respective

$$-(a_2+2a),\quad -(a_3+2a_1),\quad \dots\quad -(a_k+2a_{k-2}),$$
$$-(2a_1+a_2),\quad -(2a_2+a_3),\quad \dots\quad -(2a_{k-1}+a_k)$$

sind, von denen man die erstre auch so darstellen kann

$$-(a+2a_1),\quad -(a_1+2a_2),\quad -(a_2+2a_3),\quad \dots\quad -(a_{k-2}+2a_{k-1}),$$

wo immer $k=\frac{1}{2}m$ oder $\frac{1}{2}(m+1)$. Setzt man

$$s_i = a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_i,$$

so werden diese beiden Reihen zweiter Ordnung,

$$b_0,\ b_1-2s_1,\ b_1-s_1-2s_2,\ b_1-s_2-2s_3,\ \dots\ b_1-s_{k-2}-2s_{k-1},$$
$$b_1-s_1,\ b_1-2s_1-s_2,\ b_1-2s_2-s_3,\ \dots\ b_1-2s_{k-2}-s_{k-1},\ b_1-2s_{k-1}-s_k.$$

Die in diesen beiden Reihen enthaltnen Gröfsen machen alle aus, welche in den Ausdruck VII. von Δ eingehen, wenn man noch für den Fall eines ungeraden m zu dem letzten Terme der zweiten Reihe a_k addirt, wodurch er sich in

$$b_1 - 3s_{k-1}$$

verwandelt. *Wenn keine dieser Gröfsen verschwindet, verschwindet Δ; wenn aber eine dieser Gröfsen verschwindet, wird Δ abwechselnd $+1$ und -1; ist nämlich $b_1 = s_{i-1} + 2s_i$ oder $b_1 = 2s_{i-1} + s_i$, so wird der Werth von Δ durch $(-1)^i$ bestimmt.*

In dem besondern Falle, wenn *zwei* von den angegebnen Gröfsen verschwinden, hat man auf jede derselben die vorstehende Regel anzuwenden, und erhält dann für Δ einen der drei Werthe 0, $+2$, -2.

Da man nach dem Vorigen die Gröfse Δ als gegeben ansehn kann, so reducirt sich durch die Formel VI. das vorgelegte Aggregat auf ein andres, das nur aus der *halben* Zahl Terme besteht. Sind die Gröfsen a, a_1, a_2 etc. alle positiv, so bilden die Gröfsen b_m, c_{m-1}, d_{m-2} etc. eine abnehmende Reihe, da alle Glieder ihrer ersten Differenzreihe $-a_m$, $-a_{m-1}$, $-a_{m-2}$ etc. negativ sind. In diesem Falle bietet daher die Formel VI. noch dadurch eine andre Reduction des vorgelegten Aggregates dar, dafs die kleineren Elemente, welche die gröfste Zahl der Zusammensetzungen hervorbringen, allmälig fortfallen, und die durch Addition der gegebnen Elemente zu bildenden Zahlen selber kleiner werden. Wenn man aber noch aufserdem die Zahl m so grofs annimmt, dafs $b_m = b_0 - ma$ kleiner als das kleinste der Elemente a_1, a_2, ... a_{m-1} wird, in welchem Falle *a fortiori* auch die Gröfsen c_{m-1}, d_{m-2} etc. kleiner als diese Elemente werden, so verschwinden in VI. alle Terme des Aggregates rechts vom Gleichheitszeichen, und der vorgelegte Ausdruck reducirt sich lediglich auf die Gröfse Δ. Nimmt man noch an, dafs die Elemente a, a_1, a_2 etc. eine *wachsende* Reihe bilden, so hat man den folgenden Satz:

Es seien b_0 und a positive Gröfsen, ma ein die Gröfse b_0 übertreffendes Vielfache von a; es sei b_0, b_1, b_2 etc. eine abnehmende arithmetische Reihe mit der constanten Differenz $-a$ und a, a_1, a_2 etc. eine beliebige wachsende arithmetische Reihe; ferner sei

$$s_i = a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_i:$$

so wird das Aggregat

$$(b_0, a) + (b_1, a, a_1) + (b_2, a, a_1, a_2) \ldots + (b_{m-1}, a, a_1, \ldots a_{m-1})$$

verschwinden, außer wenn b_1 einer der Größen

$$s_{i-1}+2s_i \quad \text{oder} \quad 2s_{i-1}+s_i$$

gleich wird, und in diesem Falle den Werth $(-1)^i$ erhalten.

Da nach der gemachten Voraussetzung $b_1 < (m-1)a$, $s_i > ia$ ist, so kann b_1 nur die Werthe von solchen Größen $s_{i-1}+2s_i$, $2s_{i-1}+s_i$ annehmen, welche unter den oben angegebnen enthalten sind. Es gilt also der vorstehende Satz ohne eine Beschränkung für die Werthe von i. Man braucht ferner den einen nicht in der allgemeinen Form enthaltnen Werth $3s_{\frac{1}{2}(m-1)}$ nicht in Betracht zu ziehen, da ihn b_1 nicht erreichen kann.

Für $a=0$ verschwindet das vorgelegte Aggregat. Setzt man für diesen Fall in der Formel VI.

$$b_0=b_1=b_m=P, \quad c_{m-1}=P_1, \quad d_{m-2}=P_2, \quad \text{etc.},$$

und $a_i=i$, was der Allgemeinheit keinen Eintrag thut, so bilden P, P_1, P_2 etc. eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung, deren erste Differenzreihe $-m$, $-m+1$, $-m+2$ etc. ist, so daß allgemein

$$\text{VIII.} \quad P_i = P-im+\tfrac{1}{2}i(i-1) = P-\tfrac{1}{2}i(2m-i+1)$$

wird. Es wird ferner $s_{i-1}=\frac{1}{2}i(i-1)$, $s_i=\frac{1}{2}i(i+1)$ und

$$b_1-2s_{i-1}-s_i = P-\tfrac{1}{2}i(3i-1), \quad b_1-s_{i-1}-2s_i = P-\tfrac{1}{2}i(3i+1).$$

Die Formel VI. reducirt sich daher für diese besondre Annahme auf

$$\text{IX.} \quad (P,1,2,\ldots.m-1)-(P_1,2,3,\ldots.m-2)+(P_2,3,4,\ldots.m-3)-\ldots.=\Delta,$$

wo der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen, je nachdem m gerade oder ungerade ist, bis

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-2)}(P_{\frac{1}{2}(m-2)},\tfrac{1}{2}m) \quad \text{oder} \quad (-1)^{\frac{1}{2}(m-3)}(P_{\frac{1}{2}(m-3)},\tfrac{1}{2}(m-1),\tfrac{1}{2}(m+1)),$$

d. h. bis

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-2)}(P-\tfrac{1}{8}(m-2)(3m+4),\tfrac{1}{2}m) \quad \text{oder}$$
$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-3)}(P-\tfrac{1}{8}(m-3)(3m+5),\tfrac{1}{2}(m-1),\tfrac{1}{2}(m+1))$$

fortzusetzen ist, *und wenn P eine der Zahlen $\frac{1}{2}(3ii\pm i)$ bis $\frac{1}{8}m(3m-2)$ oder $\frac{1}{8}(m-1)(3m-1)$ ist, $\Delta=(-1)^i$, wenn P den Werth $\frac{3}{8}(mm-1)$ annimmt, $\Delta=(-1)^{\frac{1}{2}(m+1)}$, und endlich, wenn P keine dieser Zahlen ist, $\Delta=0$ wird.*

Wenn $P\leqq m-1$, so werden P_1, P_2 etc. negativ, und es reducirt sich daher der erste Theil der Gleichung IX. auf seinen ersten Term. Da ferner die Zusammensetzungen von $P=m-1$ aus den Zahlen $1, 2, \ldots.\ m-1$ alle möglichen Zusammensetzungen von P aus ganzen positiven Zahlen sind, so erhält man aus IX., wenn man $P=m-1$ setzt, den zu beweisenden Satz:

Der Überschufs der Anzahl der Zusammensetzungen einer Zahl P aus einer geraden Zahl über die Anzahl Zusammensetzungen ihrer aus einer ungeraden Zahl verschiedner ganzer positiver Zahlen, ist, wenn P eine fünfeckige Zahl $\frac{1}{2}(3ii \pm i)$ ist, $= (-1)^i$ und verschwindet für alle übrigen Werthe von P.

Es sind nämlich alle Werthe $\frac{1}{2}(3ii \pm i)$, welche $P \leqq m-1$ annehmen kann, in den Werthen bis $\frac{1}{8}(3mm-2m)$ oder $\frac{1}{8}(m-1)(3m-1)$ enthalten, und den besondern Werth $\frac{3}{8}(m-1)(m+1)$ kann eine Zahl, welche $\leqq m-1$ ist, nicht annehmen.

So wie der vorstehende Satz der *Eulerschen* Formel

$$\text{X.}\quad (1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots. = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}$$

entspricht, so entsprechen auch die andern im Vorigen gefundnen Sätze analytischen Formeln. Setzt man die constante Differenz der Reihe a, a_1, a_2 etc. der *Einheit* gleich, ferner

$$q^a = z,$$

und

$$f_m(z) = (1-z) + z(1-z)(1-qz) + z^2(1-z)(1-qz)(1-q^2z)\ldots.$$
$$\ldots. + z^{m-1}(1-z)(1-qz)\ldots.(1-q^{m-1}z),$$

so entspricht der Satz IV. der Formel

$$\text{XI.}\quad f_m(z) = 1 - qz^2 - q^2z^3 f_{m-2}(qz) - z^m(1-qz)(1-q^2z)\ldots.(1-q^{m-1}z).$$

Dem Satze VI. entsprechen, je nachdem m gerade oder ungerade ist, die Formeln

$$\text{XII.}a.\quad f_m(z) = 1 + \sum_1^{\frac{1}{2}m}(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii-i)} z^{3i-1} + \sum_1^{\frac{1}{2}m-1}(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)} z^{3i}$$
$$-\sum_0^{\frac{1}{2}m-1}(-1)^i q^{\frac{1}{2}i(2m-i-1)} z^{m+i}(1-q^{i+1}z)(1-q^{i+2}z)\ldots.(1-q^{m-i-1}z),$$

$$\text{XII.}b.\quad f_m(z) = 1 + \sum_1^{\frac{1}{2}(m-1)}(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii-i)} z^{3i-1} + \sum_1^{\frac{1}{2}(m-1)}(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)} z^{3i}$$
$$+(-1)^{\frac{1}{2}(m+1)} q^{\frac{1}{8}(mm-1)} z^{\frac{1}{2}(3m+1)}$$
$$-\sum_0^{\frac{1}{2}(m-3)}(-1)^i q^{\frac{1}{2}i(2m-i-1)} z^{m+i}(1-q^{i+1}z)(1-q^{i+2}z)\ldots.(1-q^{m-i-1}z).$$

Setzt man in XII.a. $m = 2n$, $z = r^n$, $q = r^{-1}$, so verschwindet die zweite Horizontalreihe, da jedes der unter dem Summenzeichen enthaltnen Producte den verschwindenden Factor $1-q^{\frac{1}{2}m}z$ enthält. Die Formel XII.a. verwandelt sich daher für diese Annahme in die folgende:

XIII. $$(1-r^n)+r^n(1-r^n)(1-r^{n-1})+r^{2n}(1-r^n)(1-r^{n-1})(1-r^{n-2})\dots$$
$$\dots+r^{n(n-1)}(1-r^n)(1-r^{n-1})\dots(1-r)$$
$$=1+\sum_1^n(-1)^i r^{\frac{1}{2}(3i-1)(2n-i)}+\sum_1^{n-1}(-1)^i r^{\frac{1}{2}i(6n-3i-1)}$$
$$=1-r^{2n-1}-r^{3n-2}+r^{5n-5}+r^{6n-7}-r^{8n-12}-\dots+(-1)^n r^{\frac{1}{2}(3nn-n)}.$$

Dieselbe Formel erhält man auch aus XII. *b.*, sowohl wenn man $m=2n-1$, als wenn man $m=2n+1$ setzt.

Setzt man immer $z=r^n$, $q=r^{-1}$, so bleibt, wenn nur $n<m$ genommen wird, der Werth von $f_m(z)$ derselbe, wie in der vorstehenden Formel XIII.,

$$(1-r^n)+r^n(1-r^n)(1-r^{n-1})\dots+r^{n(n-1)}(1-r^n)(1-r^{n-1})\dots(1-r).$$

Es mufs daher auch die rechte Seite in XII. *a.* und *b.*, wenn man darin $z=r^n$, $q=r^{-1}$ setzt, für alle Werthe von m, welche $>n$ sind, denselben Werth behalten.

Für $z<1$ und $m=\infty$ erhält man aus XII. die Formel

XIV. $$(1-z)+z(1-z)(1-qz)+z^2(1-z)(1-qz)(1-q^2z)+\text{etc. in inf.}$$
$$=1-qz^2-q^2z^3+q^5z^5+q^7z^6-q^{12}z^8-q^{15}z^9+\text{etc. in inf.}$$
$$=1+\sum_1^\infty(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii-i)}z^{3i-1}+\sum_1^\infty(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}z^{3i}.$$

Setzt man in XII. zuerst $z=1$ und dann $m=\infty$, so erhält man die *Euler*sche Formel X.

Ich will bei dieser Gelegenheit die beiden Formeln beweisen, welche ich in meinen *Fundamentis* S. 186 9), 10) ohne Beweis mitgetheilt habe.

Es sei

$$\varphi(z)=1-\frac{q(1-z^2)}{1-q^2}+\frac{q^4(1-z^2)(1-q^2z^2)}{(1-q^2)(1-q^4)}-\frac{q^9(1-z^2)(1-q^2z^2)(1-q^4z^2)}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\dots$$
$$+\frac{z}{q}\left\{q-\frac{q^4(1-z^2)}{1-q^2}+\frac{q^9(1-z^2)(1-q^2z^2)}{(1-q^2)(1-q^4)}-\frac{q^{16}(1-z^2)(1-q^2z^2)(1-q^4z^2)}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\dots\right\}.$$

Da

$$\frac{1-q^{2m}z^2}{1-q^{2m+2}}-\frac{z}{q}=\frac{(1+q^{2m+1}z)(1-q^{-1}z)}{1-q^{2m+2}},$$
$$q^{mm}+q^{(m+1)^2}\cdot\frac{z}{q}=q^{mm}(1+q^{2m}z),$$

so kann man die Function $\varphi(z)$ noch auf folgende beide Arten darstellen,

$$\varphi(z) = 1 - \frac{q(1+qz)(1-q^{-1}z)}{1-q^2} + \frac{q^4(1-z^2)(1+q^3z)(1-q^{-1}z)}{(1-q^2)(1-q^4)}$$
$$- \frac{q^9(1-z^2)(1-q^2z^2)(1+q^5z)(1-q^{-1}z)}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \ldots,$$
$$= 1 + z - \frac{q(1-z^2)(1+q^2z)}{1-q^2} + \frac{q^4(1-z^2)(1-q^2z^2)(1+q^4z)}{(1-q^2)(1-q^4)}$$
$$- \frac{q^9(1-z^2)(1-q^2z^2)(1-q^4z^2)(1+q^6z)}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \ldots,$$

woraus

$$\varphi(z) = (1+z)\varphi(qz)$$

folgt. Diese Gleichung giebt

$$\frac{\varphi(z)}{\varphi(0)} = \frac{\varphi(z)}{\varphi(qz)} \cdot \frac{\varphi(qz)}{\varphi(q^2z)} \cdot \frac{\varphi(q^2z)}{\varphi(q^3z)} \ldots \text{ in inf.}$$
$$= (1+z)(1+qz)(1+q^2z)(1+q^3z)\ldots$$

Für $z = 1$ reducirt sich die vorgelegte Function $\varphi(z)$ auf 2. Es wird daher, wenn man die vorstehende Gleichung durch

$$\frac{1}{2}\frac{\varphi(1)}{\varphi(0)} = \frac{1}{\varphi(0)} = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots$$

dividirt,

$$\varphi(z) = \frac{(1+z)(1+qz)(1+q^2z)(1+q^3z)\ldots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots}.$$

Setzt man in diesem und dem oben für $\varphi(z)$ angegebnen Ausdrucke $-z$ für z, und nimmt die halbe Summe und Differenz von $\varphi(z)$ und $\varphi(-z)$, so erhält man die beiden in den *Fundamentis* gegebnen Formeln. Für $z = -q$ giebt dieselbe Formel die Entwicklung

$$\frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \text{etc.}$$

Für $z = 0$ erhält man

$$\frac{1}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots}$$
$$= 1 - \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} - \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \ldots$$

Aus der von *Euler* in der *Introductio* (Cap. XVI. §. 313.) gegebnen Formel

$$\frac{1}{(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)\ldots} = 1 + \frac{qz}{1-q} + \frac{q^2z^2}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^3z^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \ldots$$

würde man für dieselbe Gröfse den Ausdruck

$$1 - \frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)} - \frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \text{etc.}$$

erhalten.

Berlin, den 12. Mai 1846.

15.

Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite.

„Berlin, le 6 août 1845.

„... Les principes dont vous partez pour parvenir aux formules de la transformation inverse que j'ai publiées sans démonstration dans le Journal de M. *Crelle*, sont précisément les mêmes qui d'abord m'ont conduit à ces formules. Ensuite, j'avais fait une espèce de tour de force en prouvant ces formules par la substitution même des expressions si compliquées de radicaux faite dans l'équation différentielle à laquelle elles doivent satisfaire. Pour mieux faire saisir l'esprit de cette dernière démonstration en quelque sorte synthétique, j'ai commencé par publier une application de la même méthode à la démonstration des formules de la transformation directe, dans un Mémoire imprimé dans le Journal de M. *Crelle*, tome VI, pages 397 et suivantes. Plus tard, je suis parvenu à une troisième démonstration qui repose entièrement sur la décomposition de $\frac{\theta(x+a)}{\theta(x)}$ en fractions simples, pour laquelle j'ai établi les formules dans une de mes Leçons données à l'Université de Koenigsberg.

„Quant aux formules de développement du produit

$$H(x+a_1)H(x+a_2)\dots.H(x+a_n),$$

où

$$a_1+a_2+\dots.a_n = 2jk,$$

et des fonctions homogènes de $H(x)$ et $\Theta(x)$, je les avais d'abord, comme vous, déduites des propriétés analytiques et caractéristiques des fonctions Hx et Θx, et j'y ai fait allusion dans le Journal de M. *Crelle*, tome XXVI, page 103. Depuis, j'ai remarqué que l'on peut parvenir aux mêmes formules par la considération élémentaire et algébrique, qu'étant mis

$$y_1 = x_1+b, \quad y_2 = x_2+b, \quad \text{etc.}$$

à chaque solution des deux équations

$$x_1^2+x_2^2+\dots.+x_n^2 = p, \quad x_1+x_2+\dots.+x_n = a,$$

répond une solution des deux autres équations

$$y_1^2+y_2^2+\dots.+y_n^2 = p-\frac{a^2}{n}+n\left(\frac{a}{n}+b\right)^2,$$

$$y_1+y_2+\dots.+y_n = a+nb.$$

On mettra pour a les nombres 0, 1, 2, ..., $n-1$, et pour b tous les nombres, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

„Mais ce qui auparavant ne m'est jamais venu dans l'esprit, c'est votre idée ingénieuse et très-originale de faire ressortir de ces mêmes principes le théorème d'*Abel*, tant qu'il s'applique aux fonctions elliptiques. Ne pensez-vous pas consacrer un Mémoire particulier à cette matière qui se détache très-bien des autres questions?

„En cherchant à tirer la transformation directe des propriétés des fonctions Θ, sans faire usage de leur décomposition en facteurs infinis, vous avez pensé savamment aux cas plus généraux, où probablement l'on se doit résigner à l'impossibilité d'une décomposition en facteurs.

„Dans mes Leçons universitaires de Koenigsberg, moi aussi j'ai eu coutume de partir des fonctions Θ. Dans ces Leçons, en multipliant quatre séries $\sum_{-\infty}^{\infty} {}_i\, e^{-(ax+bi)^2}$ pour différentes valeurs de x, et en transformant les exposants par la formule

$$i^2+i'^2+i''^2+i'''^2 = \left(\frac{i+i'+i''+i'''}{2}\right)^2 + \left(\frac{i+i'-i''-i'''}{2}\right)^2 + \text{etc.},$$

j'ai obtenu tout de suite une formule de laquelle découlent, comme cas particuliers et sans le moindre calcul, les expressions fractionnaires des fonctions elliptiques, les théorèmes sur l'addition des trois espèces, et plusieurs centaines de formules intéressantes auxquelles on ne saurait arriver que par un calcul algébrique fatigant. Dans un des premiers volumes du Journal de M. *Crelle*, j'ai donné des formules d'addition et de transformation conjointes, ressortantes de la multiplication seulement de deux Θ. Ces formules font voir que l'on peut arriver par deux transformations successives, non-seulement à la multiplication, mais encore aux formules de l'addition.

„Dans les mêmes Leçons, j'ai examiné l'ensemble des différentes formes que peut prendre une même fonction Θ. En faisant usage de la méthode employée par *Lagrange* pour la réduction des formes quadratiques, j'ai trouvé le fait analytique remarquable que, q étant une quantité imaginaire quelconque, on peut toujours, et par la seule multiplication par une quantité de la forme e^{rxx}, ramener la fonction Θ à une autre où le module de q, ce mot pris dans le sens de M. *Cauchy*, soit $< e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}$. C'est une limite précise, c'est à dire qu'étant prise une quantité inférieure, il y aura toujours des cas, où le module de q dans toutes les formes que pourrait prendre la fonction Θ restera supérieure à cette quantité.

„L'addition des paramètres dans la troisième espèce des intégrales abéliennes et l'échange des paramètres avec les amplitudes me sont bien connues. Il y a douze années environ que je les ai communiquées à deux de mes élèves, M. *Richelot*, de Koenigsberg, et M. *Senff*, à présent professeur de mathématiques près l'Université de Dorpat, et qui étudiait à Koenigsberg lorsque je trouvai ces formules. J'avais d'abord prouvé l'addition des paramètres, indépendamment, par la seule différentiation de $\log\frac{\sqrt{R}+U\sqrt{x}}{\sqrt{R}-U\sqrt{x}}$, U et R étant deux fonctions de l'ordre m et $2m$. Puis je l'ai déduite de l'échange mutuel des paramètres et amplitudes, qui se trouve aisément en remplaçant la somme des deux intégrales simples

$$\int_0^x \frac{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}\cdot dx}{(x-\alpha)\sqrt{(xR(x))}}+\int_0^\alpha \frac{\sqrt{(xR(x))}\cdot d\alpha}{(x-\alpha)\sqrt{(\alpha R(\alpha))}},$$

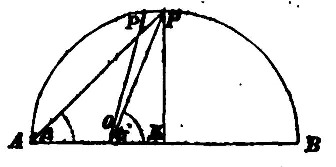
par la double intégrale

$$\iint \frac{dx\,d\alpha}{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}\sqrt{(xR(x))}}\left[\frac{1}{2(x-\alpha)}\left(\frac{d\cdot xR(x)}{dx}+\frac{d\cdot \alpha R(\alpha)}{d\alpha}\right)+\frac{\alpha R(\alpha)-xR(x)}{(x-\alpha)^2}\right],$$

où l'on prouve sans peine que la fonction de x et de α, placée entre les grands crochets, est entière. Depuis, j'ai appris par les Oeuvres posthumes d'*Abel* qu'elle est la généralisation dont ces théorèmes sont susceptibles.

„Feuilletant mes anciens papiers, j'y ai trouvé la démonstration de quelques théorèmes par lesquels on donne aux formules d'addition des intégrales abéliennes de la seconde et de la troisième espèce une forme analogue à celle sous laquelle les formules d'addition des intégrales elliptiques de la seconde et de la troisième espèce ont été présentées par *Legendre*, ce qui contribue à rendre de plus en plus parfaite l'analogie entre les fonctions abéliennes et elliptiques *).

Permettez-moi d'ajouter une construction géométrique de la transformation dite de *Landen*, la première qui ait été connue des fonctions elliptiques.



Soit AB le diamètre d'un cercle: si l'on mène d'un point P du cercle la droite PK au centre K, l'angle PKB est double de PAB, mais si l'on mène

*) Voir ci-dessus pg. 281.

la droite à un autre point fixe O du diamètre, on obtient l'angle dans lequel par la transformation de *Landen* se change l'amplitude PAB d'une intégrale elliptique dont le complément du module est $\frac{AO}{BO}$, le module transformé étant $\frac{KO}{KA}$. En effet soit R le rayon du cercle, $KO=a$, $PAB=\beta$, $POB=\psi$; variant P, on aura dans le triangle infiniment petit POP,

$$PP \sin PPO = OP \sin POP;$$

donc

$$2R\,d\beta.\cos KPO = OP.d\psi,\quad \frac{2d\beta}{OP}=\frac{d\psi}{R\cos KPO}:$$

or

$$OP^2 = R^2+a^2+2Ra\cos 2\beta = (R+a)^2\cos^2\beta+(R-a)^2\sin^2\beta,$$
$$R^2\cos^2 KPO = R^2-R^2\sin^2 KPO = R^2-a^2\sin^2\psi;$$

donc

$$\frac{2d\beta}{\sqrt{[(R+a)^2\cos^2\beta+(R-a)^2\sin^2\beta]}}=\frac{d\psi}{\sqrt{[R^2\cos^2\psi+(R^2-a^2)\sin^2\psi]}}.$$

On a, en même temps,

$$\sin\psi = \frac{AP\cdot\sin\beta}{OP} = \frac{2R\sin\beta\cos\beta}{\sqrt{[(R+a)^2\cos^2\beta+(R-a)^2\sin^2\beta]}},$$

ce qui est la substitution de *Landen*.

„Je suis aussi parvenu à étendre au théorème d'*Abel* ma construction de l'addition des fonctions elliptiques. Dans cette dernière, la corde PQ d'un cercle touche constamment un autre cercle. Soit T le point d'intersection

Q P
Q T P

de deux positions consécutives de la droite; les deux angles QQT et PPT étant égaux d'après une propriété du cercle, on aura

$$\frac{PP}{PT}=\frac{QQ}{QT},$$

ce qui est l'équation différentielle, dont par la construction de la droite inscrite à l'un et circonscrite à l'autre cercle on trouve l'intégrale complète et algébrique, la même qui a été donnée par *Euler*. A présent, je suppose qu'une corde C d'une courbe I du $n^{\text{ième}}$ degré touche constamment une autre courbe II. Soient P un point d'intersection de la corde mobile avec la courbe I, et $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ l'élément de la courbe I dans ce point, T le point de contact de la corde C avec la courbe II; si $f(x,y)=0$ est l'équation de la courbe I, je démontre, par des considérations mixtes de géométrie et d'algèbre,

la formule générale

$$\Sigma \frac{\psi(x,y)\,ds}{PT\cdot\sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]}} = 0,$$

$\psi(x,y)$ étant une fonction entière quelconque de x et y de l'ordre $n-2$, et la somme s'étendant aux n points d'intersection, le signe du radical étant $+$ ou $-$, selon que ces points sont de l'un ou de l'autre côté de T. Supposons en particulier que la courbe I rentre dans ces courbes pour les points desquelles on peut exprimer x et y par des fractions dont les numérateurs et le dénominateur commun sont des fonctions entières d'une troisième variable t, $x=\frac{\tau_1}{\tau}$, $y=\frac{\tau_2}{\tau}$, τ, τ_1, τ_2 étant du $n^{\text{ième}}$ degré, ce qui même pourra toujours se faire pour les courbes du premier et du second degré. Faisant usage de divers théorèmes établis dans mon Mémoire sur l'élimination (Journal de M. *Crelle*, tome XV), je trouve que, $\beta(t)$ étant une fonction quelconque de t du $(n-2)^{\text{ième}}$ degré, on aura

$$\frac{\beta(t)}{\tau}dt = \frac{\psi(x,y)\,ds}{\sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]}},$$

$\psi(x,y)$ étant, comme ci-dessus, du $(n-2)^{\text{ième}}$ degré. On aura donc

$$\Sigma \frac{\beta(t)\,dt}{\tau\cdot PT} = 0.$$

Soit la courbe II un cercle ayant pour équation $x^2+y^2=1$; on aura

$$\tau\cdot PT = \sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2-\tau^2)},$$

donc

$$\Sigma \frac{\beta(t)\,dt}{\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2-\tau^2)}} = 0, \quad \text{d'où} \quad \Sigma\int \frac{\beta(t)\,dt}{\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2-\tau^2)}} = 0,$$

les n intégrales étant prises entre les limites correspondantes aux intersections de la courbe I avec deux tangentes quelconques du cercle. Soit $f(t)$ une fonction donnée du $(2p)^{\text{ième}}$ degré, prenons trois fonctions entières de t quelconques, $\Psi(t)$, U, τ_1, respectivement du $(p-2)^{\text{ième}}$, $(n-p)^{\text{ième}}$, $n^{\text{ième}}$ degré, déterminons deux autres fonctions du $n^{\text{ième}}$ degré, τ et τ_2, au moyen de la formule,

$$\tau_1^2 - U^2 f(t) = \tau^2 - \tau_2^2,$$

et supposons enfin, que dans l'équation-somme trouvée on ait $\beta(t) = U\Psi(t)$ et que les limites des intégrales correspondent aux intersections de la courbe I

avec les deux tangentes du cercle parallèles à l'axe des x, on aura l'équation-somme,

$$\Sigma\int\frac{\Psi(t)\,dt}{\sqrt{f(t)}} = 0,$$

les limites des n intégrales étant les racines de l'équation

$$\tau^2-\tau_2^2 = \tau_1^2-U^2f(t) = 0,$$

ce qui est le théorème d'***Abel***. Mais la forme sous laquelle ce théorème se présente, d'après la construction précédente, ne semble pas dépourvue d'intérêt. Comme je n'ai étudié avec soin que les intégrales qui ont sous le signe une racine carrée, je ne saurais dire si la formule générale dont je suis parti en prenant deux courbes quelconques I et II, comporte la même généralité que le théorème général d'***Abel***. Par vos travaux sur ce théorème pris dans toute sa généralité, vous serez mieux que moi à même d'en juger.

„Ne soyez pas fâché, monsieur, si quelques-unes de vos découvertes se sont rencontrées avec mes anciennes recherches. Comme vous dûtes commencer par où je finis, il y a nécessairement une petite sphère de contact. Dans la suite, si vous m'honorez de vos communications, je n'aurai qu'à apprendre. . ."



16.

Über die Vertauschung von Parameter und Argument bei der dritten Gattung der Abelschen und höhern Transcendenten.

1.

Unter den hinterlafsnen Arbeiten *Abels* finden sich zwei kleine Aufsätze, der 9te und 10te im 2ten Bande seiner gesammelten Werke, in welchen die Sätze, welche *Legendre* über die Vertauschung von Parameter und Argument bei der dritten Gattung der elliptischen Integrale gefunden hat, zu einer grofsen Allgemeinheit erhoben sind. Ich will hier diese Arbeiten *Abels* reproduciren, um sie durch eine etwas abweichende Darstellung vielleicht in ein besseres Licht zu setzen.

In der ersten der beiden Abhandlungen, welche den Titel führt: „*Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendantes*" (S. 54—57 am angef. O.), beweist *Abel* ein Theorem, welches mit dem folgenden übereinkommt:

„Es sei $f(x)$ eine ganze rationale Function von x; es seien $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei beliebige andre ganze rationale Functionen von x, deren Summe

$$f_1(x)+f_2(x) = \frac{df(x)}{dx};$$

man setze ferner

$$\frac{d\log\varphi(x)}{dx} = \frac{f_1(x)}{f(x)}, \qquad \frac{d\log\psi(x)}{dx} = \frac{f_2(x)}{f(x)},$$

so wird

$$\varphi(\alpha)\int\frac{dx}{(x-\alpha)\varphi(x)} - \psi(x)\int\frac{d\alpha}{(\alpha-x)\psi(\alpha)}$$

ein Aggregat von Producten von der Form

$$C_{m,n}\int\frac{\alpha^m d\alpha}{\psi(\alpha)}\cdot\int\frac{x^n dx}{\varphi(x)},$$

wo m und n ganze positive Zahlen und die Gröfsen $C_{m,n}$ Constanten sind."

Der vorgelegte Ausdruck, welchen ich mit

$$H = \varphi(\alpha)\int\frac{dx}{(x-\alpha)\varphi(x)} - \psi(x)\int\frac{d\alpha}{(\alpha-x)\psi(\alpha)}$$

bezeichnen will, kann folgendermafsen dargestellt werden,

$$H = \iint\left(\frac{d\log\varphi(\alpha)}{d\alpha}+\frac{1}{x-\alpha}\right)\frac{\varphi(\alpha)\,d\alpha\,dx}{(x-\alpha)\varphi(x)}$$

$$-\iint\left(\frac{d\log\psi(x)}{dx}+\frac{1}{\alpha-x}\right)\frac{\psi(x)\,d\alpha\,dx}{(\alpha-x)\psi(\alpha)},$$

oder da in Folge der Gleichungen, durch welche die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ definirt wurden, ihr Product

$$\varphi(x)\psi(x) = f(x)$$

wird, durch die Formel

$$H = \iint\frac{f(\alpha)+(x-\alpha)f_1(\alpha)}{(x-\alpha)^2\psi(\alpha)\varphi(x)}\,d\alpha\,dx - \iint\frac{f(x)+(\alpha-x)f_2(x)}{(\alpha-x)^2\psi(\alpha)\varphi(x)}\,d\alpha\,dx$$

$$= \iint\frac{f(\alpha)-f(x)+(x-\alpha)\{f_1(\alpha)+f_2(x)\}}{(x-\alpha)^2\psi(\alpha)\varphi(x)}\,d\alpha\,dx.$$

Setzt man $\frac{df(x)}{dx}-f_1(x)$ für $f_2(x)$, so wird der Zähler des Bruchs unter dem doppelten Integralzeichen

$$f(\alpha)-f(x)-(\alpha-x)\frac{df(x)}{dx}+(x-\alpha)\{f_1(\alpha)-f_1(x)\}.$$

Dieser Ausdruck, wie man sogleich sieht, geht durch $(x-\alpha)^2$ auf. Ich will den Quotient, welcher eine ganze rationale Function der Gröfsen x und α ist, mit

$$\Sigma C_{m,n}\,\alpha^m x^n = \frac{f(\alpha)-f(x)+(x-\alpha)\{f_1(\alpha)+f_2(x)\}}{(x-\alpha)^2}$$

bezeichnen, wo die Gröfsen $C_{m,n}$ von α und x unabhängige Constanten sind. Durch Substitution dieses Ausdrucks verwandelt sich der für H gefundne Werth in

$$H = \Sigma C_{m,n}\int\frac{\alpha^m\,d\alpha}{\psi(\alpha)}\cdot\int\frac{x^n\,dx}{\varphi(x)},$$

was der zu beweisende Satz ist.

Entwickelt man die Brüche $\frac{-f(x)}{(x-\alpha)^2}+\frac{f_2(x)}{x-\alpha}$ nach absteigenden Potenzen von x, so wird $C_{m,n}$ der Coëfficient von $\alpha^m x^n$ in dieser Entwicklung, da aus den beiden andern Termen des für $\Sigma C_{m,n}\,\alpha^m x^n$ angegebnen Ausdrucks nur negative Potenzen von x hervorgehen. Setzt man

$$f_1(x) = \Sigma a_1^{(i)} x^i, \quad f_2(x) = \Sigma a_2^{(i)} x^i, \quad f(x) = c + \Sigma\frac{1}{i+1}(a_1^{(i)}+a_2^{(i)})\,x^{i+1},$$

wo c eine Constante ist, so ergiebt sich auf diese Weise

$$C_{m,n} = \frac{-(m+1)}{m+n+2}(a_1^{(m+n+1)} + a_2^{(m+n+1)}) + a_2^{(m+n+1)}$$
$$= \frac{-1}{m+n+2}\{(m+1)a_1^{(m+n+1)} - (n+1)a_2^{(m+n+1)}\}.$$

Über die Gränzen der Integration ist folgendes zu bemerken.

Damit, wie gesetzt worden,

$$\frac{\varphi(\alpha)}{x-\alpha} = \int \frac{d \cdot \frac{\varphi(\alpha)}{x-\alpha}}{d\alpha} d\alpha,$$

mufs das Integral von einem solchen Werthe von α an genommen werden, für welchen $\varphi(\alpha)$ verschwindet, und eben so mufs in der Gleichung

$$\frac{\psi(x)}{\alpha-x} = \int \frac{d \cdot \frac{\psi(x)}{\alpha-x}}{dx} dx$$

das Integral von einem solchen Werthe von x an genommen werden, für welchen $\psi(x)$ verschwindet. Aufserdem aber dürfen die Intervalle, über welche in Bezug auf α und x integrirt wird, keinen Werth mit einander gemein haben, oder es darf kein Werth, den α während der Integration annehmen kann, mit einem Werthe, den x während der Integration annehmen kann, zusammenfallen, weil die Vertauschung der Ordnung der Integration, welche den obigen Betrachtungen zu Grunde liegt, nur dann allgemein zulässig ist, wenn die zu integrirende Function nicht in diesen Intervallen unendlich wird.

Es sei

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{\mu_1}(x-\alpha_2)^{\mu_2}(x-\alpha_3)^{\mu_3}\ldots,$$

wo μ_1, μ_2, μ_3 etc. ganze positive Zahlen sind; man erhält dann

$$\frac{f_1(x)+f_2(x)}{f(x)} = \frac{df(x)}{f(x)dx} = \frac{\mu_1}{x-\alpha_1} + \frac{\mu_2}{x-\alpha_2} + \frac{\mu_3}{x-\alpha_3} + \text{etc.}$$

Man kann daher, wenn

$$\beta_i + \gamma_i = \mu_i,$$

für die Differentialquotienten von $\log\varphi(x)$ und $\log\psi(x)$ folgende Ausdrücke setzen:

$$\frac{d\log\varphi(x)}{dx} = \frac{f_1(x)}{f(x)} = \frac{\beta_1}{x-\alpha_1} + \frac{\beta_2}{x-\alpha_2} + \frac{\beta_3}{x-\alpha_3} + \text{etc.} + U,$$
$$\frac{d\log\psi(x)}{dx} = \frac{f_2(x)}{f(x)} = \frac{\gamma_1}{x-\alpha_1} + \frac{\gamma_2}{x-\alpha_2} + \frac{\gamma_3}{x-\alpha_3} + \text{etc.} - U.$$

Die Function U kann hier eine beliebige ganze rationale Function von x sein, und aufserdem noch für die verschiednen Werthe von i Aggregate von Brüchen

von der Form

$$\frac{\beta_i'}{(x-\alpha_i)^2}+\frac{\beta_i''}{(x-\alpha_i)^3}+\ldots+\frac{\beta_i^{(\mu_i-1)}}{(x-\alpha_i)^{\mu_i}}.$$

enthalten. Dieses ist die allgemeinste Annahme, unter welcher die Functionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ganze Functionen bleiben und ihre Summe $=\frac{df(x)}{dx}$ wird. Die Function $\int U dx$ wird daher immer eine rationelle, ganze oder gebrochne Function von x, deren Nenner nur die Factoren $x-\alpha_i$ hat, und jeden in einer niedrigern Potenz, als in der ihn $f(x)$ enthält. Es werden demnach in dem aufgestellten Theorem die allgemeinsten Formen, welche $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ annehmen können,

$$\varphi(x) = e^P (x-\alpha_1)^{\beta_1} (x-\alpha_2)^{\beta_2} (x-\alpha_3)^{\beta_3}\ldots,$$
$$\psi(x) = e^{-P} (x-\alpha_1)^{\gamma_1} (x-\alpha_2)^{\gamma_2} (x-\alpha_3)^{\gamma_3}\ldots,$$

wo $\beta_1+\gamma_1$, $\beta_2+\gamma_2$ etc. ganze positive Zahlen sind, die Null ausgeschlossen, und P eine rationale, ganze oder gebrochene Function, deren Nenner nur die Potenzen von $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$ etc. als Factoren enthält, und zwar jedes $x-\alpha_i$ höchstens in die $(\beta_i+\gamma_i-1)^{\text{te}}$ Potenz erhoben.

Hieraus ergiebt sich das folgende Theorem.

Theorem I.

„Es sei

$$\varphi(x) = e^P (x-\alpha_1)^{\beta_1} (x-\alpha_2)^{\beta_2} (x-\alpha_3)^{\beta_3}\ldots,$$
$$\psi(x) = e^{-P} (x-\alpha_1)^{\gamma_1} (x-\alpha_2)^{\gamma_2} (x-\alpha_3)^{\gamma_3}\ldots,$$

wo $\beta_1+\gamma_1$, $\beta_2+\gamma_2$ etc. ganze positive Zahlen sind, die Null ausgeschlossen, und

$$P=\frac{Q}{(x-\alpha_1)^{\beta_1+\gamma_1-1}(x-\alpha_2)^{\beta_2+\gamma_2-1}(x-\alpha_3)^{\beta_3+\gamma_3-1}\ldots},$$

wo Q eine beliebige ganze rationale Function von x ist; es seien ferner $a_1^{(i)}$ und $a_2^{(i)}$ die Coëfficienten von x^i in den ganzen rationalen Functionen

$$\psi(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} \quad \text{und} \quad \varphi(x)\frac{d\psi(x)}{dx},$$

so wird

$$\varphi(\alpha)\int\frac{dx}{(x-\alpha)\,\varphi(x)}-\psi(x)\int\frac{d\alpha}{(\alpha-x)\,\psi(\alpha)}$$
$$=\Sigma\left(\frac{n+1}{m+n+2}a_2^{(m+n+1)}-\frac{m+1}{m+n+2}a_1^{(m+n+1)}\right)\int\frac{\alpha^m d\alpha}{\psi(\alpha)}\cdot\int\frac{x^n dx}{\varphi(x)},$$

wo die Integrationen in Bezug auf α und x von solchen Anfangsgränzen an zu nehmen sind, für welche $\varphi(\alpha)$ und $\psi(x)$ verschwinden."

Die von *Abel* (S. 56 oben) hinzugefügte Beschränkung, dafs die Exponenten β_1, γ_1 etc. positiv und kleiner als 1 sein müssen, ist nicht für alle wesentlich nothwendig. Wäre dies der Fall, so könnte, wie aus dem Vorigen erhellt, niemals P eine gebrochne Function sein, wie doch *Abel* annimmt. Soll in dem vorstehenden Theorem $\psi(x)$ dieselbe Function wie $\varphi(x)$ sein, so wird es die Quadratwurzel einer ganzen rationalen Function, $\varphi(x) = \psi(x) = \sqrt{f(x)}$. In diesem Falle mufs immer P verschwinden. Setzt man für denselben Fall $\frac{1}{i+1} a_1^{(i)} = \frac{1}{i+1} a_2^{(i)} = b_{i+1}$, wo b_i der Coëfficient von x^i in $f(x)$ ist, so wird

$$C_{m,n} = (n-m)\, b^{(n+m+2)},$$

also $C_{m,m} = 0$.

2.

Ich komme jetzt zu der grofsen Ausdehnung, welche *Abel* dem schon so allgemeinen Theorem, welches im Vorigen bewiesen worden, gegeben hat (s. Abh. X. des 2ten Theiles seiner Werke S. 58 — 65). Zu dem näheren Verständnifs dieser Ausdehnung ist es nöthig, einige Sätze über lineäre Differentialgleichungen voranzuschicken.

Hat man einen Ausdruck

$$Ay + A_1 y' + A_2 y'' \dots + A_n y^{(n)},$$

wo $y^{(i)} = \frac{d^i y}{dx^i}$ und A, A_1 etc. Functionen von x sind, so entspricht ihm immer ein andrer

$$Bz + B_1 z' + B_2 z'' \dots + B_n z^{(n)}$$

in der Art, dafs für unbestimmte Functionen y und z der Ausdruck

$$z\{Ay + A_1 y' + A_2 y'' \dots + A_n y^{(n)}\} + y\{Bz + B_1 z' + B_2 z'' \dots + B_n z^{(n)}\}$$

ein vollständiges Differentiale wird. Diese Bedingung erfordert die Gleichung

$$By + B_1 y' + B_2 y'' \dots + B_n y^{(n)} = -Ay + \frac{d.A_1 y}{dx} - \frac{d^2.A_2 y}{dx^2} \dots \pm \frac{d^n.A_n y}{dx^n},$$

mittelst welcher der zweite Ausdruck aus dem gegebnen bestimmt wird, und durch dieselbe Bedingung wird auch auf ganz ähnliche Art der gegebne Ausdruck aus dem zweiten mittelst der Gleichnng

$$Ay + A_1 y' + A_2 y'' \dots + A_n y^{(n)} = -By + \frac{d.B_1 y}{dx} - \frac{d^2.B_2 y}{dx^2} \dots \pm \frac{d^n.B_n y}{dx^n}$$

bestimmt. Ich werde mit $[y]_1$ und $[y]_2$ die Ausdrücke

$$[y]_1 = Ay + A_1 y' + A_2 y'' \dots + A_n y^{(n)} = -By + \frac{d.B_1 y}{dx} - \frac{d^2.B_2 y}{dx^2} \dots \pm \frac{d^n.B_n y}{dx^n},$$

$$[y]_2 = By + B_1 y' + B_2 y'' \dots + B_n y^{(n)} = -Ay + \frac{d.A_1 y}{dx} - \frac{d^2.A_2 y}{dx^2} \dots \pm \frac{d^n.A_n y}{dx^n}$$

bezeichnen, und das Integral

$$\int (z[y]_1 + y[z]_2)\,dx = [y, z]$$

setzen. Wenn man in den Functionen A, A_1 etc., B, B_1 etc. für die unabhängige Variable x eine andre einführt und nach dieser differentiirt, so werde ich dieselbe den Klammern oben rechts beifügen.

Wenn z eine Lösung der Gleichung

$$[z]_2 = 0,$$

y eine beliebige Function ist, so folgt aus der vorstehenden Formel,

$$\int z[y]_1\,dx = [y, z],$$

und eben so, wenn y eine Lösung der Gleichung

$$[y]_1 = 0,$$

z aber eine beliebige Function ist,

$$\int y[z]_2\,dx = [y, z].$$

Wenn y und z gleichzeitig Lösungen der Gleichungen

$$[y]_1 = 0, \quad [z]_2 = 0$$

sind, so wird $[y, z]$ einer Constante gleich.

Es seien A, A_1 etc. ganze rationale Functionen von x, so werden auch B, B_1 etc. ganze rationale Functionen von x sein. Nennt man $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ etc. die Functionen von α, welche aus A, A_1 erhalten werden, wenn man α für x substituirt, und setzt

$$\frac{A - \mathfrak{A}}{x - \alpha} = P, \quad \frac{A_1 - \mathfrak{A}_1}{x - \alpha} = P_1, \quad \ldots \quad \frac{A_n - \mathfrak{A}_n}{x - \alpha} = P_n,$$

so werden P, P_1 etc. ganze rationale Functionen der beiden Gröfsen x und α. Substituirt man in

$$[y]_2 = -Ay + \frac{d.A_1 y}{dx} - \frac{d^2.A_2 y}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^n.A_n y}{dx^n}$$

für y den Bruch $\frac{1}{x - \alpha}$, und setzt statt der Differentiationen von $\frac{1}{x - \alpha}$ nach x die nach α, abwechselnd mit entgegengesetztem Zeichen genommen, so erhält man

$$\left[\frac{1}{x - \alpha}\right]_2 = -\left[\frac{1}{x - \alpha}\right]_1^{(\alpha)} - P + \frac{dP_1}{dx} - \frac{d^2 P_2}{dx^2} \ldots \pm \frac{d^n P_n}{dx^n}.$$

Es wird daher

$$\left[\frac{1}{x - \alpha}\right]_2^{(x)} + \left[\frac{1}{x - \alpha}\right]_1^{(\alpha)}$$

eine ganze rationale Function von x und α. Ich will diese ganze rationale Function von x und α mit U bezeichnen. Setzt man

$$\mathfrak{A}_m^{(i)} = \frac{d^i \mathfrak{A}_m}{d\alpha^i},$$

so wird

$$1.\quad U = \left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_1^{(\alpha)} + \left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_2^{(x)}$$

$$= \frac{\mathfrak{A}+B}{x-\alpha} + \frac{\mathfrak{A}_1-B_1}{(x-\alpha)^2} + \Pi 2 \cdot \frac{\mathfrak{A}_2+B_2}{(x-\alpha)^3} \dots + \Pi n \cdot \frac{\mathfrak{A}_n+(-1)^n B_n}{(x-\alpha)^{n+1}}.$$

Ist

$$U = \Sigma C_{m,p}\, \alpha^m x^p,$$

wo m und p nur ganze positive Werthe annehmen, so ergiebt sich $C_{m,p}$ aus (1.) auf doppelte Art, nämlich als Coëfficient von x^p in dem Ausdrucke

$$\frac{B}{x^{m+1}} - (m+1)\frac{B_1}{x^{m+2}} + (m+1)(m+2)\frac{B_2}{x^{m+3}} \dots \pm (m+1)(m+2)\dots(m+n)\frac{B_n}{x^{m+n+1}}$$

$$= [x^{-m-1}]_2,$$

oder als Coëfficient von α^m in dem Ausdrucke

$$-\frac{\mathfrak{A}}{\alpha^{p+1}} + (p+1)\frac{\mathfrak{A}_1}{\alpha^{p+1}} - (p+1)(p+2)\frac{\mathfrak{A}_2}{\alpha^{p+2}} \dots \mp (p+1)(p+2)\dots(p+n)\frac{\mathfrak{A}_n}{\alpha^{p+n+1}}$$

$$= [\alpha^{-p-1}]_1^{(\alpha)}\ ^{*)}.$$

Die Identität dieser beiden für $C_{m,p}$ gefundnen Darstellungen folgt auch unmittelbar aus der Betrachtung, dafs in $x^{-m-1}[x^{-p-1}]_1 + x^{-p-1}[x^{-m-1}]_2$, als dem Differential des Ausdrucks $[x^{-p-1}, x^{-m-1}]$, welcher aus bloſsen Potenzen von x besteht, der Term $\frac{1}{x}$ nicht vorkommen kann.

Ich multiplicire die Gleichung (1.) mit

$$\frac{d\alpha\, dx}{\psi(\alpha)\varphi(x)},$$

---

*) Setzt man

$$\frac{(p+1)(p+2)\dots(p+i)}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+i)} A_i + \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+i)}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+i)} B_i = M_i,$$

wo $\nu = m+p+1$, so führt die Vergleichung der beiden obigen Bestimmungen von $C_{m,p}$ auf die Gleichung

$$M - \frac{dM_1}{dx} + \frac{d^2 M_2}{dx^2} \dots \pm \frac{d^n M_n}{dx^n} = 0,$$

welche man mittelst der bekannten Formel

$$1 - k_1 \frac{m+1}{\nu+1} + k_2 \frac{(m+1)(m+2)}{(\nu+1)(\nu+2)} - k_3 \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+2)} \dots \pm \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+k)}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)}$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+k)}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)},$$

wo $k_i = \frac{k(k-1)\dots(k+i-1)}{1.2\dots i}$, verificirt. Es wird daher der Ausdruck

$$My + M_1 y' + M_2 y'' \dots + M_n y^{(n)}$$

ein vollständiges Differential.

wo $\frac{1}{\varphi(x)}$ und $\frac{1}{\psi(\alpha)}$ respective Lösungen der Gleichungen

$$\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]_1^{(x)} = 0, \quad \left[\frac{1}{\psi(\alpha)}\right]_2^{(\alpha)} = 0$$

sein sollen, und integrire nach α und x. Man erhält aber zufolge der obigen Formeln

$$\int\left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_2^{(x)} \frac{dx}{\varphi(x)} = \left[\frac{1}{\varphi(x)}, \frac{1}{x-\alpha}\right]^{(x)},$$

$$\int\left[\frac{1}{\alpha-x}\right]_1^{(\alpha)} \frac{d\alpha}{\psi(\alpha)} = \left[\frac{1}{\alpha-x}, \frac{1}{\psi(\alpha)}\right]^{(\alpha)},$$

und daher

2. $$\int\left[\frac{1}{\varphi(x)}, \frac{1}{x-\alpha}\right]^{(x)} \frac{d\alpha}{\psi(\alpha)} - \int\left[\frac{1}{\alpha-x}, \frac{1}{\psi(\alpha)}\right]^{(\alpha)} \frac{dx}{\varphi(x)} = \iint\frac{U\,d\alpha\,dx}{\psi(\alpha)\,\varphi(x)}.$$

In der Formel (2.) sind die beiden Ausdrücke $[y, z]$ so beschaffen, dafs y eine Lösung der Gleichung $[y]_1 = 0$ oder z eine Lösung der Gleichung $[z]_2 = 0$ ist. Für diese Fälle kann man Folgendes bemerken.

Es seien $y_1, y_2, \ldots . y_n$ die n Lösungen der Gleichung $[y]_1 = 0$, und $z_1, z_1, \ldots . z_n$ die n Lösungen der Gleichung $[z]_2 = 0$, so sind die nn Ausdrücke $[y_i, z_k]$ Constanten gleich. Da man für $z_1, z_2, \ldots . z_n$ beliebige lineäre Functionen derselben, deren Coëfficienten constant sind, einführen kann, so kann man sich diese constanten Coëfficienten so bestimmt denken, dafs die Ausdrücke

$$[y_i, z_i] = 1,$$

dagegen wenn i und k verschieden sind, die Ausdrücke

$$[y_i, z_k] = 0$$

sind. Mittelst dieser Bedingungen sind für gegebne Lösungen $y_1, y_2, \ldots . y_n$ die Lösungen $z_1, z_2, \ldots . z_n$, und umgekehrt für gegebne Lösungen $z_1, z_2, \ldots . z_n$ die Lösungen $y_1, y_2, \ldots . y_n$ vollkommen bestimmt. Hat man nämlich für eine beliebige Function z die n Gleichungen

$$[y_1, z] = r_1, \quad [y_2, z] = r_2, \quad \ldots . \quad [y_n, z] = r_n,$$

welches n lineäre Gleichungen zwischen $z, z', \ldots . z^{(n-1)}$ sind, so folgt

$$\begin{aligned} z &= z_1 r_1 + z_2 r_2 \ldots . + z_n r_n, \\ z' &= z'_1 r_1 + z'_2 r_2 \ldots . + z'_n r_n, \\ z'' &= z''_1 r_1 + z''_2 r_2 \ldots . + z''_n r_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z^{(n-1)} &= z_1^{(n-1)} r_1 + z_2^{(n-1)} r_2 \ldots . + z_n^{(n-1)} r_n, \end{aligned}$$

indem man sogleich sieht, dafs durch die Substitution dieser Werthe den

n Gleichungen Genüge geschieht. Eben so erhält man für eine beliebige Function y aus den n Gleichungen

$$[y, z_1] = s_1, \quad [y, z_2] = s_2, \quad \dots\dots \quad [y, z_n] = s_n$$

die Werthe

$$\begin{aligned} y &= y_1 s_1 + y_2 s_2 \dots\dots + y_n s_n, \\ y' &= y'_1 s_1 + y'_2 s_2 \dots\dots + y'_n s_n, \\ y'' &= y''_1 s_1 + y''_2 s_2 \dots\dots + y''_n s_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} &= y_1^{(n-1)} s_1 + y_2^{(n-1)} s_2 \dots\dots + y_n^{(n-1)} s_n. \end{aligned}$$

Setzt man in $r_i = [y_i, z]$ für z die Function von x, welche durch das Integral

$$z = \int \frac{d\alpha}{(x-\alpha)\psi(\alpha)}$$

gegeben ist, und $\frac{1}{\varphi(x)} = y_i$, so folgt aus (2.)

$$r_i = \int \left[y_i, \frac{1}{x-\alpha}\right]^{(x)} \frac{d\alpha}{\psi(\alpha)} = \int \left[\frac{1}{\alpha-x}, \frac{1}{\psi(\alpha)}\right]^{(\alpha)} y_i\, dx + \iint \frac{y_i\, U\, d\alpha\, dx}{\psi(\alpha)},$$

und daher

$$z_1^{(i)} r_1 + z_2^{(i)} r_2 \dots\dots + z_n^{(i)} r_n = \left[Z^{(i)}, \frac{1}{\psi(\alpha)}\right]^{(\alpha)} + V^{(i)},$$

wenn man

$$Z^{(i)} = z_1^{(i)} \int \frac{y_1\, dx}{\alpha - x} + z_2^{(i)} \int \frac{y_2\, dx}{\alpha - x} \dots\dots + z_n^{(i)} \int \frac{y_n\, dx}{\alpha - x},$$

$$V^{(i)} = z_1^{(i)} \iint \frac{y_1\, U\, d\alpha\, dx}{\psi(\alpha)} + z_2^{(i)} \iint \frac{y_2\, U\, d\alpha\, dx}{\psi(\alpha)} \dots\dots + z_n^{(i)} \iint \frac{y_n\, U\, d\alpha\, dx}{\psi(\alpha)}$$

setzt. Man erhält daher durch die im Vorhergehenden zur Auflösung der Gleichungen

$$[y_1, z] = r_1, \quad [y_2, z] = r_2, \quad \dots\dots \quad [y_n, z] = r_n$$

gegebnen Formeln für die Functionen $z, z', \dots\dots z^{(n-1)}$ die Werthe

$$z^{(i)} = (-1)^i \Pi i \cdot \int \frac{d\alpha}{(x-\alpha)^{i+1}\psi(\alpha)} = \left[Z^{(i)}, \frac{1}{\psi(\alpha)}\right]^{(\alpha)} + V^{(i)}.$$

Man setze in dieser Gleichung für $\frac{1}{\psi(\alpha)}$ nach und nach $\zeta_1, \zeta_2, \dots\dots \zeta_n$, wo ζ_k dieselbe Function von α sei, die z_k von x ist. Man bezeichne ferner die der Lösung $\frac{1}{\psi(\alpha)} = \zeta_k$ entsprechenden Werthe von $V^{(i)}$ mit $V_k^{(i)}$, so hat man

$$[Z^{(i)}, \zeta_k]^{(\alpha)} = (-1)^i \Pi i \cdot \int \frac{\zeta_k\, d\alpha}{(x-\alpha)^{i+1}} - V_k^{(i)}.$$

Setzt man hierin für k die Werthe 1, 2, ... n, so erhält man n lineäre Gleichungen zwischen den Gröfsen

$$Z_i,\quad \frac{dZ_i}{d\alpha},\quad \frac{d^2Z}{d\alpha^2},\quad \dots\quad \frac{d^{n-1}Z}{d\alpha^{n-1}},$$

und nach den obigen Auflösungsformeln, wenn v_i dieselbe Function von α bedeutet, welche y_i von x ist,

$$\frac{d^kZ^{(i)}}{d\alpha^k} = (-1)^i\Pi i\left\{v_1^{(k)}\int\frac{\zeta_1\,d\alpha}{(x-\alpha)^{i+1}} + v_2^{(k)}\int\frac{\zeta_2\,d\alpha}{(x-\alpha)^{i+1}}\dots + v_n^{(k)}\int\frac{\zeta_n\,d\alpha}{(x-\alpha)^{i+1}}\right\}$$
$$-\{v_1^{(k)}V_1^{(i)} + v_2^{(k)}V_2^{(i)}\dots + v_n^{(k)}V_n^{(i)}\}.$$

Es ist aber

$$\frac{d^kZ^{(i)}}{d\alpha^k} = (-1)^k\Pi k\left\{z_1^{(i)}\int\frac{y_1\,dx}{(\alpha-x)^{k+1}} + z_2^{(i)}\int\frac{y_2\,dx}{(\alpha-x)^{k+1}}\dots + z_n^{(i)}\int\frac{y_n\,dx}{(\alpha-x)^{k+1}}\right\},$$

ferner

$$v_1^{(k)}V_1^{(i)} + v_2^{(k)}V_2^{(i)}\dots + v_n^{(k)}V_n^{(i)} = \Sigma v_g^{(k)}V_g^{(i)} = \Sigma\Sigma v_g^{(k)}z_h^{(i)}\iint\zeta_g y_h\,U\,d\alpha\,dx,$$

wo für die beiden Indices g und h die Werthe 1, 2, ... n zu setzen sind. Man erhält daher folgendes Theorem.

Theorem.

„Es seien $A, A_1, \dots A_n$ und $B, B_1, \dots B_n$ ganze rationale Functionen von x, welche in solcher Beziehung zu einander stehen, dafs, wenn man durch die obern Accente die Differentialquotienten bezeichnet, für zwei beliebige Functionen y und z der Ausdruck

$$z\{Ay + A_1y' + A_2y''\dots + A_ny^{(n)}\} + y\{Bz + B_1z' + B_2z''\dots + B_nz^{(n)}\}$$

ein vollständiges Differential wird; es seien

$$y_1,\quad y_2,\quad \dots\quad y_n$$

die n von einander unabhängigen Lösungen der Gleichung

$$Ay + A_1y' + A_2y''\dots + A_ny^{(n)} = 0,$$

und

$$z_1,\quad z_2,\quad \dots\quad z_n$$

die von ihnen abhängigen Lösungen der Gleichung

$$Bz + B_1z' + B_2z''\dots + B_nz^{(n)} = 0,$$

welche man, was immer möglich ist, so bestimmt, dafs das für unbestimmte Functionen y und z und ohne Hinzufügung einer willkürlichen Constante dargestellte Integral des Ausdrucks $z\{Ay + A_1y'\dots\} + y\{Bz + B_1z'\dots\}$ verschwindet, wenn man $y = y_i$ und $z = z_k$, oder $= 1$ wird, wenn man $y = y_i$, $z = z_i$ setzt; es sei ferner $C_{m,p}$ der Coëfficient von $\frac{1}{x}$ in dem Ausdrucke

$$-x^{-m-1}\{Ay + A_1y'\dots + A_ny^{(n)}\},$$

wenn $y = x^{-p-1}$, oder, was dasselbe ist, in dem Ausdrucke

$$x^{-p-1}\{By + B_1 y' \dots + B_n y^{(n)}\},$$

wenn $y = x^{-m-1}$ gesetzt wird; es seien endlich

$$v_1, \; v_2, \; \dots \; v_n; \quad \zeta_1, \; \zeta_2, \; \dots \; \zeta_n$$

die Functionen von α, in welche sich

$$y_1, \; y_2, \; \dots \; y_n; \quad z_1, \; z_2, \; \dots \; z_n$$

verwandeln, wenn man α für x substituirt: so wird

$$\Pi k \left\{ z_1^{(i)} \int \frac{y_1\, dx}{(x-\alpha)^{k+1}} + z_2^{(i)} \int \frac{y_2\, dx}{(x-\alpha)^{k+1}} \dots + z_n^{(i)} \int \frac{y_n\, dx}{(x-\alpha)^{k+1}} \right\}$$

$$- \Pi i \left\{ v_1^{(k)} \int \frac{\zeta_1\, d\alpha}{(\alpha-x)^{i+1}} + v_2^{(k)} \int \frac{\zeta_2\, d\alpha}{(\alpha-x)^{i+1}} \dots + v_n^{(k)} \int \frac{\zeta_n\, d\alpha}{(\alpha-x)^{i+1}} \right\}$$

$$= \Sigma C_{m,p} v_g^{(k)} z_h^{(i)} \int \alpha^m \zeta_g\, d\alpha . \int x^p y_h\, dx,$$

wo in der mit Σ bezeichneten vierfachen Summe g und h die Werthe $1, 2, \dots n$ erhalten, m und p alle Werthe, für welche sich in einer oder in mehreren von den Functionen $x^{-\lambda-1} A_l$ ein Term x^{m+p} findet, und die Accente i und k, welche die Ordnung der Differentialen anzeigen, beliebig angenommne Zahlen aus der Reihe der Zahlen $0, 1, 2, \dots n-1$ sind."

Die im vorstehenden Theorem gegebne Formel umfafst nn Gleichungen, welche man aus der Combination aller Werthe von i mit allen Werthen von k erhält. Man kann mittelst derselben die nn Gröfsen $\int \frac{y_i\, dx}{(x-\alpha)^{k+1}}$ linear durch die nn Gröfsen $\int \frac{\zeta_i\, d\alpha}{(\alpha-x)^{k+1}}$ ausdrücken und umgekehrt. Für $n = 1$ erhält man den §. 1. entwickelten Satz.

Wenn die Differentialgleichung $Ay + A_1 y' \dots + A_n y^{(n)} = 0$ die besondre Form

$$Ky + \frac{d.K_1 y'}{dx} + \frac{d^2.K_2 y''}{dx^2} + \frac{d^3.K_3 y'''}{dx^3} + \text{etc.} = 0$$

hat, welche ich in meinen Untersuchungen *über die Kriterien des Maximum und Minimum bei den isoperimetrischen Problemen* betrachtet habe, wird die Differentialgleichung $By + B_1 y' \dots + B_n y^{(n)} = 0$ mit ihr identisch, oder es wird

$$B = -A, \quad B_1 = -A_1, \quad B_2 = -A_2, \quad \dots \quad B_n = -A_n.$$

Man kann diese linearen Differentialgleichungen als solche bezeichnen, bei denen jede Lösung zugleich ein Factor, welcher sie integrabel macht, und jeder solcher

Factor eine ihrer Lösungen ist. Sie nehmen für eine gerade Ordnung immer die obige Form an; für eine ungerade Ordnung kann man dieselben passend so darstellen:

$$\sqrt{K_1}.\frac{d.y\sqrt{K_1}}{dx}+\frac{d.\left(\sqrt{K_2}\frac{d.y'\sqrt{K_2}}{dx}\right)}{dx}+\frac{d^2\left(\sqrt{K_3}\frac{d.y''\sqrt{K_3}}{dx}\right)}{dx^2}+\text{etc.}=0.$$

Bei der Integration dieser Differentialgleichungen bietet sich der merkwürdige Umstand dar, dafs durch *eine* bekannt gewordne Lösung sich ihre Ordnung um *zwei* Einheiten verringern läfst, und die übrigen Lösungen sich je nach der weitern Verringerung der Ordnung der Differentialgleichung, die sich durch sie erreichen läfst, unterscheiden. Man kann ihre Lösungen $y_1, y_2, \ldots. y_n$ immer so bestimmen, dafs die aus denselben auf die oben angegebne Weise abgeleiteten Lösungen $z_1, z_2, \ldots. z_n$ mit ihnen übereinkommen, so dafs

$$z_1=y_1, \quad z_2=y_2, \quad \ldots. \quad z_n=y_n.$$

Um das aufgestellte allgemeine Theorem in ein vollständiges Licht zu setzen, und insbesondere die Anfangsgränzen der Integrale zu bestimmen und die nothwendigen Beschränkungen des Theorems anzugeben, ist es nöthig, den Character der Lösungen der linearen Differentialgleichungen, deren Coëfficienten ganze rationale Functionen der Variable sind, näher zu ergründen, wofür, wenn man die zweite Ordnung überschreitet, noch wenig von den Mathematikern geschehen ist.

13. Mai 1846.

17.

Über einige der Binomialreihe analoge Reihen.

Wenn man der Binomialreihe ähnliche Reihen bildet, indem man statt des p^{ten} Binomialcoëfficienten den analogen Ausdruck

$$v_p = \frac{(1-v)(1-xv)(1-x^2 v)\dots(1-x^{p-1}v)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^p)}$$

setzt, so erhält der Quotient zweier solcher, verschiednen Werthen von v entsprechenden, Reihen wiederum dieselbe Form. Man hat nämlich, wenn $u = wv^{-1}$,

$$1.\quad \frac{1+w_1 z+w_2 z^2+w_3 z^3+\text{etc.}}{1+v_1 z+v_2 z^2+v_3 z^3+\text{etc.}} = 1+u_1.vz+u_2.v^2z^2+u_3.v^3z^3+\text{etc.}$$

$$= 1+\frac{v-w}{1-x}z+\frac{(v-w)(v-xw)}{(1-x)(1-x^2)}z^2+\frac{(v-w)(v-xw)(v-x^2w)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3+\text{etc.}$$

Bedeutet i eine unendlich grofse Gröfse und setzt man

$$x = e^{-\frac{1}{i}},\quad v = e^{\frac{m}{i}},\quad w = e^{\frac{m+n}{i}},$$

so verwandelt sich diese Formel in

$$\frac{(1-z)^{m+n}}{(1-z)^m} = (1-z)^n,$$

wenn man statt der Potenzen von $1-z$ ihre Entwicklungen setzt. Aus (1.) folgt, *dafs der reciproke Werth der Reihe*

$$1+\frac{v-w}{1-x}z+\frac{(v-w)(v-xw)}{(1-x)(1-x^2)}z^2+\frac{(v-w)(v-xw)(v-x^2w)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3+\text{etc.}$$

durch blofse Vertauschung von v und w erhalten wird. Bezeichnet man diese Reihe mit

$$[w,v] = 1+\frac{v-w}{1-x}z+\frac{(v-w)(v-xw)}{(1-x)(1-x^2)}z^2+\frac{(v-w)(v-xw)(v-x^2w)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3+\text{etc.},$$

so wird die Fundamentaleigenschaft der Function $[w,v]$ durch die Gleichung

$$2.\quad [w,v] = \frac{[w,1]}{[v,1]}$$

gegeben. Setzt man iv, iw, $i^{-1}z$ für v, w, z, so ändert sich $[w,v]$ nicht Nimmt man i unendlich, so verwandeln sich v_p und w_p in

$$\frac{(-i)^p x^{\frac{1}{2}(pp-p)} v^p}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^p)},\quad \frac{(-i)^p x^{\frac{1}{2}(pp-p)} w^p}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^p)},$$

und es wird daher $[w,v]$ zufolge (1.) gleich dem Bruche

$$\frac{1-\frac{wz}{1-x}+\frac{xw^2z^2}{(1-x)(1-x^2)}-\frac{x^3w^3z^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x^6w^4z^4}{(1-x)\dots(1-x^4)}-\text{etc.}}{1-\frac{vz}{1-x}+\frac{xv^2z^2}{(1-x)(1-x^2)}-\frac{x^3v^3z^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x^6v^4z^4}{(1-x)\dots(1-x^4)}-\text{etc.}}.$$

Der Zähler und Nenner desselben wird aus der Formel *Eulers*,

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)\dots$$
$$=1+\frac{xz}{1-x}+\frac{x^3z^2}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^6z^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\text{etc.},$$

erhalten, wenn man $x^{-1}vz$ und $x^{-1}wz$ für z setzt. Hieraus folgt

$$3.\quad [w,v]=1+\frac{v-w}{1-x}z+\frac{(v-w)(v-xw)}{(1-x)(1-x^2)}z^2+\frac{(v-w)(v-xw)(v-x^2w)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}z^3+\text{etc.}$$
$$=\frac{(1-wz)(1-xwz)(1-x^2wz)(1-x^3wz)\dots}{(1-vz)(1-xvz)(1-x^2vz)(1-x^3vz)\dots}.$$

Um die Formel (3.) zu beweisen, setze ich

$$\varphi(z)=\frac{(1-wz)(1-xwz)(1-x^2wz)(1-x^3wz)\dots}{(1-vz)(1-xvz)(1-x^2vz)(1-x^3vz)\dots}$$
$$=1+A_1z+A_2z^2+A_3z^3+A_4z^4+\text{etc.},$$

wo die Coëfficienten A_1, A_2 etc. die Gröfse z nicht enthalten sollen. Aus der Relation

$$\varphi(z)-\varphi(xz)=z\{v\varphi(z)-w\varphi(xz)\},$$

welche unmittelbar aus der von $\varphi(z)$ gegebnen Definition folgt, erhält man die Werthe von A_1, A_2 etc. mittelst der Gleichungen:

$$(1-x)A_1=v-w,\quad (1-x^2)A_2=(v-xw)A_1,\quad (1-x^3)A_3=(v-x^2w)A_2,\ \text{etc.}$$

Durch Substitution dieser Werthe in die für $\varphi(z)$ angenommne Reihe ergiebt sich die Formel (3.), aus welcher sogleich auch die Formel (1.) folgt.

Wenn man die Formel (1.) mit $1+v_1z+v_2z^2+v_3z^3+$ etc. multiplicirt, und hierauf nach den Potenzen von z entwickelt, so giebt die Vergleichung der auf beiden Seiten in z^p multiplicirten Terme, die Formel

$$4.\quad \frac{(1-w)(1-xw)(1-x^2w)\dots(1-x^{p-1}w)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^p)}$$
$$=\frac{(1-v)(1-xv)(1-x^2v)\dots(1-x^{p-1}v)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^p)}+\frac{v-w}{1-x}\cdot\frac{(1-v)(1-xv)\dots(1-x^{p-2}v)}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{p-1})}$$
$$+\frac{(v-w)(v-xw)}{(1-x)(1-x^2)}\cdot\frac{(1-v)(1-xv)\dots(1-x^{p-3}v)}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{p-2})}\dots+\frac{(v-w)(v-xw)\dots(v-x^{p-1}w)}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^p)},$$

welche dem sogenannten binomischen Lehrsatz für Facultäten entspricht. Man findet diese Formel in der *Analysis* von *Schweins* (Heidelb. 1820 pg. 292. 3), nur dafs dort für v und w beliebige ganze Potenzen von x gesetzt sind. Es

folgt aus derselben durch Division mit dem ersten Terme des rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Ausdrucks

5. $$\frac{(1-w)(1-xw)(1-x^2w)\ldots.(1-x^{p-1}w)}{(1-v)(1-xv)(1-x^2v)\ldots.(1-x^{p-1}v)}$$

$$= 1+\frac{v-w}{1-x}\cdot\frac{1-x^p}{1-x^{p-1}v}+\frac{(v-w)(v-xw)}{(1-x)(1-x^2)}\cdot\frac{(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-x^{p-1}v)(1-x^{p-2}v)}$$

$$\ldots.+\frac{(v-w)(v-xw)\ldots.(v-x^{p-1}w)}{(1-x^{p-1}v)(1-x^{p-2}v)\ldots.(1-v)}.$$

Setzt man $x^{p-1}v=r$, $x^{p-1}w=u$, und dann $\frac{1}{x}$ für x, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

6. $$\frac{(1-u)(1-xu)(1-x^2u)\ldots.(1-x^{p-1}u)}{(1-r)(1-xr)(1-x^2r)\ldots.(1-x^{p-1}r)}$$

$$= 1-\frac{u-r}{1-x}\cdot\frac{1-x^p}{1-r}+\frac{(u-r)(u-xr)}{(1-x)(1-x^2)}\cdot\frac{(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-r)(1-xr)}x$$

$$\ldots.\pm\frac{(u-r)(u-xr)\ldots.(u-x^{p-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{p-1}r)}\cdot\frac{(1-x^p)(1-x^{p-1})\ldots.(1-x)}{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{p-1}r)}x^{\frac{1}{2}p(p-1)}.$$

Setzt man hierin $u=x^m r$, so erhält man

7. $$\frac{(1-x^m r)(1-x^{m+1}r)\ldots.(1-x^{m+p-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{p-1}r)}=\frac{(1-x^p r)(1-x^{p+1}r)\ldots.(1-x^{p+m-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{m-1}r)}$$

$$= 1+\frac{(1-x^m)(1-x^p)}{(1-x)(1-r)}r+\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-x)(1-x^2)(1-r)(1-xr)}x^2r^2+\text{etc.}$$

wo die einzelnen Terme die Factoren $x^\beta r^\alpha$ haben, in welchen die Exponenten α und β die natürlichen und die pronischen (doppelten dreieckigen) Zahlen sind. Wenn man ferner in (6.) r für u und $x^m r$ für r setzt, so erhält man

8. $$\frac{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{p-1}r)}{(1-x^m r)(1-x^{m+1}r)\ldots.(1-x^{m+p-1}r)}=\frac{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{m-1}r)}{(1-x^p r)(1-x^{p+1}r)\ldots.(1-x^{p+m-1}r)}$$

$$= 1-\frac{(1-x^m)(1-x^p)}{(1-x)(1-x^m r)}r+\frac{(1-x^m)(1-x^{m+1})(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^m r)(1-x^{m+1}r)}xr^2+\text{etc.},$$

wo die Exponenten α und β in den Factoren $r^\alpha x^\beta$ die natürlichen und die dreieckigen Zahlen sind. Diese Gleichung wird auch aus der vorigen erhalten, wenn man $-m$ für m und dann $x^m r$ setzt.

Setzt man in (3.) $z=1$, $v=r$, $w=x^m r$ oder $z=1$, $v=x^m r$, $w=r$, so erhält man für die Ausdrücke (7.) und (8.) andre Entwicklungen:

9. $$\frac{(1-x^m r)(1-x^{m+1}r)\ldots.(1-x^{m+p-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{p-1}r)}=\frac{(1-x^p r)(1-x^{p+1}r)\ldots.(1-x^{p+m-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{m-1}r)}$$

$$= 1+\frac{(1-x^m)(1-x^p)}{(1-x)(1-x^{p-1}r)}r+\frac{(1-x^m)(1-x^{m+1})(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^{p-1}r)(1-x^{p-2}r)}r^2+\text{etc.},$$

$$10.\quad \frac{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{p-1}r)}{(1-x^m r)(1-x^{m+1}r)\ldots.(1-x^{m+p-1}r)} = \frac{(1-r)(1-xr)\ldots.(1-x^{m-1}r)}{(1-x^p r)(1-x^{p+1}r)\ldots.(1-x^{p+m-1}r)}$$
$$= 1 - \frac{(1-x^m)(1-x^p)}{(1-x)(1-x^{m+p-1}r)}r + \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^{m+p-1}r)(1-x^{m+p-2}r)}xr^2 + \text{etc.}$$

In der letzten Formel sind wieder in den Factoren $r^\alpha x^\beta$ die Exponenten α und β die natürlichen und die dreieckigen Zahlen. In den Reihen (8.) und (9.) mufs man m und p, wenn sie beide ganze positive Zahlen sind, mit einander vertauschen können, wie aus der in diesem Falle geltenden doppelten Darstellung der ihnen gleichen Producte erhellt. Wenn aber diese Producte für andre Werthe von m und p eine Bedeutung zu haben aufhören, so bleibt doch die Gleichheit der durch Vertauschung von m und p erhaltnen Reihen für jeden Werth von m und p gültig. Denn wenn man die Reihen, welche für ganze positive Werthe von m und p einander gleich sind, nach den aufsteigenden Potenzen von r entwickelt, und die in dieselben Potenzen von r multiplicirten Terme vergleicht, so erhält man zwischen den Gröfsen x^m und x^p, die man als zwei Unbekannte ansehen kann, Gleichungen von einer endlichen Ordnung, die für unendlich viele Werthe der Unbekannten erfüllt werden, nämlich immer, wenn man für dieselben beliebige ganze positive Potenzen von x setzt. Es mufs also jede dieser Gleichungen identisch sein, in welchem Falle aber auch die Gleichungen zwischen den Reihen gelten, wenn man für x^m und x^p beliebige Gröfsen setzt. Man erhält auf diese Weise, wenn man für x^m und x^p die Gröfsen s und t substituirt, die beiden Gleichungen:

$$11.\quad 1 + \frac{(1-s)(1-t)r}{(1-x)(1-x^{-1}tr)} + \frac{(1-s)(1-xs)(1-t)(1-x^{-1}t)r^2}{(1-x)(1-x^2)(1-x^{-1}tr)(1-x^{-2}tr)} + \text{etc.}$$
$$= 1 + \frac{(1-s)(1-t)r}{(1-x)(1-x^{-1}sr)} + \frac{(1-t)(1-xt)(1-s)(1-x^{-1}s)r^2}{(1-x)(1-x^2)(1-x^{-1}sr)(1-x^{-2}sr)} + \text{etc.},$$

$$12.\quad 1 - \frac{(1-s)(1-t)r}{(1-x)(1-sr)} + \frac{(1-s)(1-xs)(1-t)(1-x^{-1}t).xr^2}{(1-x)(1-x^2)(1-sr)(1-xsr)} - \text{etc.}$$
$$= 1 - \frac{(1-s)(1-t)r}{(1-x)(1-tr)} + \frac{(1-t)(1-xt)(1-s)(1-x^{-1}s).xr^2}{(1-x)(1-x^2)(1-tr)(1-xtr)} - \text{etc.},$$

in deren letztrer der $(i+1)^{te}$ Term den Factor $x^{\frac{1}{2}i(i-1)}$ hat. Weil bei dem Beweise dieser beiden Gleichungen eine Entwicklung nach den aufsteigenden Potenzen von r vorausgesetzt worden ist, so mufs man in der ersten derselben $x > 1$, in der zweiten $x < 1$ annehmen. Auch sieht man, wie die eine in die andre übergeht, wenn man xr für r und dann $\frac{1}{x}$ für x setzt.

Will man das Product

$$(1-r)(1-xr)(1-x^2r)\ldots.(1-x^{m-1}r),$$

in welchem x kleiner als 1 angenommen werden soll, *interpoliren*, d. h. will man einen Ausdruck haben, welcher die Fundamental-Eigenschaft dieses Productes besitzt und sich für ein ganzes positives m auf dieses Product selbst reducirt, so dient hiezu der in's Unendliche fortlaufende Ausdruck

$$13.\quad \frac{1-r}{1-x^m r}\cdot\frac{1-xr}{1-x^{m+1}r}\cdot\frac{1-x^2 r}{1-x^{m+2}r}\cdot\frac{1-x^3 r}{1-x^{m+3}r}\cdots\cdot$$
$$= (1-r)(1-xr)(1-x^2 r)\ldots(1-x^{m-1}r).$$

Denn wenn man denselben bis zum $n$ten Factor fortsetzt, wodurch man das Product

$$\frac{(1-r)(1-xr)(1-x^2 r)\ldots(1-x^{n-1}r)}{(1-x^m r)(1-x^{m+1}r)\ldots(1-x^{m+n-1}r)}$$

erhält, so wird für ein ganzes positives m das Verhältnifs dieses zu dem vorgelegten Product,

$$\frac{(1-r)(1-xr)(1-x^2 r)\ldots(1-x^{n-1}r)}{(1-r)(1-xr)(1-x^2 r)\ldots(1-x^{m+n-1}r)} = \frac{1}{(1-x^n r)(1-x^{n+1}r)\ldots(1-x^{n+m-1}r)},$$

eine Gröfse, die sich mit wachsendem n und zwar sehr schnell der Einheit nähert. Die Fundamental-Eigenschaft des vorgelegten Productes, das ich mit $F(r)$ bezeichnen will, ist durch die Gleichung

$$\frac{(1-r)F(xr)}{(1-x^m r)F(r)} = 1$$

ausgedrückt. Substituirt man für $F(r)$ das unendliche Product, so wird der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen

$$\frac{1-xr}{1-x^{m+1}r}\cdot\frac{(1-x^2 r)(1-x^{m+1}r)}{(1-xr)(1-x^{m+2}r)}\cdot\frac{(1-x^3 r)(1-x^{m+2}r)}{(1-x^2 r)(1-x^{m+3}r)}\cdots;$$

setzt man dieses Product bis zum $n$ten Factor fort, so erhält man

$$\frac{1-x^n r}{1-x^{(m+n)}r},$$

welche Gröfse sich für jedes m mit wachsendem n sehr schnell der Einheit nähert.

Für ganze positive Werthe von m und p kann man den Ausdruck (7.)

$$\frac{(1-x^p r)(1-x^{p+1}r)\ldots(1-x^{p+m-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{m-1}r)} = \frac{(1-x^m r)(1-x^{m+1}r)\ldots(1-x^{m+p-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{p-1}r)},$$

auch durch die Formel

$$\frac{(1-r)(1-xr)(1-x^2 r)\ldots(1-x^{m+p-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{m-1}r)\cdot(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{p-1}r)}$$

darstellen. Will man diese Formel interpoliren, so geschieht dies nach dem Vorigen durch das unendliche Product

$$14.\quad \frac{(1-x^m r)(1-x^p r)}{(1-r)(1-x^{m+p}r)}\cdot\frac{(1-x^{m+1}r)(1-x^{p+1}r)}{(1-xr)(1-x^{m+p+1}r)}\cdot\frac{(1-x^{m+2}r)(1-x^{p+2}r)}{(1-x^2 r)(1-x^{m+p+2}r)}\cdots$$
$$= \frac{(1-x^p r)(1-x^{p+1})\ldots(1-x^{p+m-1}r)}{(1-r)(1-xr)\ldots(1-x^{m-1}r)}$$

Die Formel (7.) gilt für ein ganzes positives p, aber für ein beliebiges m. Die dort gegebene Reihe

$$1+\frac{(1-x^m)(1-x^p)}{(1-x)(1-r)}r+\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^p)(1-x^{p-1})}{(1-x)(1-x^2)(1-r)(1-xr)}r^2x^2+\text{etc.}$$

behält aber ihre Bedeutung, wenn man für beide Potenzen x^m und x^p beliebige Gröfsen setzt, während das Product eine Bedeutung zu haben aufhört, wenn nicht wenigstens eine der Gröfsen m und p eine ganze positive Zahl ist. Ersetzt man aber das Product durch seine Interpolationsformel (14.), so bleibt die Gleichung (7.) für ein beliebiges m und p bestehen. Setzt man nämlich wieder

$$x^m = s, \quad x^p = t,$$

so ist zufolge des bereits Gefundenen die Formel

15. $$1+\frac{(1-s)(1-t)}{(1-x)(1-r)}r+\frac{(1-s)(x-s)(1-t)(x-t)}{(1-x)(1-x^2)(1-r)(1-xr)}r^2$$
$$+\frac{(1-s)(x-s)(x^2-s)(1-t)(x-t)(x^2-t)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-r)(1-xr)(1-x^2r)}r^3 \text{ etc.}$$
$$=\frac{(1-sr)(1-tr)}{(1-r)(1-str)}\cdot\frac{(1-xsr)(1-xtr)}{(1-xr)(1-xstr)}\cdot\frac{(1-x^2sr)(1-x^2tr)}{(1-x^2r)(1-x^2str)}\cdots$$

immer gültig, wenn wenigstens die eine der beiden Gröfsen s oder t eine ganze positive Potenz von x ist. Es sei der erste Factor des unendlichen Productes, in eine Reihe nach den aufsteigenden Potenzen von r entwickelt,

$$\frac{(1-sr)(1-tr)}{(1-r)(1-str)} = 1+c_1r+c_2r^2+c_3r^3+\text{etc.},$$

so wird das unendliche Product die Gränze, welcher sich der Ausdruck

$$\begin{aligned}&(1+c_1r+c_2r^2+c_3r^3+\text{etc.})\\ \times&(1+c_1xr+c_2x^2r^2+c_3x^3r^3+\text{etc.})\\ \times&(1+c_1x^2r+c_2x^4r^2+c_3x^6r^3+\text{etc.})\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \times&(1+c_1x^nr+c_2x^{2n}r^2+c_3x^{3n}r^3+\text{etc.})\end{aligned}$$

nähert, wenn man n in's Unendliche wachsen läfst. Bezeichnet man diese Gränze mit

$$1+C_1r+C_2r^2+C_3r^3+\text{etc.},$$

so ist C_i eine endliche ganze rationale Function der Gröfsen $c_1, c_2, \ldots c_i$, also auch eine endliche ganze rationale Function der Gröfsen s und t. Ist die unendliche Reihe links vom Gleichheitszeichen in der Formel (15.), nach den aufsteigenden Potenzen von r entwickelt,

$$1+K_1r+K_2r^2+K_3r^3+\text{etc.},$$

so wird K_i ebenfalls eine endliche ganze rationale Function der Gröfsen s

und t, und es gilt die Gleichung

$$C_t = K_t$$

für ein beliebiges s und für unendliche viele Werthe von t, nämlich wenn man für t beliebige ganze positive Potenzen von x setzt. Aber dies ist nur möglich, wenn die Gleichung $C_t = K_t$ identisch ist, also auch für jeden Werth von t gilt, in welchem Falle auch die Gleichung (15.) für jeden Werth von t gilt. Es ist hiebei nur erforderlich, dafs die Gröfsen x, r und str kleiner als 1 sind, weil nur unter dieser Bedingung die nach den aufsteigenden Potenzen von r angestellten Entwicklungen convergent sind.

Man erhält ganz auf dieselbe Weise aus der Formel (8.) für den inversen Werth des Ausdrucks (7.) die Formel

$$16. \quad 1-\frac{(1-s)(1-t)r}{(1-x)(1-sr)}+\frac{(1-s)(1-xs)(1-t)(x-t)r^2}{(1-x)(1-x^2)(1-sr)(1-xsr)} \\ -\frac{(1-s)(1-xs)(1-x^2s)(1-t)(x-t)(x^2-t)r^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-sr)(1-xsr)(1-x^2sr)}+\text{etc.} \\ =\frac{(1-r)(1-str)}{(1-sr)(1-tr)}\cdot\frac{(1-xr)(1-xstr)}{(1-xsr)(1-xtr)}\cdot\frac{(1-x^2r)(1-x^2str)}{(1-x^2sr)(1-x^2tr)}\cdots,$$

in welcher nur vorausgesetzt wird, dafs x, sr und tr kleiner als 1 sind. Da das unendliche Product in Bezug auf s und t symmetrisch ist, und auch die Gränzbedingungen für s und t dieselben sind, so mufs es auch in der Reihe links vom Gleichheitszeichen verstattet sein, s und t zu vertauschen, wodurch man die oben besonders bewiesene Formel (12.) erhält.

In dem besondern Fall, wenn sich alle vier Gröfsen x, r, s, t gleichzeitig ihrer gemeinschaftlichen Gränze 1 unendlich nähern, gehen die Reihen (15.) und (16.) in die Form

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}+\text{etc.}$$

über. Dieser Gränzfall ist schwieriger zu behandeln als der allgemeine, in welchem x um eine beliebige endliche Gröfse kleiner als 1 ist, und es sind die Gröfsen α, β, γ noch, wie man weifs, gewissen besondern Bedingungen zu unterwerfen, damit die Reihe convergire.

Die hier gegebne Interpolationsformel (13.) ist der *Euler*schen Interpolationsformel des Productes $1.2.3\ldots.n$ analog, aber sie ist einfacher und, wenn man will, elementarer als diese. Die *Euler*sche Interpolationsformel, und zwar in ihrer noch heut gebräuchlichen Form, gehört zu seinen ersten bekannt gewordnen Arbeiten. In der von Herrn Staatsrath *von Fufs* herausgegebnen Correspondenz findet sich nämlich in dem ersten Briefe *Eulers* an *Goldbach* vom

13. October *1729* das Product $1.2.3\ldots m$ bereits durch das unendliche Product

$$\frac{1.2^m}{1+m}\cdot\frac{2^{1-m}.3}{2+m}\cdot\frac{3^{1-m}.4}{3+m}\cdot\frac{4^{1-m}.5}{4+m}\text{ etc.}$$

ersetzt. *Euler* hat in dem 3ten Theil seiner Differentialrechnung im 16ten Capitel „*Von der Differentiation der inexplicabeln Functionen*" §. 382 die allgemeine Regel gegeben, dafs das Product $A.B.C\ldots.X$, wo X der x^{te} Factor, X', X'' etc. die auf X folgenden sind, durch das unendliche Product

$$\frac{A}{X'}\cdot\frac{B}{X''}\cdot\frac{C}{X'''}\cdot\frac{D}{X^{\text{IV}}}\cdots$$

interpolirt wird, wenn $\log X$ für ein unendliches x verschwindet; dagegen durch das unendliche Product

$$\frac{A^x}{X'}\cdot\frac{B^x A^{1-x}}{X''}\cdot\frac{C^x A^{1-x}}{X'''}\cdots,$$

wenn erst die ersten Differenzen der Reihe $\log X$, $\log X'$ etc. für ein unendliches x verschwinden. Im folgenden Capitel „*Von der Interpolation der Reihen*" §. 399 giebt er noch für den Fall, wo erst die zweiten Differenzen der Reihe $\log X$, X', X'' etc. für ein unendliches x verschwinden, die Interpolationsformel

$$A\cdot B\cdot C\ldots.X$$
$$= A^{x(2-x)}B^{\frac{1}{2}x(x-1)}\cdot\frac{A^{\frac{1}{2}(x-1)(x-2)}B^{x(2-x)}C^{\frac{1}{2}x(x-1)}}{X'}\cdot\frac{B^{\frac{1}{2}(x-1)(x-2)}C^{x(2-x)}D^{\frac{1}{2}x(x-1)}}{X''}\cdots$$

Der hier betrachtete Fall gehört zu der einfachsten Classe, weil der Factor $\log(1-rx^n)$ selbst schon für ein unendliches n verschwindet, während der Gränzfall, wo r und x sich der Einheit unendlich nähern, zu dem nächst folgenden schwierigern gehört, wo erst die ersten Differenzen der Logarithmen der unendlich entfernten Factoren verschwinden.

Ich erwähne gelegentlich, dafs *Euler* in dem nächst folgenden Briefe vom 8ten Januar 1730 die Darstellung der Interpolationsformel von $1.2.3\ldots.n$ durch das bestimmte Integral $\int dx(-lx)^n$, giebt und die Formel,

$$\sqrt[q]{(1\cdot2\cdot3\ldots.q)}\left[\left(\frac{2p}{q}+1\right)\left(\frac{3p}{q}+1\right)\left(\frac{4p}{q}+1\right)\ldots.\left(\frac{qp}{q}+1\right)\right]\cdot$$
$$\left[\int dx(x-xx)^{\frac{p}{q}}\int dx(xx-x^3)^{\frac{p}{q}}\ldots.\int dx(x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}\right]$$
$$=\int dx(-lx)^{\frac{p}{q}},$$

wo die Integrale immer zwischen den Gränzen 0 und 1 zu nehmen sind. Er bemerkt, wie für $p=1$, $q=2$ mittelst dieser Formel der Werth von $\int dx(-lx)^{\frac{1}{2}}$ durch die Kreisperipherie erhalten wird.

28. Juni 1846.

18.

Über eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen und über die rationale Form ihrer vollständigen algebraischen Integralgleichungen.

Ich werde das System Differentialgleichungen

$$1.\quad \begin{cases} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}\cdots+\frac{dx_n}{\sqrt{X_n}}=0, \\ \frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2\,dx_2}{\sqrt{X_2}}\cdots+\frac{x_n\,dx_n}{\sqrt{X_n}}=0, \\ \frac{x_1^2\,dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2^2\,dx_2}{\sqrt{X_2}}\cdots+\frac{x_n^2\,dx_n}{\sqrt{X_n}}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{x_1^{n-2}\,dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{x_2^{n-2}\,dx_2}{\sqrt{X_2}}\cdots+\frac{x_n^{n-2}\,dx_n}{\sqrt{X_n}}=0, \end{cases}$$

in welchem X_1, X_2, ... X_n dieselben ganzen Functionen $2n^{\text{ten}}$ Grades respective von den Variabeln x_1, x_2, ... x_n sind, und $n>2$ ist, mit dem Namen *eines Systems hyperelliptischer Differentialgleichungen* bezeichnen. Man weifs, dafs sie durch rein algebraische Gleichungen vollständig integrirt werden können. Wenn X_1 und X_2 vom 4ten Grade sind, hat *Euler* gefunden, dafs das algebraische Integral der Gleichung

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}+\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}=0$$

eine Gleichung zweiter Ordnung zwischen den beiden Gröfsen

$$x_1+x_2 \quad \text{und} \quad x_1x_2$$

ist. Die algebraischen Integralgleichungen eines Systems hyperelliptischer Differentialgleichungen hat man noch nicht in rationaler Form dargestellt, dürfte auch dazu von den bekannten Formeln aus durch Anwendung der gewöhnlichen Regeln zur Fortschaffung der Wurzelgröfsen nur mit Mühe gelangen, insbesondere wenn man eine solche rationale Form der Gleichungen zu er-

langen wünscht, welche die Gewifsheit gewährt, dafs sie durch keine Combination derselben vereinfacht werden kann. Ich habe daher eine neue Integrationsmethode ersonnen, welche direct zu den rationalen algebraischen Integralgleichungen eines Systems hyperelliptischer Differentialgleichungen und zwar in ihrer einfachsten Form führt. Das von *Euler* gefundne Resultat wird hiedurch verallgemeinert. Ich finde nämlich, dafs das System von $n-1$ *rationalen* Gleichungen, durch welche das oben aufgestellte System hyperelliptischer Differentialgleichungen vollständig integrirt wird,

> aus *einer* Gleichung *zweiten* Grades zwischen der Summe der Gröfsen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und der Summe ihrer Amben und aus $n-2$ andern Gleichungen besteht, mittelst welcher durch diese beiden Gröfsen die Summe der Ternen, Quaternen etc. und das Product der Variabeln *lineär* ausgedrückt werden.

Ist X die Function unter dem Wurzelzeichen, wenn man x die Variable nennt, so mufs zur Bildung dieser Gleichungen die Function X durch die Form S^2-RT dargestellt werden, wo R, S, T ganze Functionen von x vom n^{ten} Grade sind. Die hiebei willkürlich anzunehmenden constanten Gröfsen geben, wie bei *Euler*, die willkürlichen Constanten, mit denen die rationalen Integralgleichungen behaftet sind.

Ich betrachte die Gleichung

$$Ry^2+2Sy+T=0,$$

wo R, S, T ganze Functionen von x vom n^{ten} Grade sind. Dieselbe Gleichung nach x geordnet sei

$$2. \quad Yx^n - Y_1x^{n-1} + Y_2x^{n-2} \ldots \pm Y_n = Ry^2+2Sy+T = 0,$$

wo $Y, Y_1, \ldots Y_n$ ganze Functionen von y vom 2ten Grade sind. Durch Differentiation dieser Gleichung erhält man

$$\frac{dx}{Ry+S} + \frac{2\,dy}{nYx^{n-1}-(n-1)Yx^{n-2} \ldots \mp Y_{n-1}} = 0.$$

Nennt man

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

die n Werthe, welche x für ein gegebnes y annimmt, und R_i, S_i, T_i die durch Substitution von $x=x_i$ aus R, S, T erhaltnen Ausdrücke, so kann man dieser Differentialgleichung die Form

$$\frac{dx_i}{\sqrt{(S_i^2-R_iT_i)}} + \frac{2\,dy}{Y(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_n)} = 0$$

geben, wo im Nenner des zweiten Gliedes der verschwindende Factor $x_i - x_i$ auszulassen ist. Ist P_i eine rationale Function von x_i, und dehnt man die Summen auf die n Werthe von i aus, so erhält man hieraus

$$\Sigma \frac{P_i\, dx_i}{\sqrt{(S_i^2 - R_i T_i)}} + Q\, dy = 0,$$

wo die Gröfse

$$Q = \frac{2}{Y} \Sigma \frac{P_i}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \ldots (x_i - x_n)}$$

mittelst der Gleichung (2.) eine rationale Function von y wird. Ist insbesondre P_i eine ganze Potenz von x_i, deren Exponent kleiner als $n-1$ ist, so verschwindet Q. Man erhält in diesem Fall das oben aufgestellte System hyperelliptischer Differentialgleichungen (1.), wenn man auf irgend eine Weise drei ganze Functionen R, S, T vom n^{ten} Grade so bestimmt, dafs

$$SS - RT = X$$

wird.

Setzt man

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = x^n - u_1 x^{n-1} + u_2 x^{n-2} \ldots \pm u_n,$$

wo u_1 die Summe der Gröfsen x_1, x_2, ... x_n, und u_2, u_3 etc. die Summe ihrer Amben, Ternen u. s. w. bedeutet, so erhält man aus der Gleichung (2.),

$$3. \quad u_1 = \frac{Y_1}{Y}, \quad u_2 = \frac{Y_2}{Y}, \quad \ldots \quad u_n = \frac{Y_n}{Y}.$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen ergiebt sich durch Elimination von y eine Gleichung *zweiter* Ordnung zwischen u_1 und u_2. Denn die sechs Gröfsen

$$Y^2, \quad Y^2 u_1, \quad Y^2 u_2, \quad Y^2 u_1^2, \quad Y^2 u_1 u_2, \quad Y^2 u_2^2$$

werden ganzen Functionen von y vom 4ten Grade gleich, welche aus 5 Termen bestehen, und man kann daher, wenn man diese sechs Gleichungen mit constanten Factoren α, β etc. multiplicirt und addirt, eine Gleichung von der Form

$$\alpha + \beta u_1 + \gamma u_2 + \delta u_1^2 + \varepsilon u_1 u_2 + \zeta u_2^2 = 0$$

erhalten. Man kann ferner, wenn Y_m eine der Functionen Y_3, Y_4, ... Y_n ist, Y als einen linearen homogenen Ausdruck von Y_1, Y_2, Y_m darstellen,

$$Y = \varkappa_m Y_1 + \lambda_m Y_2 + \mu_m Y_m,$$

wo $\varkappa_m$, λ_m, μ_m Constanten sind, wodurch man zwischen je drei Gröfsen u_1, u_2, u_m eine Gleichung von der Form

$$\varkappa_m u_1 + \lambda_m u_2 + \mu_m u_m = 1$$

erhält. Es findet daher zwischen den Gröfsen u_1, u_2, ... u_n eine Anzahl von

$n-1$ Gleichungen Statt, von denen eine von der zweiten Ordnung ist und die andern lineär sind. Man sieht zu gleicher Zeit, dafs es unmöglich ist, diese Gleichungen, insofern man sie als Gleichungen zwischen den in den vorgelegten Differentialgleichungen (1.) enthaltnen Variabeln betrachtet, in eine einfachere Form zu bringen.

In den Ausdrücken von R, S, T kann man einen Coëfficient $=1$ setzen; aufserdem aber kann man immer noch drei Coëfficienten beliebig annehmen, ohne dafs hiedurch die Allgemeinheit der Integralgleichungen beschränkt wird. Setzt man nämlich $\frac{my+n}{py+q}$ statt y, wo m, n, p, q beliebige Constanten sind, welche die Gleichung $mq-np=1$ erfüllen, so verwandelt sich die Gleichung (1.) in

$$R'y^2+2S'y+T' = 0,$$

wo

$$R' = m^2R+2mpS+p^2T, \qquad T' = n^2R+2nqS+q^2T,$$
$$S' = mnR+(mq+np)S+pqT, \qquad S'S'-R'T' = SS-RT.$$

Man kann daher die Constanten m, n, p, q z. B. so bestimmen, dafs in S zwei Coëfficienten $=0$ werden, und ein dritter einen gegebnen Werth erhält. Hierdurch reducirt sich die Zahl der in den Integralgleichungen enthaltnen Constanten auf

$$3(n+1)-4 = 3n-1.$$

Die Zahl der in den Differentialgleichungen vorkommenden Constanten ist aber nur $2n$, weil dies die Anzahl der Coëfficienten von X ist, wenn man einen derselben $=1$ setzt. Da sich aus den angegebnen $n-1$ Gleichungen zwischen den Gröfsen u_1, u_2, ... u_n durch Einführung der Gröfse y die Gleichungen (3.), und aus diesen durch die obigen Betrachtungen die Differentialgleichungen (1.) ergeben, welche $n-1$ Constanten weniger als die zwischen den Gröfsen $u_1, u_2, \dots u_n$ aufgestellten Gleichungen enthalten, so sind die letztern die vollständigen Integralgleichungen des aufgestellten Systems Differentialgleichungen (1.).

Um die gegebne Function X durch die Form S^2-RT darzustellen, könnte man alle Coëfficienten in S willkürlich annehmen, und hätte dann nur S^2-X in zwei Factoren R und T vom n^{ten} Grade zu zerfällen. Dies erfordert aber die Auflösung höherer Gleichungen. Man wird mit Ausziehung von Quadratwurzeln ausreichen, wenn man folgendermafsen verfährt.

Man bestimme, etwa durch die sogenannte *Lagrange*sche Interpolationsformel, eine ganze Function S vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, welche für n willkürlich angenommne Werthe von x,

$$a_1, \; a_2, \; \dots \; a_n,$$

dieselben Werthe annimmt, wie die irrationale Function $\sqrt{X}$. Nennt man diese Function S, so verschwindet $SS-X$ für diese n Werthe von x und mufs also durch

$$T = f(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$$

theilbar sein, wo f ein constanter Factor ist. Nennt man den Quotient R, so sind R, S, T die verlangten Functionen.

Man könnte S auch vom n^{ten} Grade annehmen, und noch die Bedingung hinzufügen, dafs es für einen neuen Werth $x=a$ einen bestimmten Werth erhalten soll. Nimmt man für letztern wieder den Werth von $\sqrt{X}$ für $x=a$, so würde man noch von R einen lineären Factor, nämlich $x-a$, kennen.

Für $y=0$ reduciren sich die Werthe von x_1, x_2, ... x_n auf a_1, a_2, ... a_n. Man erhält also, wenn man die Functionen R, S, T auf die angegebne Art bestimmt hat, die $n-1$ transcendenten Gleichungen,

$$\int_{a_1}^{x_1}\frac{x_1^m\,dx_1}{\sqrt{X_1}}+\int_{a_2}^{x_2}\frac{x_2^m\,dx_2}{\sqrt{X_2}}\dots+\int_{a_n}^{x_n}\frac{x_n^m\,dx_n}{\sqrt{X_n}}=0,$$

wo m jeden der Werthe 0, 1, 2, ... $n-2$ annehmen kann.

Die Zeichen sämmtlicher Wurzelgröfsen $\sqrt{X_i}$ werden durch den Werth der einen Gröfse y mittelst der Gleichung

$$R_i y+S_i = \sqrt{X_i}$$

bestimmt. Man hat daher für zwei der Variabeln x_i und x_k,

$$\frac{-S_i+\sqrt{X_i}}{R_i} = \frac{-S_k+\sqrt{X_k}}{R_k},$$

durch welche Gleichung die Wurzelgröfsen von einander abhängen. Wenn y von 0 an sich continuirlich ändert, so werden auch die Gröfsen $\sqrt{X_i}$ respective von $\sqrt{A_i}$ an sich continuirlich ändern, wenn man A_i den Werth von X für $x=a_i$ nennt. Das Zeichen jeder Wurzelgröfse $\sqrt{X_i}$ wird daher auch aus dem Zeichen von $\sqrt{A_i}$ durch die Bedingung der Continuität bestimmt.

Man setze jetzt U^2X für X, wo U eine ganze Function von x von der p^{ten} Ordnung bedeutet. Es seien ferner R, S, T ganze Functionen von x von der $(n+p)^{ten}$ Ordnung, welche die Gleichung

$$S^2-RT = U^2X$$

erfüllen, und x_1, x_2, ... x_{n+p} die Wurzeln der Gleichung

$$Ry^2+2Sy+T = 0,$$

die einem Werthe von y entsprechen. Man erhält dann die Differentialgleichung

$$\frac{dx_i}{U_i\sqrt{X_i}}+\frac{2\,dy}{Y(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{n+p})}=0,$$

wo Y der Coëfficient von x^{n+p} in der zwischen x und y aufgestellten Gleichung und U_i der Werth von U für $x = x_i$ ist. Multiplicirt man diese Gleichung mit $x_i^m U_i$, wo m wieder die Werthe 0, 1, 2, ... $n-2$ annehmen kann, und summirt für alle $n+p$ Werthe von i, so erhält man, indem man dem m seine $n-1$ Werthe giebt, folgendes System von $n-1$ Differentialgleichungen zwischen den $n+p$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{n+p}$,

$$3. \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \dfrac{dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots + \dfrac{dx_{n+p}}{\sqrt{X_{n+p}}} = 0, \\ \dfrac{x_1\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \dfrac{x_2\,dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots + \dfrac{x_{n+p}\,dx_{n+p}}{\sqrt{X_{n+p}}} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{x_1^{n-2}\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \dfrac{x_2^{n-2}\,dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots + \dfrac{x_{n+p}^{n-2}\,dx_{n+p}}{\sqrt{X_{n+p}}} = 0. \end{cases}$$

Setzt man

$$Ry^2 + 2Sy + T = Yx^{n+p} - Y_1 x^{n+p-1} + Y_2 x^{n+p-2} \ldots \pm Y_{n+p},$$

und nennt u_1, u_2, u_3 etc. die Summe der $n+p$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{n+p}$, die Summe ihrer Amben, Ternen etc., so erhält man

$$u_1 = \frac{Y_1}{Y}, \quad u_2 = \frac{Y_2}{Y}, \quad \ldots \quad u_{n+p} = \frac{Y_{n+p}}{Y},$$

und hieraus ergeben sich durch Elimination von y die algebraischen Integralgleichungen des Systems der Gleichungen (3.), nämlich *eine* Gleichung zweiter Ordnung zwischen u_1 und u_2 und andre $n+p-2$ Gleichungen, welche $u_3, u_4, \ldots u_{n+p}$ durch u_1 und u_2 linear bestimmen. Setzt man

$$T = f(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n+p}),$$

wo f eine Constante ist und man, ohne die Allgemeinheit der Integralgleichungen zu beeinträchtigen, für $p+1$ der Gröſsen $a_1, a_2, \ldots a_{n+p}$ bestimmte Werthe annehmen kann, so wird S eine ganze Function $(n+p)^{\text{ter}}$ Ordnung, die, wenn man für x die $n+p$ Werthe $a_1, a_2, \ldots a_{n+p}$ setzt, dieselben Werthe wie die Function $U\sqrt{X}$ hat. Es wird dann $S^2 - U^2 X$ durch T theilbar und der Quotient wird die Function R. Die mit den algebraischen Integralgleichungen identischen transcendenten werden

$$\int_{a_1}^{x_1} \frac{x_1^m\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \int_{a_2}^{x_2} \frac{x_2^m\,dx_2}{\sqrt{X_2}} \ldots + \int_{a_{n+p}}^{x_{n+p}} \frac{x_{n+p}^m\,dx_{n+p}}{\sqrt{X_{n+p}}} = 0,$$

so daſs man auch auf diesem neuen Wege die Addition auf eine beliebige Zahl Variabeln ausdehnen kann.

Wenn man wieder die Zahl der Variabeln auf n beschränkt, und zwischen u_1 und u_2 eine beliebige Gleichung zweiten Grades annimmt, so enthält diese 5 Constanten; wenn man ferner u_3, u_4, .. u_n auf beliebige Art lineär durch u_1 und u_2 ausdrückt, so enthält jede Gleichung, durch welche dieses geschieht, *zwei* Constanten. Die Zahl aller in diesen Gleichungen vorkommenden Constanten ist daher $5+3(n-2)=3n-1$ oder gleich der Zahl der in den Differentialgleichungen vorkommenden Constanten (der Coëfficienten von X, wenn man einen derselben $=1$ setzt) plus der Zahl der willkürlichen Constanten, welche die vollständigen Integralgleichungen enthalten müssen. Da man nun gezeigt hat, dafs letztere immer in die angegebne Form gebracht werden können, so folgt umgekehrt, dafs jedes System algebraischer Gleichungen von der angegebnen Form immer das System vollständiger Integralgleichungen von einem System hyperelliptischer Differentialgleichungen (1.) ist, wenn man die Coëfficienten der Function X unter dem Wurzelzeichen durch die Constanten der algebraischen Gleichungen gehörig bestimmt. Wenn man aber die angegebne Form der rationalen algebraischen Integralgleichungen für $n+p$ Variable anwenden will, so können hier nicht mehr alle Constanten der Gleichungen beliebig angenommen werden.

Man kann das gefundne Theorem auch folgendermafsen darstellen:

Setzt man

$$\begin{aligned} f(x) = & (bx^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} \ldots + b_n)^2 \\ & + (cx^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} \ldots + c_n)^2 \\ & - (ax^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \ldots + a_n)^2, \end{aligned}$$

so werden die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} \ldots + \frac{dx_n}{\sqrt{f(x_n)}} &= 0, \\ \frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2\,dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} \ldots + \frac{x_n\,dx_n}{\sqrt{f(x_n)}} &= 0, \\ \frac{x_1^2\,dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2^2\,dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} \ldots + \frac{x_n^2\,dx_n}{\sqrt{f(x_n)}} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{x_1^{n-2}\,dx_1}{\sqrt{f(x_1)}} + \frac{x_2^{n-2}\,dx_2}{\sqrt{f(x_2)}} \ldots + \frac{x_n^{n-2}\,dx_n}{\sqrt{f(x_n)}} &= 0 \end{aligned}$$

vollständig integrirt, wenn man für x_1, x_2, ... x_n die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{aligned} & a x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \ldots + a_n \\ = & (b x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} \ldots + b_n) \cos\varphi \\ & + (c x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} \ldots + c_n) \sin\varphi \end{aligned}$$

setzt, wo φ einen veränderlichen Winkel bedeutet.

Den 14. Juli 1846.

19.

Extraits de deux lettres de M. Charles Hermite à M. Jacobi.

I.

Paris, Janvier 1843.

L'étude de votre mémoire publié dans le journal de M. *Crelle* sous le titre: „De functionibus quadrupliciter periodicis quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur," m'a conduit pour la division des arguments dans ces fonctions, à un théorème analogue à celui que vous avez donnez dans le 3e volume du même journal, pour obtenir l'expression la plus simple des racines des équations traitées par *Abel*. M. *Liouville* m'a engagé à vous écrire pour vous soumettre ce travail; oserais-je espérer Monsieur que vous daignerez l'accueillir avec toute l'indulgence dont il a besoin?

Soit:

$$\Delta(x) = \sqrt{[x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x)]};$$

$$u = \int_0^x \frac{(\alpha+\beta x)\partial x}{\Delta(x)} + \int_0^y \frac{(\alpha+\beta y)\partial y}{\Delta(y)}, \quad u' = \int_0^x \frac{(\alpha'+\beta' x)\partial x}{\Delta(x)} + \int_0^y \frac{(\alpha'+\beta' y)\partial y}{\Delta(y)},$$

$$x = \lambda_0(u, u'), \qquad y = \lambda_1(u, u').$$

Faisons pour abréger:

$$x_n = \lambda_0(nu, nu'), \qquad y_n = \lambda_1(nu, nu'),$$

ces deux quantités seront déterminées simultanément par les deux racines d'une équation du second degré,

$$Ux_n^2 + U'x_n + U'' = 0,$$

dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de x, y, $\Delta(x)$, $\Delta(y)$; j'ai trouvé qu'ils étaient de la forme $P + Q\Delta(x)\Delta(y)$, où P et Q sont des fonctions rationnelles de x et y; mais cette remarque n'est pas essentielle pour ce qui suit.

Je partirai de ce que les racines simultanées des deux équations

$$(A.) \qquad Ux_n^2 + U'x_n + U'' = 0, \qquad Uy_n^2 + U'y_n + U'' = 0$$

sont données par les formules

$$x = \lambda_0\left(u + \frac{mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i_3\sqrt{-1}+m'''i_4}{n},\ u' + \frac{mi'_1\sqrt{-1}+m'i'_2+m''i'_3\sqrt{-1}+m'''i'_4}{n}\right),$$
$$y = \lambda_1\left(u + \frac{mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i_3\sqrt{-1}+m'''i_4}{n},\ u' + \frac{mi'_1\sqrt{-1}+m'i'_2+m''i'_3\sqrt{-1}+m'''i'_4}{n}\right),$$

en attribuant aux nombres entiers m, m', m'', m''' les valeurs $0, 1, 2, \ldots\, n-1$.

Cela posé, soit pour abréger

$I = mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i_3\sqrt{-1}+m'''i_4$, $\quad I' = mi'_1\sqrt{-1}+m'i'_2+m''i'_3\sqrt{-1}+m'''i'_4$,

et désignons par $f(x, y)$ une fonction rationnelle symétrique de x et y, et par p, q, r, s quatre racines de l'équation binome $x^n = 1$, je dis qu'on aura:

$$(B.)\quad \sum_0^{n-1}{}_{m'''}\sum_0^{n-1}{}_{m''}\sum_0^{n-1}{}_{m'}\sum_0^{n-1}{}_{m}\left\{f\left(\lambda_0\left(u+\frac{I}{n},\ u'+\frac{I'}{n}\right),\ \lambda_1\left(u+\frac{I}{n},\ u'+\frac{I'}{n}\right)\right)\right\}p^m q^{m'} r^{m''} s^{m'''}$$
$$= \sqrt[n]{[A + B\varDelta(\lambda_0(nu, nu')) + C\varDelta(\lambda_1(nu, nu')) + D\varDelta(\lambda_0(nu, nu'))\,\varDelta(\lambda_1(nu, nu'))]},$$

A, B, C, D désignant des fonctions rationnelles de $\lambda_0(nu, nu')$, $\lambda_1(nu, nu')$.

Le premier membre peut d'abord se ramener à une fonction rationnelle de $\lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(u, u')$. En effet, d'après la propriété fondamentale des fonctions λ_0, λ_1, un terme quelconque, tel que $f\left(\lambda_0\left(u+\frac{I}{n}, u'+\frac{I'}{n}\right),\ \lambda_1\left(u+\frac{I}{n}, u'+\frac{I'}{n}\right)\right)$ pourra être exprimé rationnellement en $\lambda_0(u,u')$, $\lambda_1(u,u')$, $\varDelta(\lambda_0(u,u'))$, $\varDelta(\lambda_1(u,u'))$, et les quantités analogues relatives à la division des indices. Or on trouve aisément ces formules:

$$\varDelta(x) = (\alpha+\beta x)\frac{dx}{du} + (\alpha'+\beta' x)\frac{dx}{du'}, \qquad \varDelta(y) = (\alpha+\beta y)\frac{dy}{du} + (\alpha'+\beta' y)\frac{dy}{du'}$$

qui montrent que les radicaux carrés $\varDelta(\lambda_0(u, u'))$, $\varDelta(\lambda_1(u, u'))$ pourront s'exprimer rationnellement en $\lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(u, u')$; car en faisant disparaître les irrationnelles des équations (*A.*), puis les différentiant successivement par rapport à u et u', on obtiendra les expressions des dérivées partielles en fonction rationnelle de $\lambda_0(u, u')$ et $\lambda_1(u, u')$.

Représentons le premier membre de l'équation (*B.*) par $\varphi(u, u')$, on démontrera bien aisément que:

$$\varphi\left(u + \frac{ki_1\sqrt{-1}+k'i_2+k''i_3\sqrt{-1}+k'''i_4}{n},\ u' + \frac{ki'_1\sqrt{-1}+k'i'_2+k''i'_3\sqrt{-1}+k'''i'_4}{n}\right)$$
$$= p^{-k} q^{-k'} r^{-k''} s^{-k'''}\varphi(u, u'),$$

quels que soient les entiers k, k', k'', k'''.

En l'élevant à la puissance n^e, on obtient donc une fonction rationnelle de $\lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(u, u')$, qui ne change point, en substituant à ces quantités deux autres quelconques des racines simultanées des équations proposées. Il suit

de là et de la théorie des fonctions symétriques des racines d'un système d'équations à plusieurs inconnues, que cette fonction pourra être déterminée rationnellement par les coefficients des équations $(A.)$.

J'observe actuellement qu'il a été introduit les quantités $\frac{d\lambda_0(nu, nu')}{du}$, $\frac{d\lambda_0(nu, nu')}{du'}$, $\frac{d\lambda_1(nu, nu')}{du}$, $\frac{d\lambda_1(nu, nu')}{du'}$ qu'on pourra éliminer par les formules suivantes:

$$(\alpha\beta'-\beta\alpha')\frac{dx}{du}=\frac{\Delta(x)}{y-x}(\alpha'+\beta'y), \qquad (\alpha'\beta-\beta'\alpha)\frac{dx}{du'}=\frac{\Delta(x)}{y-x}(\alpha+\beta y),$$

$$(\alpha\beta'-\beta\alpha')\frac{dy}{du}=\frac{\Delta(y)}{x-y}(\alpha'+\beta'x), \qquad (\alpha'\beta-\beta'\alpha)\frac{dy}{du'}=\frac{\Delta(y)}{x-y}(\alpha+\beta x).$$

Or, une fonction rationnelle quelconque des deux radicaux $\Delta(\lambda_0(u,u'))$, $\Delta(\lambda_1(u,u'))$ peut toujours être mise sous la forme

$$a+b\Delta(\lambda_0(u,u'))+c\Delta(\lambda_1(u,u'))+d\Delta(\lambda_0(u,u'))\,\Delta(\lambda_1(u,u')),$$

ce qui achève la démonstration du théorème énoncé.

En supposant successivement: $f(x,y)=x+y$, et $f(x,y)=xy$, on aura séparément par une somme de n^4-1 radicaux n^{es} les coefficients d'une équation du second degré, dont les racines détermineront finalement celles des équations proposées. On pourrait aussi faire voir qu'il suffit de connaître l'un d'eux, l'autre se déterminant rationnellement par celui-là.

Pour obtenir la division des indices, soit

$$u=\frac{ki_1\sqrt{-1}+k'i_2+k''i_3\sqrt{-1}+k'''i_4}{n}=\frac{I}{n}, \quad u'=\frac{ki'_1\sqrt{-1}+k'i'_2+k''i'_3\sqrt{-1}+k'''i'_4}{n}=\frac{I'}{n},$$

on aura: $x_n=0$, $y_n=0$, et les équations à résoudre seront

$$(C.) \qquad U'=0, \quad U''=0;$$

leurs racines seront comprises dans les formules

$$x=\lambda_0\left(\frac{mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i_3\sqrt{-1}+m'''i_4}{n}, \ \frac{mi'_1\sqrt{-1}+m'i'_2+m''i'_3\sqrt{-1}+m'''i'_4}{n}\right),$$

$$y=\lambda_1\left(\frac{mi_1\sqrt{-1}+m'i_2+m''i_3\sqrt{-1}+m'''i_4}{n}, \ \frac{mi'_1\sqrt{-1}+m'i'_2+m''i'_3\sqrt{-1}+m'''i'_4}{n}\right),$$

en attribuant aux nombres entiers m, m', m'', m''' les valeurs 0, 1, 2, ... $n-1$. Mais si l'on suppose le nombre n premier, on verra aisément qu'en supposant successivement:

$$(D.) \quad I_1=i\sqrt{-1}, \quad I'_1=i'_1\sqrt{-1}; \quad I_2=\mu i_1\sqrt{-1}+i_2, \quad I'_2=\mu i'_1\sqrt{-1}+i'_2;$$

$$I_3=\mu i_1\sqrt{-1}+\mu' i_2+i_3\sqrt{-1}, \qquad I'_3=\mu i'_1\sqrt{-1}+\mu' i'_2+i'_3\sqrt{-1};$$

$$I_4=\mu i_1\sqrt{-1}+\mu' i_2+\mu'' i_3\sqrt{-1}+i_4, \quad I'_4=\mu i'_1\sqrt{-1}+\mu' i'_2+\mu'' i'_3\sqrt{-1}+i'_4;$$

on pourra leur substituer les suivantes:

$$x = \lambda_0\left(m\frac{I_1}{n}, m\frac{I'_1}{n}\right), \quad y = \lambda_1\left(m\frac{I_1}{n}, m\frac{I'_1}{n}\right),$$

$$x = \lambda_0\left(m\frac{I_2}{n}, m\frac{I'_2}{n}\right), \quad y = \lambda_1\left(m\frac{I_2}{n}, m\frac{I'_2}{n}\right),$$

$$x = \lambda_0\left(m\frac{I_3}{n}, m\frac{I'_3}{n}\right), \quad y = \lambda_1\left(m\frac{I_3}{n}, m\frac{I'_3}{n}\right),$$

$$x = \lambda_0\left(m\frac{I_4}{n}, m\frac{I'_4}{n}\right), \quad y = \lambda_1\left(m\frac{I_4}{n}, m\frac{I'_4}{n}\right),$$

en excluant la solution zéro, et donnant à m, μ, μ', μ'', les valeurs 0, 1, 2, ... $n-1$.

Mais comme les intégrales qui entrent dans les expressions de u et u' ont été prises à la limite inférieure zéro, on a $\lambda_0(-u, -u') = \lambda_0(u, u')$, $\lambda_1(-u, -u') = \lambda_1(u, u')$, d'où il arrive que les n^4-1 solutions des équations ($C.$) sont égales deux à deux; et il suffira de prendre dans les formules précédentes, $m = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-1)$.

Soit toujours $f(x, y)$ une fonction rationnelle et symétrique de x et y, on établira d'abord, qu'en désignant par I l'une des quantités I_1, I_2, I_3, I_4, par I' la quantité correspondante au second argument, l'expression

$$f\left(\lambda_0\left(k\frac{I}{n}, k\frac{I'}{n}\right), \lambda_1\left(k\frac{I}{n}, k\frac{I'}{n}\right)\right)$$

peut se ramener quel que soit le nombre entier k, à une fonction rationnelle de $\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$. Cela résulte de ce que les radicaux $\Delta\left(\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)\right)$, $\Delta\left(\lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)\right)$ s'expriment eux-mêmes rationnellement en $\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, comme il est facile de le voir d'après ce qui a été dit plus haut.

Cela posé, l'expression

$$\sum_{0}^{\frac{1}{2}(n-1)}{}_k \left\{f\left(\lambda_0\left(k\frac{I}{n}, k\frac{I'}{n}\right), \lambda_1\left(k\frac{I}{n}, k\frac{I'}{n}\right)\right)\right\}^l,$$

où l est un entier quelconque, pourra être ramenée à une fonction rationnelle et symétrique de $\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, que je représenterai, pour abréger, par $\varphi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, et qu'on démontrera aisément jouir de la propriété que:

$$\varphi\left(\nu\frac{I}{n}, \nu\frac{I'}{n}\right) = \varphi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right),$$

quel que soit le nombre entier ν.

Donc, donnant successivement à I et I' toutes les valeurs correspondantes comprises dans les formules $(D.)$, on pourra construire une équation entièrement rationnelle, qui aura pour racines les valeurs qui en résulteront pour la fonction $\varphi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$.

Il est bien facile de voir que son degré sera le nombre

$$1+n+n^2+n^3 = \frac{n^4-1}{n-1}:$$

ainsi, l'équation de degré $\frac{1}{2}(n^4-1)$ de laquelle dépend la détermination d'une fonction rationnelle symétrique de $\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, peut être décomposée en $\frac{n^4-1}{n-1}$ facteurs du degré $\frac{1}{2}(n-1)$, au moyen des racines d'une équation rationnelle du degré $\frac{n^4-1}{n-1}$.

Les équations de degré $\frac{1}{2}(n-1)$ sont résolubles par radicaux. Pour le faire voir en peu de mots, soit ϱ une racine primitive par rapport au nombre premier n, on établira d'abord que leurs racines peuvent être représentées par la formule

$$f\left(\lambda_0\left(\varrho^k \frac{I}{n}, \varrho^k \frac{I'}{n}\right), \lambda_1\left(\varrho^k \frac{I}{n}, \varrho^k \frac{I'}{n}\right)\right),$$

en supposant $k = 0, 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-3)$; et si l'on considère la puissance de degré $\frac{1}{2}(n-1)$ de l'expression

$$\sum_{0}^{\frac{1}{2}(n-3)}{}_k\, f\left(\lambda_0\left(\varrho^k \frac{I}{n}, \varrho^k \frac{I'}{n}\right), \lambda_1\left(\varrho^k \frac{I}{n}, \varrho^k \frac{I'}{n}\right)\right)\theta^k,$$

où θ est une racine de $\theta^{\frac{1}{2}(n-1)}-1=0$, on verra qu'elle peut être ramenée à une fonction rationnelle et symétrique de $\lambda_0\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, $\lambda_1\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$ que je représenterai, pour abréger, par $\psi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)$, et qui jouira, comme la fonction φ, de la propriété que:

$$\psi\left(\frac{\nu I}{n}, \frac{\nu I'}{n}\right) = \psi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right).$$

Dès lors on démontre aisément qu'on peut trouver une fonction rationnelle $F(x)$ telle, que pour toutes les valeurs de I et I' comprises dans les formules $(D.)$, on ait:

$$\psi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right) = F\left(\varphi\left(\frac{I}{n}, \frac{I'}{n}\right)\right).$$

Or, connaissant la fonction ψ, on sait comment en déduire toutes les racines de l'équation proposée.

Les considérations précédentes semblent pouvoir s'appliquer également aux autres classes des transcendantes nommées généralement par *Legendre* fonctions ultra-elliptiques; il est facile en effet de trouver les formules suivantes. Soit

$$\Delta(x) = \sqrt{(x(1-x)(1-\lambda_1^2 x)\ldots.(1-\lambda_{2n+1}^2 x))},$$
$$\theta_k(x) = \alpha_k + \beta_k x + \gamma_k x^2 + \ldots. + \eta_k x^n,$$
$$\Phi_k(x) = \int_0^x \frac{\theta_k(x)\,dx}{\Delta(x)};$$

posons:

$$u_0 = \Phi_0(x_0) + \Phi_0(x_1) + \ldots. + \Phi_0(x_n),$$
$$u_1 = \Phi_1(x_0) + \Phi_1(x_1) + \ldots. + \Phi_1(x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_n = \Phi_n(x_0) + \Phi_n(x_1) + \ldots. + \Phi_n(x_n),$$

et soit:

$$x_0 = \lambda_0(u_0, u_1, \ldots. u_n),\quad x_1 = \lambda_1(u_0, u_1, \ldots. u_n),\quad \ldots.\quad x_n = \lambda_n(u_0, u_1, \ldots. u_n),$$

on aura:

$$\Delta(x_0) = \theta_0(x_0)\frac{dx_0}{du_0} + \theta_1(x_0)\frac{dx_0}{du_1} + \theta_2(x_0)\frac{dx_0}{du_2} + \ldots. + \theta_n(x_0)\frac{dx_0}{du_n},$$
$$\Delta(x_1) = \theta_0(x_1)\frac{dx_1}{du_0} + \theta_1(x_1)\frac{dx_1}{du_1} + \theta_2(x_1)\frac{dx_1}{du_2} + \ldots. + \theta_n(x_1)\frac{dx_1}{du_n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta(x_n) = \theta_0(x_n)\frac{dx_n}{du_0} + \theta_1(x_n)\frac{dx_n}{du_1} + \theta_2(x_n)\frac{dx_n}{du_2} + \ldots. + \theta_n(x_n)\frac{dx_n}{du_n}.$$

Les fonctions θ étant du degré n, on trouve aussi que les racines de l'équation du n^e degré

$$0 = \theta_0(x)\frac{dx_k}{du_0} + \theta_1(x)\frac{dx_k}{du_1} + \theta_2(x)\frac{dx_k}{du_2} + \cdots + \theta_n(x)\frac{dx_k}{du_n}$$

sont les n fonctions, $x_0, x_1, x_2, \ldots. x_{k-1}, x_{k+1} \ldots. x_n$.

En cherchant à déterminer directement le degré des équations relatives à la division des arguments dans les fonctions λ, j'ai été conduit à cette remarque, que l'équation algébrique correspondante à l'équation transcendante

$$\Phi(\alpha_0) + \Phi(\alpha_1) + \Phi(\alpha_2) + \ldots. + \Phi(\alpha_n) = \mu\Phi(x)$$

a ses coefficients rationnels en x, quel que soit le nombre entier μ; mais voici quelque chose de plus étendu.

Considérez la transcendante $\int_0^x \frac{\theta(x)\partial x}{\sqrt[n]{(F(x)^k)}}$, où $F(x)$ est un polynome entier du degré m, $\theta(x)$ un autre polynome d'un degré $< m\cdot\frac{k}{n} - 1$. Si l'on suppose

n et m premiers entre eux, et si l'on fait $\nu = \frac{1}{2}(m-1)(n-1)$, on sait que la somme d'un nombre quelconque de pareilles intégrales relatives aux variables x, y, z etc. est réductible à une somme composée de ν termes seulement, dont les arguments α_0, α_1, ... $\alpha_{\nu-1}$ sont déterminées par les racines d'une équation du degré ν, dont les coefficients sont rationnels en x, y, z, ..., $\sqrt[n]{(F(x))}$, $\sqrt[n]{(F(y))}$, $\sqrt[n]{(F(z))}$ etc.

Or, si l'on fait $x = y = z = \ldots$, l'équation correspondante à l'équation transcendante

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{\theta(x)dx}{\sqrt[n]{(F(x)^k)}} + \int_0^{\alpha_1} \frac{\theta(x)dx}{\sqrt[n]{(F(x)^k)}} + \cdots + \int_0^{\alpha_{\nu-1}} \frac{\theta(x)dx}{\sqrt[n]{(F(x)^k)}} = \mu \int_0^{x} \frac{\theta(x)dx}{\sqrt[n]{(F(x)^k)}}$$

aura tous ses coefficients rationnels en x.

II.

Paris, Août 1844.

La bonté avec laquelle vous avez accueilli mes premières recherches sur les fonctions Abéliennes, m'engage à vous écrire une seconde fois, pour vous soumettre quelques nouveaux résultats auxquels j'ai été conduit par l'étude de vos ouvrages, en essayant d'étendre aux transcendantes plus générales, les principales théories des fonctions elliptiques. Mon travail m'a amené naturellement, à rechercher la démonstration de quelques uns des théorèmes que vous avez énoncés dans le journal de M. *Crelle;* c'est aussi, Monsieur, ce dont je vous demanderai la permission de vous entretenir d'abord; je m'occuperai surtout de l'expression de $\sin\mathrm{am}(u, \varkappa)$ par $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$, si importante pour la théorie des fonctions elliptiques; mais je ne sais si j'aurai véritablement rencontré les principes qui vous ont couduit à ce beau théorème.

En suivant vos notations, je nommerai $H(x)$, $\Theta(x)$ les deux fonctions qui donnent

$$\sin\mathrm{am}(x) = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \cdot \frac{H(x)}{\Theta(x)},$$

et qui satisfont aux conditions:

$$1.\quad \Theta(x+2iK') = -e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Theta(x), \qquad H(x+2iK') = -e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}H(x),$$
$$\Theta(x+2K) = \Theta(x), \qquad H(x+2K) = -H(x);$$

et voici d'abord une remarque sur laquelle je me fonderai principalement.

Soit $\Phi(x)$ une fonction définie par l'équation

$$2.\qquad \Phi(x+2iK') = -e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Phi(x)$$

et par la condition de périodicité

$$3.\qquad \Phi(x+4K) = \Phi(x),$$

on trouvera qu'en supposant

$$\Phi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m a_m e^{m\frac{i\pi x}{2K}},$$

les coefficients se déterminent de la manière suivante:

$$a_{2\mu} = (-1)^\mu a_0 q^{\mu^2}, \qquad a_{2\mu+1} = (-1)^\mu a_1 q^{\mu(\mu+1)},$$

de sorte qu'en employant les fonctions H et Θ, on a

$$\Phi(x) = AH(x)+B\Theta(x).$$

Cela posé, soit n un nombre premier, p un entier compris entre 0 et $n-1$, faisons $\alpha = e^{-p\frac{8i\pi}{n}}$ et considérons la somme

$$\frac{H(x)}{\Theta(x)}+\alpha\frac{H\left(x+\frac{4K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4K}{n}\right)}+\alpha^2\frac{H\left(x+\frac{8K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{8K}{n}\right)}+\ldots+\alpha^{(n-1)}\frac{H\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)};$$

nommons $\Phi(x)$ le numérateur et $\Phi_0(x)$ le dénominateur, savoir:

$$\Phi_0(x) = \Theta(x)\Theta(x)\left(x+\frac{4K}{n}\right)\Theta\left(x+\frac{8K}{n}\right)\ldots\Theta\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right):$$

on déduit sans peine de la propriété fondamentale des Θ, qui est exprimée par l'égalité (1), la condition

$$\Phi_0(x+2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Phi_0(x),$$

et il est clair qu'on a

$$\Phi_0\left(x+\frac{4K}{n}\right) = \Phi_0(x).$$

Or ces deux équations peuvent être ramenées aux équations (2) et (3), de la manière suivante. Soit $\varphi(x)$ une fonction définie par les deux conditions

$$\varphi(x+2iK_1') = -e^{-\frac{i\pi}{K_1}(x+iK_1')}\varphi(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x+4K_1) = \varphi(x):$$

on aura d'après ce qui a été dit tout-à-l'heure: $\varphi(x) = AH_1(x)+B\Theta_1(x)$, en désignant par H_1 et Θ_1 les fonctions H et Θ, dans lesquelles K et K' seraient supposés devenus K_1 et K_1'; posons ensuite $n\frac{K_1}{K} = \frac{K_1'}{K'}$, et faisons $x = \frac{nK_1}{K}\cdot z$, il viendra, comme on le voit facilement:

$$\varphi\left(\frac{nK_1}{K}(z+2iK')\right) = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(z+2iK')}\varphi\left(\frac{nK_1}{K}z\right) \text{ et}$$

$$\varphi\left(\frac{nK_1}{K}\left(z+\frac{4K}{n}\right)\right) = \varphi\left(\frac{nK_1}{K}z\right).$$

Or ces équations font voir qu'on aura

$$\Phi_0(x) = \varphi\left(\frac{nK_1}{K}x\right) = AH_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right)+B\Theta_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right),$$

et comme la fonction Φ_0 est paire, il faut faire $A=0$ et il vient:

$$\Phi_0(x) = \text{Const.}\ \Theta_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right).$$

Je passe actuellement au numérateur désigné par $\Phi(x)$. On établit immédiatement, qu'il satisfait encore à l'équation

$$4. \qquad \Phi(x+2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+2iK')}\Phi(x),$$

et on peut même observer que chacun des n produits dont la somme le compose, la vérifie isolément. On trouve ensuite en désignant par j un nombre entier:

$$\Phi\left(x+\frac{4jK}{n}\right) = \alpha^{-j}\Phi(x).$$

Si donc je pose

$$\Psi(x) = e^{-2p\frac{i\pi x}{K}}\Phi(x),$$

j'aurai:

$$\Psi\left(x+\frac{4jK}{n}\right) = \Psi(x).$$

D'ailleurs de l'équation fondamentale (4) on tirera:

$$\Psi(x+2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+2iK')+4p\frac{\pi K'}{K}}\Psi(x),$$

et en mettant $x-4p\frac{iK'}{n}$ à la place de x, et faisant pour plus de clarté

$$\Psi_1(x) = \Psi\left(x-\frac{4piK'}{n}\right),$$

on en déduit:

$$\Psi_1(x+2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Psi_1(x).$$

Ainsi par cette transformation nous sommes entièrement ramenés à l'équation (4). Mais on a la condition de périodicité:

$$\Psi_1\left(x+\frac{4K}{n}\right) = \Psi_1(x),$$

donc, en raisonnant comme plus haut, il viendra:

$$\Psi_1(x) = AH_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right)+B\Theta_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right).$$

Faisons pour la suite $\frac{nK_1}{K}=\frac{1}{M}$, nous aurons le théorème exprimé par l'égalité:

$$\sin\operatorname{am}(x)+\alpha\sin\operatorname{am}\left(x+\frac{4K}{n}\right)+\alpha^2\sin\operatorname{am}\left(x+\frac{8K}{n}\right)+\ldots.+\alpha^{n-1}\sin\operatorname{am}\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)$$

$$=e^{2p\frac{i\pi x}{K}}.\frac{AH_1\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK'_1}{n}\right)+B\Theta_1\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\Theta_1\left(\frac{x}{M}\right)}.$$

J'observe que le premier membre change de signe en augmentant x de $2K$; le nombre n étant impair, il en est de même de la fonction $H_1\left(\frac{x}{M}\right)$; d'ailleurs $\Theta_1\left(\frac{x}{M}\right)$ ne change pas; ainsi il faut faire $B=0$, et il vient:

$$\sin\operatorname{am}(x)+\alpha\sin\operatorname{am}\left(x+\frac{4K}{n}\right)+\ldots.+\alpha^{n-1}\sin\operatorname{am}\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)$$

$$=\text{Const.}\,e^{2p\frac{ipx}{K}}.\frac{H_1\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\Theta_1\left(\frac{x}{M}\right)}$$

$$=\text{Const.}\sin\operatorname{am}\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK'_1}{n}\right).\frac{e^{2p\frac{i\pi x}{K}}\Theta_1\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\Theta_1\left(\frac{x}{M}\right)}.$$

Je substitue maintenant aux fonctions Θ à période réelle, les fonctions analogues $\vartheta(x)=e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}\Theta(x)$, à la période imaginaire $4iK'$; on trouve:

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)=e^{n\frac{\pi x^2}{4KK'}}\Theta_1\left(\frac{x}{M}\right),$$

de sorte qu'à un facteur constant près, l'expression $\frac{e^{2p\frac{i\pi x}{K}}\Theta_1\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\Theta_1\left(\frac{x}{M}\right)}$ se transforme en la suivante: $\frac{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)}$, où l'exponentielle $e^{2p\frac{i\pi x}{K}}$ a disparu; ainsi il vient:

$$\sin\operatorname{am}(x)+\alpha\sin\operatorname{am}\left(x+\frac{4K}{n}\right)+\ldots.+\alpha^{n-1}\sin\operatorname{am}\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)$$

$$=\text{Const.}\sin\operatorname{am}\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK'_1}{n}\right).\frac{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}+4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)}.$$

Pour déterminer la constante, je multiplie les deux membres par $x - iK'$, puis je fais $x = iK'$; en nommant $\varkappa$, $\varkappa_1$ les modules des fonctions K, K_1, le terme $\sin\operatorname{am}(x)$ qu'il y a seul lieu de considérer dans le premier membre, donne $\frac{1}{\varkappa}$; dans le second il suffit d'avoir la valeur de la dérivée de $\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)$, pour $x = iK'$. Or on obtient sans peine pour résultat: $\frac{i\sqrt{\varkappa_1}\,.\,\vartheta_1(0)}{M}$: ainsi on a l'égalité

$$\frac{1}{\varkappa} = \text{Const.}\sin\operatorname{am}\left(\frac{iK'}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right)\cdot\frac{\vartheta_1\left(\frac{iK'}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\frac{1}{M}\cdot i\sqrt{\varkappa_1}\,.\,\vartheta_1(0)},$$

et on en tire après quelques transformations faciles:

$$\text{Const.} = \frac{\varkappa_1}{M\varkappa}\cdot\frac{\vartheta_1(0)}{\vartheta_1\left(\frac{4piK'_1}{n}\right)}.$$

Nous voici de la sorte parvenus au théorème exprimé par l'égalité:

$$\frac{M\varkappa}{\varkappa_1}\left(\sin\operatorname{am}(x) + \alpha\sin\operatorname{am}\left(x + \frac{4K}{n}\right) + \ldots + \alpha^{n-1}\sin\operatorname{am}\left(x + \frac{4(n-1)K}{n}\right)\right)$$

$$= \sin\operatorname{am}\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right)\cdot\frac{\vartheta_1(0)\,\vartheta_1\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)\vartheta_1\left(4p\frac{iK'_1}{n}\right)}.$$

Je n'ai plus maintenant, qu'à vous emprunter, Monsieur, la méthode par laquelle vous établissez les propriétés si remarquables de la fonction

$$\chi(u) = e^{ru^2}\Omega(u).$$

En formant le produit

$$\psi(x) = \frac{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)\vartheta_1\left(\frac{x}{M} + \frac{4iK'_1}{n}\right)\vartheta_1\left(\frac{x}{M} + \frac{8iK'_1}{n}\right)\ldots\vartheta_1\left(\frac{x}{M} + \frac{4(n-1)iK'_1}{n}\right)}{\vartheta_0(0)\,\vartheta_1^2\left(\frac{4iK'_1}{n}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{8iK'_1}{n}\right)\ldots\vartheta_1^2\left(\frac{2(n-1)iK'_1}{n}\right)},$$

on aura $\psi\left(x + 4p\frac{iK'}{n}\right) = \psi(x)$, et on en déduit la formule suivante:

$$\frac{\vartheta_1(0)\,\vartheta_1\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{x}{M}\right)\vartheta_1\left(4p\frac{iK'_1}{n}\right)} =$$

$$\left\{\frac{\prod_1^{\frac{1}{2}(n-1)}{}_m\left(1 - \varkappa_1^2\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{x}{M}\right)\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{4miK'_1}{n}\right)\right)\prod_1^{\frac{1}{2}(n-1)}{}_m\left(1 - \varkappa_1^2\sin^2\operatorname{am}\left(4p\frac{iK'_1}{n}\right)\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{4miK'_1}{n}\right)\right)}{\prod_1^{\frac{1}{2}(n-1)}{}_m\left(1 - \varkappa_1^2\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{x}{M} + 4p\frac{iK'_1}{n}\right)\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{4miK'_1}{n}\right)\right)}\right\}^{\frac{1}{n}},$$

de laquelle découle ainsi la démonstration de votre théorème sur l'expression algébrique de $\sin \operatorname{am}(x)$ par $\sin \operatorname{am}\left(\frac{x}{M}\right)$.

La méthode précédente est fondée principalement, sur ce caractère digne de toute notre attention, de la fonction $\sin \operatorname{am}(x)$, d'être exprimable par le quotient de deux fonctions développables en séries, toujours convergentes, et qui restent les mêmes, ou ne font qu'acquérir un facteur commun, en augmentant l'argument de certaines quantités constantes. Tel est le lien si simple, par lequel se trouve rattaché aux notions analytiques élémentaires, l'ensemble des propriétés caractéristiques de la nouvelle transcendante, qui ont leur source dans le principe de la double période. Mais il est important d'abord d'observer dans toute fonction rationnelle de $\sin \operatorname{am}(x)$, l'analogie des fonctions qui jouent les rôles de numérateur et de dénominateur, avec les fonctions H et Θ. A cet effet, je considère la fonction homogène d'un degré quelconque n:

$$\Phi(x) = AH^n(x) + BH^{n-1}\Theta(x) + \ldots + LH(x)\Theta^{n-1}(x) + I\Theta^n(x).$$

On trouve bien facilement, d'après chaque terme en particulier:

$$\Phi(x+2iK') = (-1)^n e^{-\frac{ni\pi}{K}(x+iK')}\Phi(x);$$

on a d'ailleurs:

$$\Phi(x+4K) = \Phi(x);$$

ainsi dans ce cas général, l'expression analytique du caractère de la double périodicité, se présente sous la même forme que pour la fonction $\sin \operatorname{am}(x)$. Introduisons aussi la fonction $H'(x)\Theta(x) - H(x)\Theta'(x)$, qui représente le numérateur de la dérivée de $\frac{H(x)}{\Theta(x)}$; en la désignant un instant par $\chi(x)$, on aura sans peine:

$$\chi(x+2K) = -\chi(x), \qquad \chi(x+2iK') = e^{-2\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\chi(x).$$

De là résulte que la fonction suivante:

$$(\alpha.) \quad \Pi(x) = AH^n(x) + BH^{n-1}(x)\Theta(x) + \ldots + LH(x)\Theta^{n-1}(x) + I\Theta^n(x)$$
$$+ (H'(x)\Theta(x) - H(x)\Theta'(x))(A'H^{n-2}(x) + B'H^{n-3}(x)\Theta(x) + \ldots + I'\Theta^{n-2}(x))$$

donnera encore

$$\Pi(x+4K) = \Pi(x), \qquad \Pi(x+2iK') = (-1)^n e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Pi(x).$$

Mais on ne peut pas satisfaire à ces deux équations, par une solution plus générale que la fonction définie par l'équation ($\alpha.$) qui renferme $2n$ constantes arbitraires. Supposons en effet:

$$\Pi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, a_m e^{m\frac{i\pi x}{2K}},$$

la seconde équation donnera facilement:

$$a_{m+2n} = (-1)^n a_m q^{m+n},$$

d'où:

$$a_{m+2kn} = (-1)^{kn} a_m q^{km+k^2 n},$$

k étant un nombre entier positif ou négatif. On voit par là, que tous les coefficients s'obtiendront au moyen des quantités a_0, a_1, ... a_{2n-1} qui restent arbitraires. Si à la condition $\Pi(x+4K) = \Pi(x)$, on substitue la condition plus particulière $\Pi(x+2K) = -\Pi(x)$, tous les coefficients à indices pairs devront être nuls, ce qui réduira à moitié le nombre des constantes arbitraires.

Ainsi je considère l'expression

$$\sin\operatorname{am}(x).F(\sin^2\operatorname{am}(x)) - \frac{d.\sin\operatorname{am}(x)}{dx} f(\sin^2\operatorname{am}(x)),$$

où $F(x)$ et $f(x)$ désignent deux fonctions entières, l'une du degré m, l'autre du degré $m-1$; je remplace $\sin\operatorname{am}(x)$ par $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\cdot\frac{H(x)}{\Theta(x)}$, le numérateur

$$\Pi(x) = \Theta(x)^{2m+1}\left\{\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\cdot\frac{H(x)}{\Theta(x)}.F\left(\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{H^2(x)}{\Theta^2(x)}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\cdot\frac{H'(x)\,\Theta(x) - H(x)\,\Theta'(x)}{\Theta^2(x)} f\left(\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{H^2(x)}{\Theta^2(x)}\right)\right\}$$

vérifiera les deux équations:

$$\Pi(x+2K) = -\Pi(x), \qquad \Pi(x+2iK) = -e^{-(2m+1)\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\,\Pi(x)$$

indépendamment des valeurs des coefficients au nombre de $2m+1$ qu'il renferme; il en représentera donc la solution la plus générale. Mais d'une autre part, je considère le produit des $2m+1$ facteurs

$$H(x+a_1).H(x+a_2)\ldots.H(x+a_{2m}).H(x+a_{2m+1}):$$

il satisfait évidemment à la première des équations précédentes, et on voit sans peine qu'il vérifiera la seconde, en assujettissant les constantes a_1, a_2, ... a_{2m}, a_{2m+1}, à la seule condition

$$a_1 + a_2 + \ldots. + a_{2m} + a_{2m+1} = 2jK,$$

j étant un nombre entier quelconque. En introduisant un facteur constant, on aura une nouvelle expression de la solution générale, dont la comparaison avec la première, donne le théorème exprimé par l'égalité:

$$\sin\operatorname{am}(x)\,F(\sin^2\operatorname{am}(x)) - \frac{d.\sin\operatorname{am}(x)}{dx} f(\sin^2\operatorname{am}(x))$$
$$= \text{Const.}\frac{H(x+a_1)\,H(x+a_2)\ldots.H(x+a_{2m+1})}{\Theta^{2m+1}(x)}.$$

Ainsi nous obtenons sous la forme trouvée par Abel, les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques relatives à l'addition des arguments.

Dans le cas le plus simple, celui de $m=1$, on aura:

$$\sin \operatorname{am} x\,(\sin^2 \operatorname{am}(x) + A) - B\frac{d.\sin \operatorname{am}(x)}{dx}$$
$$= \text{Const.}\frac{H(x+a_1)H(x+a_2)H(x-a_1-a_2)}{\Theta^3(x)}.$$

Les coefficients A, B dépendent des quantités a_1 et a_2, au moyen des deux équations qui expriment que le premier membre s'annule pour $x=-a_1$, $x=-a_2$.

Si l'on suppose $a_1=-a_2$, on trouvera

$$B=0,\qquad A=-\sin^2\operatorname{am}(a_1),$$

ce qui donnera:

$$\sin\operatorname{am}(x)(\sin^2\operatorname{am}(x)-\sin^2\operatorname{am}(a_1)) = \text{Const.}\frac{H(x)H(x+a_1)H(x-a_1)}{\Theta^3(x)}:$$

et par suite:

$$\sin^2\operatorname{am}(x)-\sin^2\operatorname{am}(a_1) = \text{Const.}\frac{H(x+a_1)H(x-a_1)}{\Theta^2(x)},$$

$$\log(\sin^2\operatorname{am}(x)-\sin^2\operatorname{am}(a_1)) = \text{const.}+\log H(x+a_1)+\log H(x-a_1)-2\log\Theta(x).$$

Cette dernière équation conduit à la théorie des fonctions de 3me espèce, en différentiant par rapport à a_1, et intégrant par rapport à x.

Mais je reprends les deux équations

$$\Pi(x+4K)=\Pi(x),\qquad \Pi(x+2iK')=(-1)^n e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')},$$

dont la solution générale est donnée par l'expression

$$\Pi(x) = AH^n(x)+BH^{n-1}(x)\Theta(x)+\dots+I\Theta^n(x)$$
$$+(H^1(x)\Theta(x)-H(x)\Theta^1(x))(A'H^{n-2}(x)+B'H^{n-3}(x)\Theta(x)+\dots+I'\Theta^{n-2}(x)).$$

En faisant $\alpha=e^{-p\frac{2i\pi}{n}}$ et

$$\Phi(x)=\Pi(x)+\alpha\Pi\left(x+\frac{4K}{n}\right)+\alpha^2\Pi\left(x+\frac{8K}{n}\right)+\dots+\alpha^{n-1}\Pi\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right),$$

on aura toujours la seconde équation:

$$\Phi(x+2iK')=(-1)^n e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Phi(x),$$

mais de plus:

$$\Phi\left(x+\frac{4jK}{n}\right)=\alpha^{-j}\Phi(x).$$

Posant donc

$$\Psi(x)=e^{-\mu\frac{i\pi x}{2K}}\Phi(x),$$

il viendra:

$$\Psi\left(x+\frac{4K}{n}\right)=\Psi(x),\qquad \Psi(x+2iK')=(-1)^n e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')+p\frac{\pi K'}{K}}\,\Psi(x).$$

Je mets à la place du facteur $(-1)^n$, $e^{ni\pi}$, et je fais

$$\Psi_1(x)=\Psi\left(x+\frac{(n-1)K}{n}-\frac{p}{n}iK'\right);$$

j'obtiendrai par là les deux équations

$$\Psi_1\left(x+\frac{4K}{n}\right)=\Psi_1(x),\qquad \Psi_1(x+2iK')=-e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\,\Psi_1(x).$$

On aurait pu faire plus généralement:

$$\Psi_1(x)=\Psi\left(x+\frac{(n-\nu)K}{n}-p\frac{iK'}{n}\right),$$

ν désignant un nombre impair quelconque, et on serait arrivé aux mêmes conditions. En faisant

$$\frac{1}{M}=\frac{nK_1}{K},$$

on trouvera, comme je l'ai déjà établi, que le nombre n soit impair ou pair:

$$\Psi_1(x)=aH_1\left(\frac{x}{M}\right)+b\,\Theta_1\left(\frac{x}{M}\right).$$

Nous voici donc parvenus au théorème exprimé par l'égalité suivante:

$$\Pi(x)+\alpha\,\Pi\left(x+\frac{4K}{n}\right)+\alpha^2\Pi\left(x+\frac{8K}{n}\right)+\dots+\alpha^{n-1}\Pi\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)$$
$$=e^{p\frac{inx}{2K}}\left\{aH_1\left(\frac{x}{M}+\frac{piK'-(n-\nu)K}{nM}\right)+b\,\Theta_1\left(\frac{x}{M}+\frac{piK'-(n-\nu)K}{nM}\right)\right\}.$$

Sans m'arrêter à la détermination des constantes a, b, il est clair qu'en remplaçant α successivement par toutes les racines de l'équation binome $x^n=1$, ou en faisant $p=0, 1, 2, \dots n-1$, on aura un système de n équations linéaires qui donneront:

$$\Pi(x)=\sum_0^{n-1}{}_p\, e^{p\frac{inx}{2K}}\left\{a_pH_1\left(\frac{x}{M}+\frac{piK'-(n-\nu)K}{nM}\right)+b_p\Theta_1\left(\frac{x}{M}+\frac{piK'-(n-\nu)K}{nM}\right)\right\}.$$

Cette nouvelle expression de la fonction $\Pi(x)$, conduit au développement en série de toute fonction rationnelle de $\sin\mathrm{am}(x)$ et de sa dérivée. (J'ai remarqué à ce sujet, qu'en cherchant le développement de la fonction

$$\vartheta(x)=e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}\Theta(x),$$

d'après celui de

$$\Theta(x)=1-2q\cos\frac{\pi x}{K}+2q^4\cos 2\frac{\pi x}{K}-\dots=1+\sum_1^{\infty}{}_n(-1)^n\left\{e^{\frac{n\pi}{K}(ix-nK')}+e^{-\frac{n\pi}{K}(ix+nK')}\right\},$$

on arrivait au résultat suivant:

$$\vartheta(x) = e^{\frac{\pi}{4KK'}x^2} + \sum_1^\infty {}_n(-1)^n \left\{ e^{\frac{\pi}{4KK'}(x+2niK')^2} + e^{\frac{\pi}{4KK'}(x-2niK')^2} \right\}.$$

La fonction $e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}} H(x)$ donne de même:

$$\sum_0^\infty {}_n(-1)^n \left\{ e^{\frac{\pi}{4KK'}(x+(2n+1)iK')^2} - e^{\frac{\pi}{4KK'}(x-(2n+1)iK')^2} \right\}.)$$

La théorie de la transformation découle bien simplement des mêmes principes. Considérez en effet, la somme ou la somme des produits deux à deux, trois à trois etc., ou le produit des n fonctions (n étant impair):

$$\frac{H(x)}{\Theta(x)} \cdot \frac{H\left(x+\frac{4K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4K}{n}\right)} \cdot \frac{H\left(x+\frac{8K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{8K}{n}\right)} \cdots \frac{H\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)}.$$

Soit $\Phi_1(x)$ le numérateur, $\Phi_0(x)$ le dénominateur: pour l'une et pour l'autre de ces deux fonctions on trouve les conditions:

$$\Phi(x+2iK') = -e^{-n\frac{i\pi}{K}(x+iK')}\Phi(x), \qquad \Phi\left(x+\frac{4K}{n}\right) = \Phi(x),$$

desquelles il résulte

$$\Phi_1(x) = A_1 H_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right) + B_1\Theta_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right),$$

$$\Phi_0(x) = A_0 H_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right) + B_0\Theta_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right).$$

Or la fonction $\Phi_1(x)$ sera paire ou impaire selon qu'elle sera relative à une somme de produits d'un nombre pair ou d'un nombre impair de fonctions. Dans le premier cas, on devra faire $A_1 = 0$, dans le second, $B_1 = 0$; d'ailleurs pour $\Phi_0(x)$ on a toujours $A_0 = 0$. De là résulte que la somme des produits 2 à 2, 4 à 4, ... $n-1$ à $n-1$ des quantités

$$\frac{H(x)}{\Theta(x)}, \quad \frac{H\left(x+\frac{4K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4K}{n}\right)}, \quad \cdots \quad \frac{H\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)}{\Theta\left(x+\frac{4(n-1)K}{n}\right)},$$

est constante, et qu'elles peuvent être considérées comme les racines d'une équation du n^{me} degré, dont les coefficients sont des fonctions du premier degré de $\frac{H_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right)}{\Theta_1\left(\frac{nK_1}{K}x\right)}$. On en conclut l'expression connue de cette dernière fonction,

par une fonction rationnelle de l'une quelconque des quantités précédentes etc. Toutes ces propriétés spéciales à la fonction à double période $\frac{H(x)}{\Theta(x)}$, découlent immédiatement, comme on le voit, de l'équation de définition des fonctions H et Θ simplement périodiques; on peut même remarquer la grande extension que réçoit le dévoloppement en produit infini de $\sin\operatorname{am}(x)$, qui a été obtenu la première fois comme conséquence des formules de transformation, au moyen de l'égalité obtenue plus haut, savoir:

$$\sin\operatorname{am}(x) F(\sin^2\operatorname{am}(x)) - \frac{d\cdot\sin\operatorname{am}(x)}{dx} f(\sin^2\operatorname{am}(x))$$
$$= \text{Const.}\ \frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\ldots\ldots H(x+a_{2m+1})}{\Theta^{2m+1}(x)}.$$

Jusqu'à présent, je n'ose point encore espérer, Monsieur, d'appliquer avec succès la méthode précédente à l'analyse des fonctions de deux variables à quatre périodes simultanées; ce sera donc sous un autre point de vue, que je vais essayer de lier en quelques points, par des résultats analogues, la théorie des fonctions Abéliennes et des fonctions elliptiques. Ainsi je prendrai les fonctions de 3[me] espèce, et sous la forme suivante:

$$\int\left\{\left(\frac{\Delta(a)}{x-a}+\frac{\Delta(b)}{x-b}\right)\cdot\frac{dx}{\Delta x}+\left(\frac{\Delta a}{y-a}+\frac{\Delta b}{y-b}\right)\cdot\frac{dy}{\Delta y}\right\};$$

l'intégrale étant assujéttie à s'évanouir, lorsqu'on fait à la fois $x=0$, $y=0$, Δx représentant la racine carrée du polynome $p_1x^1+p_2x^2+p_3x^3+p_4x^4+p_5x^5$. Je la désignerai par $\Pi(u, v, \alpha, \beta)$, lorsqu'on y aura fait les substitutions $x=\lambda_0(u, v)$, $y=\lambda_1(u, v)$, les nouvelles variables u et v étant comme à l'ordinaire:

$$u=\int_0^x\frac{dx}{\Delta x}+\int_0^y\frac{dy}{\Delta y},\quad v=\int_0^x\frac{x\,dx}{\Delta x}+\int_0^y\frac{y\,dy}{\Delta y},$$

et de même $a=\lambda_0(\alpha, \beta)$, $b=\lambda_1(\alpha, \beta)$. On aura alors les expressions suivantes des coefficients différentiels:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d\Pi}{du}=\Delta a\cdot\frac{x+y-a}{(a-x)(a-y)}+\Delta b\cdot\frac{x+y-b}{(b-x)(b-y)},$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d\Pi}{dv}=-\frac{\Delta a}{(a-x)(a-y)}-\frac{\Delta b}{(b-x)(b-y)}.$$

J'introduirai pareillement les variables u et v dans les fonctions de seconde espèce, savoir:

$$\int\left(\frac{x^2dx}{\Delta x}+\frac{y^2dy}{\Delta y}\right)\ \text{et:}\int\left(\frac{x^3dx}{\Delta x}+\frac{y^3dy}{\Delta y}\right);$$

elles deviendront respectivement:

$$\int((\lambda_0+\lambda_1)dv-\lambda_0\lambda_1 du), \quad \int((\lambda_0^2+\lambda_0\lambda_1+\lambda_1^2)dv-(\lambda_0+\lambda_1)du).$$

Cela posé, la première étant désignée pour un instant par $(u, v)_1$, et la seconde par $(u, v)_2$, je ferai

$$E_1(u, v) = 2p_4(u, v)_1+3p_5(u, v)_2 \quad \text{et} \quad E_2(u, v) = p_5(u, v)_2;$$

on aura alors le théorème exprimé par l'égalité suivante:

$$1. \quad \Pi(u, v, \alpha, \beta)-\Pi(\alpha, \beta, u, v)$$
$$= p_3(\alpha v-\beta u)+\alpha E_1(u,v)+\beta E_2(u,v)-uE_1(\alpha,\beta)-vE_2(\alpha,\beta),$$

de laquelle se tirent les valeurs des fonctions complètes. Prenons en effet pour u et v deux demi-périodes simultanées i, j, les valeurs correspondantes de x et y donneront $\Delta(x)=0$, $\Delta(y)=0$; ainsi l'on aura:

$$\Pi(i, j, \alpha, \beta) = p_3(\alpha j-\beta i)+\alpha E_1(i,j)+\beta E_2(i,j)-iE_1(\alpha,\beta)-jE_2(\alpha,\beta).$$

On remarque sur cette expression un singulier genre de discontinuité de la fonction Π. En effet, les arguments u, v, étant quelconques, il est hors de doute qu'on peut, sans altérer sa valeur, ajouter les périodes simultanées aux arguments α, β; mais si l'on suppose $u=i$, $v=j$, la fonction deviendra uniquement périodique pour ces indices; c'est ce qu'on vérifie aisément sur la valeur précédente.

L'égalité (1) peut être transformée en une autre plus simple. Posons

$$Z_1(u, v) = E_1(u, v)-Au-Bv, \quad Z_2(u, v) = E_2(u, v)-A'u-B'v$$

et déterminons A, B, A', B', par les conditions

$$Ai+Bj=E_1(i,j), \quad Ai'+Bj' = E_1(i',j'),$$
$$A'i+B'j=E_2(i,j), \quad A'i'+B'j'=E_2(i',j'),$$

i', j' désignant deux autres demi-périodes simultanées. Faisons en outre

$$\Phi(u, v, \alpha, \beta) = \Pi(u, v, \alpha, \beta)+uZ_1(\alpha, \beta)+vZ_2(\alpha, \beta)-c(\alpha v-\beta u),$$

c étant une constante dont la valeur est $c=p_2+B-A'$, il viendra:

$$2. \quad \Phi(u, v, \alpha, \beta)-\Phi(\alpha, \beta, u, v) = -c(\alpha v-\beta u).$$

Dans le théorème exprimé par cette égalité, la fonction Φ, comme il aisé de le voir, jouira de la propriété que

$$\Phi(u+2i, v+2j, \alpha, \beta) = \Phi(u, v, \alpha, \beta), \quad \Phi(u+2i', v+2j', \alpha, \beta) = \Phi(u, v, \alpha, \beta);$$

ainsi on obtiendrait une fonction séparément périodique en u et en v, en prenant

$$\Psi(u, v, \alpha, \beta) = \Phi\left(\frac{iu+i'v}{\pi}, \frac{ju+j'v}{\pi}, \alpha, \beta\right).$$

Peut-être cela conduira-t-il à un développement de la fonction Ψ de la forme $\Sigma a_{m,r}\, e^{\sqrt{-1}(mu+nv)}$. J'ai remarqué à ce sujet que, le théorème d'*Abel*, permet-

tant d'exprimer algébriquement

$$\lambda_0\left(\frac{iu+i'v}{\pi}, \frac{ju+j'v}{\pi}\right), \qquad \lambda_1\left(\frac{iu+i'v}{\pi}, \frac{ju+j'v}{\pi}\right),$$

au moyen de

$$\lambda_0\left(\frac{iu}{\pi}, \frac{ju}{\pi}\right), \lambda_1\left(\frac{iu}{\pi}, \frac{ju}{\pi}\right) \text{ et } \lambda\left(\frac{i'u}{\pi}, \frac{j'u}{\pi}\right), \lambda_1\left(\frac{i'u}{\pi}, \frac{j'u}{\pi}\right),$$

on obtenait un nouveau genre de réduction des fonctions de deux variables à des fonctions algébriques de fonctions d'une variable, parfaitement analogue à celui que vous m'avez fait, Monsieur, l'honneur de m'écrire; mais ce cas particulier, auquel j'ai été ainsi amené, ne m'a point semblé moins difficile à traiter que le cas général.

Quoiqu'il en soit, le théorème d'*Abel* donnera pour l'addition des arguments dans la fonction Π, l'égalité:

$$\Pi(u+u', v+v', \alpha, \beta) = \Pi(u, v, \alpha, \beta) + \Pi(u', v', \alpha, \beta) + \log f(u, v, u', v', \alpha, \beta),$$

et on aura de même:

3. $\Phi(u+u', v+v', \alpha, \beta) = \Phi(u, v, \alpha, \beta) + \Phi(u', v', \alpha, \beta) + \log f(u, v, u', v', \alpha, \beta).$

L'égalité (2), au moyen de laquelle on peut faire l'échange simultané des arguments u, v et α, β, nous donnera le théorème correspondant:

$$\Phi(\alpha, \beta, u+u', v+v') = \Phi(\alpha, \beta, u, v) + \Phi(\alpha, \beta, u', v') + \log f(u, v, u', v', \alpha, \beta),$$

auquel on pourrait arriver aussi par une voie directe. Cela posé, je mets dans l'équation (3), à la place de u, u', v, v', respectivement, $i+u$, $i+u'$, $j+v$, $j+v'$; il viendra:

$$\Phi(u+u'+2i, v+v'+2j, \alpha, \beta)$$
$$= \Phi(u+i, v+j, \alpha, \beta) + \Phi(u'+i, v'+j, \alpha, \beta) + \log f(u+i, v+j, u'+i, v'+j, \alpha, \beta),$$

ou bien:

$$\Phi(u+u', v+v', \alpha, \beta)$$
$$= \Phi(u+i, v+j, \alpha, \beta) + \Phi(u'+i, v'+j, \alpha, \beta) + \log f(u+i, v+j, u'+i, v'+j, \alpha, \beta).$$

Cela étant, je fais: $\alpha = u-u'$, $\beta = v-v'$, ce qui donne:

$$\Phi(u+u', v+v', u-u', v-v')$$
$$= \Phi(u'+i, v'+j, u-u', v-v') + \Phi(u'+i, v'+j, u-u', v-v')$$
$$+ \log f(u+i, v+j, u'+i, v'+j, u-u', v-v').$$

Je change ensuite, u', v' en $-u', -v'$. Comme la fonction Φ change de signe avec les deux arguments u, v, le terme $\Phi(-u'+i, -v'+j, \ldots)$ pourra s'écrire $-\Phi(u'-i, v'-j, \ldots)$; et en ajoutant aux deux premiers arguments leurs périodes $2i$, $2j$, $-\Phi(u'+i, v'+j, \ldots)$, de sorte qu'il viendra

$$\Phi(u-u', v-v', u+u', v+v')$$
$$= \Phi(u+i, v+j, u+u', v+v') + \Phi(u'+i, v'+j, u+u', v+v')$$
$$+ \log f(u+i, v+j, i-u', j-v', u+u', v+v').$$

En ajoutant membre à membre les deux dernières égalités, et développant dans le second membre par le théorème sur l'addition des deux derniers arguments, il viendra:

$$\Phi(u+u', v+v', u-u', v-v') + \Phi(u-u', v-v', u+u', v+v')$$
$$= 2\Phi(u+i, v+j, u, v) - 2\Phi(u'+i, v'+j, u', v') + \text{fonct. log}^e.$$

Enfin, si l'on applique au premier membre le théorème

$$\Phi(u, v, \alpha, \beta) - \Phi(\alpha, \beta, u, v) = -c(\alpha v - \beta u),$$

on obtiendra l'égalité

$$\Phi(u+u', v+v', u-u', v-v')$$
$$= \Phi(u+i, v+j, u, v) - \Phi(u'+i, v'+j, u', v') + c(uv'-u'v) + \text{une fonct. log}^e,$$

par laquelle la réduction des fonctions elliptiques de 3me espèce est étendue aux fonctions Abéliennes.

Mais j'ai entrevu un autre genre de démonstration, fondé sur des considérations toutes différentes, et dont je vais essayer de donner l'idée en l'appliquant aux fonctions elliptiques.

Soit, comme à l'ordinaire:

$$\Delta(x) = \sqrt{((1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2))};$$

posons

$$z = \int_0^x \frac{\Delta a \cdot dx}{(x-a)\Delta(x)},$$

on trouvera facilement:

$$\Delta(a) \cdot \frac{dz}{da} = \varkappa^2 \int_0^x \frac{x^2-a^2}{\Delta(x)} dx - \frac{\Delta(x)}{x-a} - \frac{1}{a},$$

et en différentiant de nouveau par rapport à a:

$$\frac{d\left(\Delta a \frac{dz}{da}\right)}{da} = -2a\varkappa^2 \int_0^x \frac{dx}{\Delta x} - \frac{\Delta(x)}{(x-a)^2} + \frac{1}{a^2}.$$

D'ailleurs on a immédiatement:

$$\Delta(x) \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{\Delta(a)}{x-a}, \quad \frac{d\left(\Delta(x)\frac{dz}{dx}\right)}{dx} = -\frac{\Delta(a)}{(x-a)^2};$$

on en conclut cette équation:

$$\frac{d\left(\Delta(a)\frac{dz}{da}\right)}{da} \cdot \Delta(a) = \frac{d\left(\Delta(x)\frac{dz}{dx}\right)}{dx} \Delta(x) - 2a\varkappa^2 \Delta(a) \int^x \frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{\Delta(a)}{a^2}.$$

En prenant pour variables indépendantes les arguments ξ et α des fonctions

$$x = \sin\mathrm{am}(\xi), \qquad a = \sin\mathrm{am}(\alpha),$$

et mettant $\Delta(\mathrm{am}(\alpha))$ au lieu de $\Delta(\sin\mathrm{am}(\alpha))$, il viendra:

$$\frac{d^2 z}{d\alpha^2} = \frac{d^2 z}{d\xi^2} - 2x^2\xi \sin\mathrm{am}(\alpha)\Delta(\mathrm{am}(\alpha)) + \frac{\Delta(\mathrm{am}(\alpha))}{\sin^2\mathrm{am}(\alpha)}.$$

Soit

$$E(\alpha) = \int_0^\alpha \sin^2\mathrm{am}(\alpha)\,d\alpha \quad \text{et} \quad z = -x^2\xi E(\alpha) - \int\frac{d\alpha}{\sin\mathrm{am}(\alpha)} + u;$$

on aura

$$\frac{d^2 u}{d\alpha^2} = \frac{d^2 u}{d\xi^2}, \quad \text{donc} \quad u = F(\alpha+\xi) + f(\alpha-\xi).$$

Considérons donc l'égalité:

$$u = \int_0^\xi \frac{\Delta(\mathrm{am}(\alpha))\,d\xi}{\sin\mathrm{am}(\xi) - \sin\mathrm{am}(\alpha)} - x^2\xi E(\alpha) + \int\frac{d\alpha}{\sin\mathrm{am}(\alpha)} = F(\alpha+\xi) + f(\alpha-\xi).$$

En faisant $\xi = 0$, on a

$$F(\alpha) + f(\alpha) = \int\frac{d\alpha}{\sin\mathrm{am}(\alpha)};$$

on trouverait de même pour $\alpha = 0$,

$$F(\xi) + f(-\xi) = \int\frac{d\xi}{\sin\mathrm{am}(\xi)},$$

donc

$$F(\alpha) + f(\alpha) = F(\alpha) + f(-\alpha) \quad \text{ou} \quad f(\alpha) = f(-\alpha).$$

Je m'arrête un instant à cette remarque; car, sans aller plus loin, on peut tirer de là, les théorèmes fondamentaux des fonctions elliptiques. En effet, en différentiant par rapport à ξ, il vient:

$$\frac{\Delta(\mathrm{am}\,\alpha)}{\sin\mathrm{am}(\xi) - \sin\mathrm{am}(\alpha)} - x^2 E(\alpha) = F'(\alpha+\xi) - f'(\alpha-\xi).$$

Faisant successivement, $\xi = x + a$, $\xi = x - a$, et retranchant on obtient l'égalité

$$\frac{\Delta(\mathrm{am}\,\alpha)}{\sin\mathrm{am}(x+a) - \sin\mathrm{am}(\alpha)} - \frac{\Delta(\mathrm{am}\,\alpha)}{\sin\mathrm{am}(x-a) - \sin\mathrm{am}(\alpha)}$$

$$= F'(\alpha+x+a) - F'(\alpha+x-a) - f'(\alpha-x-a) + f'(\alpha-x+a).$$

Or la fonction $f'(x)$ étant impaire, on voit immédiatement que le second membre est symétrique par rapport à x et α; on aura donc:

$$\frac{\Delta(\mathrm{am}(\alpha))}{\sin\mathrm{am}(x+a) - \sin\mathrm{am}(\alpha)} - \frac{\Delta(\mathrm{am}(\alpha))}{\sin\mathrm{am}(x-a) - \sin\mathrm{am}(\alpha)}$$

$$= \frac{\Delta(\mathrm{am}(x))}{\sin\mathrm{am}(\alpha+a) - \sin\mathrm{am}(x)} - \frac{\Delta(\mathrm{am}(x))}{\sin\mathrm{am}(\alpha-a) - \sin\mathrm{am}(x)}.$$

De là se tire le théorème d'*Euler* sur l'addition des fonctions elliptiques. Soit en effet $\alpha = 0$, on aura:

$$\frac{1}{\sin \operatorname{am}(x+a)} - \frac{1}{\sin \operatorname{am}(x-a)}$$

$$= \frac{\Delta(\operatorname{am}(x))}{\sin \operatorname{am}(a) - \sin \operatorname{am}(x)} + \frac{\Delta(\operatorname{am}(x))}{\sin \operatorname{am}(a) + \sin \operatorname{am}(x)} = \frac{2 \sin \operatorname{am}(a) \Delta(\operatorname{am}(x))}{\sin^2 \operatorname{am}(a) - \sin^2 \operatorname{am}(x)},$$

et permutant x et a:

$$\frac{1}{\sin \operatorname{am}(x+a)} + \frac{1}{\sin \operatorname{am}(x-a)} = \frac{2 \sin \operatorname{am}(x) \Delta(\operatorname{am}(a))}{\sin^2 \operatorname{am}(x) - \sin^2 \operatorname{am}(a)};$$

donc, en ajoutant membre à membre:

$$\frac{1}{\sin \operatorname{am}(x+a)} = \frac{\sin \operatorname{am}(x) \Delta(\operatorname{am}(a)) - \sin \operatorname{am}(a) \Delta(\operatorname{am}(x))}{\sin^2 \operatorname{am}(x) - \sin^2 \operatorname{am}(a)};$$

ce qui se ramène sans difficulté à la formule connue. De la même source on tire encore le théorème sur l'addition des arguments dans la fonction de 3[me] espèce, en opérant ainsi que je l'ai fait dans une lettre adressée à M. *Liouville*, imprimée déjà dans les Comptes-rendus, et qui paraîtra de nouveau dans le prochain numéro du journal de mathématiques. Il ne serait pas difficile d'arriver à la forme que vous prenez ordinairement, Monsieur, pour les fonctions de troisième espèce; il suffirait pour cela de partir de la formule suivante, qu'on démontrerait comme précédemment; savoir, i étant une quelconque des quantités qui donnent $\sin \operatorname{am}(u+i) = \sin \operatorname{am}(u-i)$:

$$\frac{\Delta(\operatorname{am}(\alpha+i))}{\sin \operatorname{am}(x+a) - \sin \operatorname{am}(\alpha+i)} - \frac{\Delta(\operatorname{am}(\alpha+i))}{\sin \operatorname{am}(x-a) - \sin \operatorname{am}(\alpha+i)}$$

$$= \frac{\Delta(\operatorname{am}(x+i))}{\sin \operatorname{am}(\alpha+a) - \sin \operatorname{am}(x+i)} - \frac{\Delta(\operatorname{am}(x+i))}{\sin \operatorname{am}(\alpha-a) - \sin \operatorname{am}(x+i)},$$

et de prendre i tel, que $\frac{1}{\sin \operatorname{am}(i)} = 0$.

Mais je reviens à l'égalité:

$$\int_0^\xi \frac{\Delta(\operatorname{am}\alpha) \cdot d\xi}{\sin \operatorname{am}(\xi) - \sin \operatorname{am}(\alpha)} - x^2 \xi E(\alpha) + \int \frac{d\alpha}{\sin \operatorname{am}(\alpha)} = F(\alpha+\xi) + f(\alpha-\xi).$$

Changeons α en $-\alpha$, puis retranchons membre à membre, il viendra:

$$\int_0^\xi \frac{2 \sin \operatorname{am}(\alpha) \Delta(\operatorname{am}(\alpha)) \cdot d\xi}{\sin^2 \operatorname{am}(\xi) - \sin^2 \operatorname{am}(\alpha)} - 2x^2 \xi E(\alpha) = F(\alpha+\xi) + f(\alpha-\xi) - F(\xi-\alpha) - f(-\xi-\alpha).$$

Le second membre pourra encore évidemment être représenté par $F(\alpha+\xi)+f(\alpha-\xi)$, et puisque le premier s'annule pour $\xi = 0$, et $\alpha = 0$, par $F(\xi+\alpha) - F(\xi-\alpha)$, F étant une fonction paire. Pour la déterminer, différentions par rapport à ξ;

puis faisons $\xi = 0$, il viendra:

$$2F'(\alpha) = -\frac{2\sin\operatorname{am}(\alpha)\Delta\operatorname{am}(\alpha)}{\sin^2\operatorname{am}(\alpha)} - 2x^2E(\alpha),$$

d'où, en posant $Z(\alpha) = \int E(\alpha)\,d\alpha$:

$$F(\alpha) = -\tfrac{1}{2}\log\sin^2\operatorname{am}(\alpha) - x^2Z(\alpha);$$

il vient donc cette égalité:

$$\int_0^\xi \frac{2\sin\operatorname{am}(\alpha)\Delta\operatorname{am}(\alpha)\cdot d\xi}{\sin^2\operatorname{am}(\xi) - \sin^2\operatorname{am}(\alpha)}$$

$$= 2x^2\xi E(\alpha) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\sin^2\operatorname{am}(\xi-\alpha)}{\sin^2\operatorname{am}(\xi+\alpha)} + x^2(Z(\xi-\alpha) - Z(\xi+\alpha)),$$

de laquelle se conclut sans peine tout le reste de cette recherche.

Corrigenda.

Pag. 1 l. 7 ab imo loco $[\cos\omega+\sin\omega\cos(\vartheta-\eta)]^{n+1}$ lege $[\cos\omega+i\sin\omega\cos(\vartheta-\eta)]^{n+1}$
— 2 l. 11 loco $a=0$ lege $a'=0$
— 4 l. 3 ab imo loco $z^{-(n+1)}=(+z)^{-(n+1)}$ lege $z^{-(n+1)}(2\pm z)^{-(n+1)}$
— 5 l. 10 ab imo loco $\cos\frac{1}{2}\varphi$, $i\sin\frac{1}{2}\varphi$ lege $\cos\frac{1}{2}\omega$, $i\sin\frac{1}{2}\omega$
— — l. 8 et 7 ab imo loco dx^n, dp^n lege dx^m, dp^m
— 7 l. 4 ab imo loco $\Pi(n-m-1)$ lege $\Pi(m-n-1)$
— 9 l. 8 ab imo loco (4.) lege (5.)
— 10 l. 13 ab imo loco $41^\circ-\frac{1}{2}\varphi$ lege $45^\circ-\frac{1}{2}\varphi$
— — l. 8 ab imo loco $\left(\frac{2xK}{\pi}\right)^2$ lege $\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2$
— 14 l. 2 loco $\alpha'=\alpha$ lege $\alpha'=\alpha$
— 15 l. 10 loco $\frac{\cos\varphi''\sin\varphi'''}{m''}$ lege $\frac{\cos\varphi''\sin\varphi'''}{m'''}$
— 18 l. 20 loco $\frac{1}{2}\varphi$ lege $\frac{1}{2}\varphi_1$
— 19 l. 9 loco $\cos(2\varphi_1-\varphi_1)$ lege $\cos(2\varphi_1-\varphi_2)$
— 20 l. 17 loco $-\gamma$ lege $-\gamma^i$
— 26 l. 7 loco 301 lege 299
— — l. 8 loco 8.27268 lege 8.27269
— 29 l. 1 loco 296 lege 294
— 31 l. 10 loco „de $n-1$ planètes" lege „des $n-1$ planètes"
— — l. 22 loco „regardés comme etc." lege „regardées comme etc."
— 32 et 33. In formulis (8.) et (9.) lege $\cos V$ loco $\cos U$
— 34. In formula (17.) loco $y\frac{dz_1}{dt}-z\frac{dy_1}{dt}$ lege $y\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy}{dt}$
— 36 l. 3 loco α, α_1, β, β_1 lege α, α_2, β, β_1
— 38. In formula (14.) loco $M\beta=(m_1+m_2)\delta_2-m_1$ lege $M\beta=(m_1+m_2)\delta_2-m_2$
— — In formula (15.) loco $\beta=-\frac{m_1}{M}$ lege $\beta=-\frac{m_2}{M}$
— 40. In formula (3.) loco $\cos_1\Omega$ lege $\cos\Omega_1$
— — In formula (5.) loco $-c$ lege $-c_2^2$
— — l. 8 ab imo loco „cet orbite" lege „cette orbite"
— 43 l. 1 loco dv_1 lege δv_1
— — In formula (12.) loco $\tang v_1\frac{di}{\sin i}$ lege $\tang v_1\frac{di_1}{\sin i_1}$
— — In formula (14.) loco $-\frac{c_2\sin i}{\mu rr\sin I}dt$ lege $\frac{c_2\sin i_1}{\mu rr\sin I}dt$
— — l. 16 loco $d.\tang i$ c. $\tang i_1$ lege $d.\frac{\tang i}{\tang i_1}$
— — l. 19 loco (11.) lege (12.)
— 44. Ubique in hac pagina loco U legendum V.
— — In formula (25.) loco $\mu\frac{d_2r}{dt^2}$ lege $\mu\frac{d^2r}{dt^2}$
— 45. In formula III. loco $\tang v$ lege $\tang v_1$
— — In formula IV. loco δ^3 lege ϱ^3
— — In formula (1.) loco $\cos U$ lege $\cos V$

Pag. 49 l. 10 loco „In Commentationibus deinde subsequentibus" lege „In quo insuper"
— — l. 14 loco „varii proprietates" lege „variae proprietates"
— 55 l. 18 et 19 loco „termino — ducto" lege „terminis — ductis"
— 56 l. 16 loco x ponendum x_i
— — In Nota loco d_n lege dx_n
— 59 l. 20 loco $\Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\cdot$ lege $\Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\cdot$
— 62. In formula (11.) loco $\Sigma\pm\frac{\partial \Pi_2}{\partial \alpha_1}\cdot\frac{\partial \Pi_1}{\partial \alpha_2}\cdot\cdot$ lege $\Sigma\pm\frac{\partial \Pi_1}{\partial \alpha_1}\cdot\frac{\partial \Pi_2}{\partial \alpha_2}\cdot\cdot$;
mox loco „Formula (10.) ope" lege „Formulae (10.) ope"
— 63 l. 2 loco „unctionem" lege „functionem"
— 64 l. 14 loco „mutationis" l. „mutationes"
— — l. 3 ab imo loco $f_1+\mu\varphi$ lege $f_1+\mu f$
— 65 l. 11 loco $\Sigma+\lambda\lambda'_1\cdot\cdot$ lege $\Sigma\pm\lambda\lambda'_1\cdot\cdot$
— 66. In inscriptione $§^i$ 4 loco „detur Determinans datum" lege „detur Determinans"
— 67 l. 4 ab imo loco „eum" lege „cum"
— 70 l. 5 loco „qua formula" lege „quae formula"
— 72 l. 10 loco „referri solet" lege „referenda est"
— 74 l. 6 ab imo loco $x, x_2, \ldots$ lege $x_1, x_2, \ldots$
— 76. In Prop. III. loco

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = X_1,\quad \frac{\partial x_2}{\partial x} = X_2,\quad \ldots\quad \frac{\partial x_n}{\partial x} = X_n$$

ponendum

$$\frac{dx_1}{dx} = X_1,\quad \frac{dx_2}{dx} = X_2,\quad \ldots\quad \frac{dx_n}{dx} = X_n$$

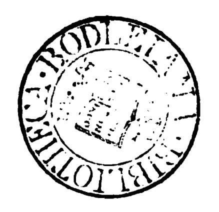
— 78 l. 3 loco „in aliis Commentationibus" lege „infra"
— 80. In secunda aequationum (10.) loco $\delta a'_k$ lege $\delta a''_k$
— — l. 11 loco „exbibitas" lege „exhibitos"
— 81. In inscriptione $§^i$ 8 post $X-X_1\frac{\partial x}{\partial x_1}-X_2\frac{\partial x}{\partial x_2}\cdot\cdot-X_n\frac{\partial x}{\partial x_n}$ adiiciendum $=0$.
— — l. 6 loco „proposito" lege „proposita"
— 83 l. 3 ab imo loco „provenit" lege „non provenit"
— 87 l. 2 loco X_μ lege $X\mu$
— 88 l. 9 ab imo loco „definitur, ut" lege „definitur y ut"
— 93. In Prop. II. loco $dt =$ lege $d\tau =$, loco $\frac{dw}{dt}, \frac{dw_1}{dt}, \frac{dw_n}{dt}$ lege $\frac{dw}{d\tau}, \frac{dw_1}{d\tau}, \frac{dw_n}{d\tau}$, loco $\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial w}\right)+\cdot\cdot\right\}dt$ lege $\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial w}\right)+\cdot\cdot\right\}d\tau$
— 96 l. 20 loco $\Sigma+$ lege $\Sigma\pm$
— 98 l. 5 loco $\partial w_m, \partial u_k$ lege dw_m, dw_k
— — l. 9 post „casus" adde „particulares, alterum"
— — l. 11 loco „et" lege „alterum"
— 102 l. 2 et 6 loco X lege Σ
— 110. In formula (11.) inter aequationem $X_1 dx = X dx_1$ et antecedentem interpungendum est.
— — l. ultima loco „in principis ultimi Multiplicatoris" lege „ad formandum ultimum Multiplicatorem"
— 113 l. 10 loco ∂x_1 lege dx_1
— — l. 20 loco „valor" lege „valore"
— 382 l. 14 loco X', X'' lege $\log X', \log X''$
— — l. 17 loco „der Factor" lege „die Gröfse"

Mathematische Abhandlungen.

C. G. J. Jacobi

Mathematische Werke.

Band II.



Berlin,

Druck und Verlag von G. Reimer.

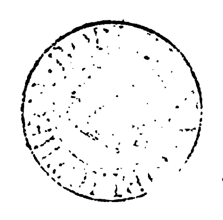
1851.



C. G. J. JACOBI

OPUSCULA MATHEMATICA.

VOLUMEN II.



BEROLINI,
TYPIS ET IMPENSIS G. REIMERI.
1851.

Vorwort.

Von den in diesem zweiten Bande enthaltenen Abhandlungen waren die 13 ersten schon zu Jacobi's Lebzeiten gedruckt; zu den folgenden hatte er wenige Tage vor seinem, am 18ten Februar dieses Jahres erfolgten Tode, das Manuscript abgeliefert.

Es schien mir angemessen, den Band mit diesen letzteren abzuschliefsen, durch welche derselbe bis auf wenige Bogen dem im Jahre 1846 erschienenen ersten Bande an Umfang gleich geworden ist.

Die zahlreichen, in Jacobi's Nachlafs vorgefundenen Arbeiten, welche nur selten zu völligem Abschlufs gebracht sind und deshalb vor der Veröffentlichung einer sorgfältigen Durchsicht bedürfen, bleiben somit für die folgenden Bände bestimmt. Es kann natürlich nicht die Absicht sein, mit dem, was Jacobi unvollendet gelassen,

eine Überarbeitung vorzunehmen. Seine Freunde können mit dieser Durchsicht nur den Zweck haben, nach Ausscheidung der Vorarbeiten, welche **Jacobi** in spätere Darstellungen aufgenommen hat, die durch ihren Inhalt zusammengehörigen Abhandlungen für die Veröffentlichung in eine Reihenfolge zu bringen, die das Verständnifs derselben erleichtere und den Gedankengang des grofsen Meisters auch in den Arbeiten erkennen lasse, an welche ihm nicht vergönnt war, die letzte Hand zu legen.

Berlin im August 1851.

G. Lejeune Dirichlet.

INDEX.

(Sämmtliche Abhandlungen sind auch in „Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik Band XXXV. XXXVI. XXXVII. XXXIX. XL. XLII." erschienen.)

1.

Notiz über A. Göpel.

Herr *Adolph Göpel*, Doctor der Philosophie und einer der Beamten der hiesigen Königlichen Bibliothek, ist wenige Wochen, nachdem er im März d. J. die wichtige Abhandlung „*Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis*" zum Druck übergeben, einer kurzen aber schmerzlichen Krankheit erlegen. In den Stunden, welche ihm sein Amt frei liefs, widmete er sich tiefen mathematischen Speculationen. Die einzige Erholung von diesen fand er in der Musik, in welcher er es bis zu einer bedeutenden Fertigkeit gebracht hatte. In stiller Zurückgezogenheit scheint er selbst den Umgang mit den Gelehrten seines Faches vermieden zu haben, die erst nach seinem Tode erfuhren, welch' ein bedeutendes Talent unter ihnen gelebt hatte. Ich habe ihn nie gesehen.

Seine Jugenderlebnisse erzählt *Göpel* selbst in dem seiner Doctoraldissertation angehängten Curriculum Vitae. Sein Vater, aus Sachsen gebürtig, war Musiklehrer in Rostock, wo er im September 1812 geboren wurde. Ein mütterlicher Oheim, der englischer Consul in Corsika war, nahm ihn in seinem zehnten Jahre mit sich nach Italien. Dort während eines wechselnden Aufenthaltes in mehreren Städten machte es sich dieser Oheim zum angelegentlichen Geschäft, seinen jungen Verwandten in den Anfangsgründen der Wissenschaften selbst zu unterrichten. Einen längeren Aufenthalt in Pisa während der beiden Winter von 1825 und 1826 benutzte der junge *Göpel*, um an der

dortigen Universität den Vorlesungen der Professoren ***Pieraccioli, Poletti, Gerbi*** und ***Gatteschi*** über Algebra und Differentialrechnung, Statik und analytische Mechanik, theoretische und Experimentalphysik beizuwohnen. Im J. 1827 kehrte er nach seiner Vaterstadt Rostock zurück, und besuchte hierauf noch zwei Jahre die erste Classe des dortigen Gymnasiums, von wo er die Berliner Universität bezog. Er ergriff mit Eifer die ihm hier gebotene Gelegenheit einer mannichfachen Ausbildung, und hörte aufser mathematischen, physikalischen und chemischen auch noch philosophische, philologische, historische und ästhetische Vorlesungen. Tiefern mathematischen Studien wandte er sich erst nach Beendigung seiner Universitätszeit zu, und wurde, wie viele von denen, welche zur rein mathematischen Speculation berufen sind, zunächst von der höhern Zahlenlehre angezogen. In seiner zur Erwerbung des Doctorgrades an der Berliner Universität im März 1835 vertheidigten Dissertation „*De aequationibus secundi gradus indeterminatis*," welche etwa $1\frac{1}{2}$ Bogen umfafst, legte er eine Probe dieser arithmetischen Studien ab, welche von grofsem Scharfsinn zeugte und seine Fähigkeit zu tiefen Forschungen bekundete. Da diese merkwürdige Dissertation nicht in den Handelsverkehr gekommen ist, will ich hier einige der hauptsächlichsten darin enthaltenen Resultate mittheilen.

Wenn man die Quadratwurzel einer Primzahl A von der Form $4n+1$ in einen Kettenbruch verwandelt, so enthält, wie bekannt, die symmetrische Periode der Nenner zwei gleiche mittlere Terme. Sind die diesen entsprechenden vollständigen Quotienten

$$\frac{\sqrt{A}+I}{D}, \quad \frac{\sqrt{A}+I'}{D'},$$

so hat ***Legendre*** gezeigt, dafs

$$D = D', \qquad A = I'I'+DD,$$

und dafs man daher auf diese Weise durch die Verwandlung der Quadratwurzel der Primzahl A in einen Kettenbruch ihre Zerfällung in zwei Quadrate erhält. Dieses schöne Resultat war bisher einzig in seiner Art geblieben. Durch tiefer eingehende Betrachtungen zeigt nun hier ***Göpel***, wie man auch, wenn A eine Primzahl von der Form $4n+3$ oder ihr Doppeltes ist, die Zerfällung von A in die Form $\varphi^2 \pm 2\psi^2$ durch die Entwicklung von $\sqrt{A}$ in einen

Kettenbruch findet. *Ist nämlich A eine Primzahl von der Form $8n+3$ oder ihr Doppeltes, so kommt man bei der Entwicklung von $\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch immer auf drei auf einander folgende vollständige Quotienten*

$$\frac{\sqrt{A}+I^0}{D^0},\quad \frac{\sqrt{A}+I}{D},\quad \frac{\sqrt{A}+I'}{D'},$$

in welchen D entweder $=\frac{1}{2}D^0$ oder $\frac{1}{2}D'$ oder $\frac{1}{4}(D^0+D')$ ist, und es wird in den beiden ersten Fällen

$$A = I^2+2D^2,$$

im dritten

$$A = \tfrac{1}{4}(I-I')^2+2D^2 = \tfrac{1}{16}(D^0-D')^2+2D^2,$$

wo $I-I'$ immer durch 2, D^0-D' durch 4 aufgeht. Wenn dagegen A eine Primzahl von der Form $8n+7$ oder ihr Doppeltes ist, so wird man bei der Verwandlung von $\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch immer auf zwei aufeinander folgende vollständige Quotienten

$$\frac{\sqrt{A}+I^0}{D^0},\quad \frac{\sqrt{A}+I}{D}$$

kommen, für welche

$$D+D^0 = 2I$$

ist, und diese ergeben

$$A = 2I^2-\tfrac{1}{4}(D-D^0)^2,$$

wo $D-D^0$ immer gerade ist.

Ich habe mit Hülfe der *Degenschen* Tafel die folgende Tabelle angefertigt, welche anzeigt, für welche Primzahlen von der Form $8n+3$ oder Doppelte von solchen die drei von *Göpel* unterschiedenen Fälle,

$$D = \tfrac{1}{2}D^0,\quad D = \tfrac{1}{2}D',\quad D = \tfrac{1}{4}(D^0+D')$$

eintreten.

$D = \frac{1}{2}D^0$: 3. 6. 11. 22. 38. 43. 59. 83. 131. 139. 179. 211. 214. 227. 262. 278. 283. 326. 379. 419. 443. 467. 491. 502. 547. 619. 659. 683. 694. 739. 787. 811. 827. 838. 971. 998.

$D = \frac{1}{2}D'$: 67. 86. 118. 307. 331. 358. 422. 523. 563. 566. 571. 614. 643. 662. 691. 859. 934. 947.

$D = \frac{1}{2}(D^0 + D')$: 19. 107. 134. 163. 166. 251. 347. 454. 499. 587. 758. 883. 886. 907. 982.

Es ist hierbei zu bemerken, dafs wenigstens in den hier betrachteten Zahlen unter 1000 der erste Fall bedeutend überwiegt, indem unter den 69 Zahlen 36 dem ersten, 18 dem zweiten, 15 dem dritten Falle angehören. Für die Primzahlen von der Form $8n+7$ und ihre Doppelten sind in ähnlicher Art die Fälle zu unterscheiden, in welchen $D^0 > D$ oder $D > D^0$.

Nach dieser ersten Arbeit hat *Göpel* in einem Zeitraume von 12 Jahren nichts veröffentlicht, aufser in den Jahren 1843—45 mehrere kleine, mit Geist verfafste, wenn gleich weniger bedeutende Aufsätze, welche er bei Gelegenheit der Correctur einer in Greifswalde von *Grunert* herausgegebenen mathematischen Zeitschrift niederschrieb. In einer derselben beweist er, *dafs wenn in einer Gleichung* $\left(\frac{x+\sqrt{y}}{p}\right)^n = P + \sqrt{Q}$, *wo* x, y, p, n, P, Q *ganze Zahlen bedeuten, der Nenner* p *von* 1 *verschieden ist, und* x, y, p *keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, immer* $p = 2$, $n = 3$ *oder ein Vielfaches von* 3, x *ungerade und* y *von der Form* $8n+5$ *sein mufs.* Mit der Handhabung der synthetischen Methoden *Steiners* zeigt er sich in mehreren dieser Aufsätze vollkommen vertraut. Es ist zu vermuthen, dafs sich noch andere gröfsere unpublicirte mehr oder minder ausgearbeitete Abhandlungen in seinem Nachlafs finden werden. Die von ihm kurz vor seinem Tode beendigte oben angeführte Abhandlung behandelt einen hohen und abstracten Theil der Analysis, und giebt die Lösung eines der bedeutendsten Probleme, welches sich die gegenwärtige Mathematik gestellt hat, die umgekehrten Functionen der ersten Classe der *Abel*schen Integrale wirklich darzustellen. Durch eine glückliche Divination verallgemeinert er auf naturgemäfse Art die einfachen Reihen Θ, auf welche ich die elliptischen Functionen zurückgeführt habe, und findet, dafs diese verallgemeinerten Reihen die Coëfficienten der quadratischen Gleichung geben, deren

beide Wurzeln in meiner Theorie der hyperelliptischen Functionen die simultanen Umkehrungsfunctionen zweier Integralsummen sind. Das einfache Mittel, dessen er sich hiezu bedient, ist die Multiplication zweier von den verallgemeinerten Reihen, wie ich ein ähnliches Verfahren für die Functionen Θ selbst im 3ten Bande des mathematischen Journals S. 305 angegeben habe. Meisterhaft ist die Art, wie er die Differentialgleichungen, welche er findet, ungeschreckt von ihrer Complication, durch eine passende Substitution in die verlangte Form der von mir aufgestellten Systeme der hyperelliptischen Differentialgleichungen bringt, und hierdurch das gestellte Problem vollständig erledigt. Aber *Göpel* war nicht der einzige, welcher sich mit Glück mit diesem schönen Probleme beschäftigt hat. Eine andere, umfangreichere Arbeit, welche, wie ich glaube, seit dem October v. J. einer berühmten Akademie vorliegt, und deren wesentlicher Inhalt mir von ihrem Verfasser und von mir auch einigen geehrten Freunden seit 3 Jahren bereits mitgetheilt worden ist, geht von derselben glücklichen Divination aus, und führt, wenn auch auf verschiednem, vielleicht leichterm Wege zu denselben Resultaten.

Ich bemerke noch, dafs die von *Göpel* angestellten Betrachtungen über die zweiten Differentiale seiner Functionen, welche für den jetzigen Zweck der Abhandlung überflüssig sind, so wie seine ausdrücklichen Worte S. 297 „quas ad secundam speciem nostrarum functionum facere *infra* videbis" und S. 298 „Quam *infra* ad tertiam speciem functionum quadrupliciter periodicarum pertinere videbis" auf weitere noch in der Abhandlung selbst auszuführende Untersuchungen deuten, die man aber in derselben mit Bedauern vermifst. Vielleicht finden sich dieselben in des Autors Papieren, die vielleicht auch das gewagt scheinende Wort rechtfertigen, dafs eine ähnliche Methode sich auf alle Transcendenten erstrecke, welche aus der Integration algebraischer Gröfsen entstehen. Auch dürfte schon nicht so ganz unbedenklich, wie der Verfasser meint, die Ausdehnung auf die Integrale erscheinen, in denen die unter dem Quadratwurzelzeichen befindliche Function den *sechsten* Grad übersteigt, da bei ihnen die Anzahl der in den Reihen enthaltenen Constanten nicht mehr, wie bei den elliptischen und den *Abel*schen Integralen der ersten Classe, mit der Anzahl der Moduln übereinstimmt.

Wenn auch nicht in der ersten Jugendblüthe, wie *Galois* und *Abel*, so hat doch auch hier viel zu früh und mitten in der Arbeit der Tod ein

bedeutendes Talent hinweggerafft. Freuen wir uns, dafs uns von demselben wenigstens ein schönes und dauerndes Denkmal hinterblieben ist. Bei der Gewohnheit der Deutschen, ihre Arbeiten überreif werden zu lassen, und ihrer Scheu, mit ihren besten Gedanken hervorzutreten, wären wir leicht um die Früchte der Arbeit *Göpels* gekommen, wenn ihn nicht ein von Hrn. *Hermite* an mich gerichteter Brief, wie in der Einleitung der Abhandlung angedeutet ist, zu ihrer Bekanntmachung bewogen hätte; oder es hat ein dunkles Vorgefühl, das uns aus den Worten „quum magis quam optabam festinandum fuisset" anspricht, ihn zur Eile ermahnt.

Berlin, d. 22. Sept. 1847.

2.

Über die unmittelbare Verification einer Fundamentalformel der Theorie der elliptischen Functionen.

In meinen „Fundamentis Novis" habe ich die Reihe

$$S = 1-q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})-q^9(z^3+z^{-3})+\text{ etc.}$$

dem Producte unendlich vieler Factoren

$$\Pi = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots(1-qz)(1-q^3z)(1-q^5z)\ldots$$
$$\times(1-qz^{-1})(1-q^3z^{-1})(1-q^5z^{-1})\ldots$$

gleich gefunden. Wenn man die Logarithmen dieser beiden einander gleichen Ausdrücke S und Π nach q oder nach z differenziirt, die aus dem Product Π hervorgehenden Brüche entwickelt, und dann mit der Reihe S multiplicirt, so mufs man auf identische Gleichungen

$$1.\quad \frac{\partial S}{\partial q} = S\frac{\partial \log \Pi}{\partial q},\qquad \frac{\partial S}{\partial z} = S\frac{\partial \log \Pi}{\partial z}$$

kommen. Man kann diese Identitäten auf folgende Art erweisen.

Setzt man

$$-q\frac{\partial \log \Pi}{\partial q} = P,\qquad -z\frac{\partial \log \Pi}{\partial z} = R,$$

so erhält man durch Substitution des Ausdrucks von Π,

$$P = \frac{2q^2}{1-q^2}+\frac{4q^4}{1-q^4}+\frac{6q^6}{1-q^6}+\text{ etc.}$$
$$+\frac{qz}{1-qz}+\frac{3q^3z}{1-q^3z}+\frac{5q^5z}{1-q^5z}+\text{ etc.}$$
$$+\frac{qz^{-1}}{1-qz^{-1}}+\frac{3q^3z^{-1}}{1-q^3z^{-1}}+\frac{5q^5z^{-1}}{1-q^5z^{-1}}+\text{ etc.},$$

$$R = \frac{qz}{1-qz}+\frac{q^3z}{1-q^3z}+\frac{q^5z}{1-q^5z}+\text{ etc.}$$
$$-\frac{qz^{-1}}{1-qz^{-1}}-\frac{q^3z^{-1}}{1-q^3z^{-1}}-\frac{q^5z^{-1}}{1-q^5z^{-1}}-\text{ etc.}$$

Durch die Entwicklung der zur Rechten befindlichen Brüche erhält man

$$2.\quad P = 2\Sigma\psi(m)q^{2m} + \Sigma\Sigma p q^{pm}(z^m + z^{-m})$$
$$= \Sigma\left\{2\psi(m)q^{2m} + \frac{q^m(1+q^{2m})}{(1-q^{2m})^2}(z^m + z^{-m})\right\},$$
$$3.\quad R = \Sigma\Sigma q^{pm}(z^m - z^{-m})$$
$$= \Sigma\frac{q^m}{1-q^{2m}}(z^m - z^{-m}),$$

wo

m alle ganzen Zahlen von 1 bis ∞,
p alle ungeraden Zahlen von 1 bis ∞,
$\psi(m)$ die Factorensumme von m

bedeutet. Bezeichnet man noch mit

i alle ganze Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$,

so wird

$$4.\quad S = \Sigma(-1)^i q^{ii} z^i.$$

Substituirt man die Ausdrücke (2.), (3.), (4.) in die Gleichungen

$$5.\quad -q\frac{\partial S}{\partial q} = SP, \qquad -z\frac{\partial S}{\partial z} = SR,$$

welche aus (1.) folgen, so erhält man

$$6.\quad \begin{cases} \Sigma(-1)^i i^2 q^{ii} z^i = 2\Sigma\Sigma(-1)^i\psi(m)q^{ii+2m}z^i \\ \qquad\qquad + \Sigma\Sigma\Sigma(-1)^i p q^{ii+pm}(z^{i+m} + z^{i-m}), \\ \Sigma(-1)^i i q^{ii} z^i = \Sigma\Sigma\Sigma(-1)^i q^{ii+pm}(z^{i+m} - z^{i-m}). \end{cases}$$

Um in diesen beiden Formeln die allgemeinen Glieder der Summen rechter Hand auf die Form

$$(-1)^i q^{ii} Q_i z^i \quad \text{und} \quad (-1)^i q^{ii} Z_i z^i$$

zu bringen, wo Q_i und Z_i die Gröfse z nicht enthalten sollen, hat man in den dreifachen Summen $i-m$ oder $i+m$ für i zu setzen, wodurch man

$$7.\quad Q_i = 2\Sigma\psi(m)q^{2m} + \Sigma\Sigma(-1)^m p q^{m(m+p-2i)}$$
$$+ \Sigma\Sigma(-1)^m p q^{m(m+p+2i)},$$
$$8.\quad Z_i = \Sigma\Sigma(-1)^m q^{m(m+p-2i)} - \Sigma\Sigma(-1)^m q^{m(m+p+2i)}$$

erhält. Es ist daher, um die Gleichungen (6.) zu beweisen, aus welchen die Gleichungen (5.) oder, was dasselbe ist, die Gleichungen (1.) folgen, nöthig und ausreichend, zu zeigen, *dafs die Gröfsen Q_i und Z_i für jeden Werth von i von q unabhängig sind, und respective die einfachen Werthe $-ii$, $-i$ annehmen.* Dieses geschieht durch folgende Betrachtungen.

In den Ausdrücken der Gröfsen Q_i und Z_i bedeutet m jede ganze positive Zahl, die 0 nicht inbegriffen; p jede positive ungerade Zahl; i dagegen eine bestimmte positive oder negative Zahl, die 0 mit inbegriffen; es reicht aber hin, wie im Folgenden geschehen soll, i positiv oder 0 anzunehmen, da, wenn man $-i$ für i setzt, Q_i unverändert bleibt und Z_i sich in $-Z_i$ verwandelt.

Bedeutet jetzt π *alle positiven und negativen ungeraden Zahlen von* $-(2i-1)$ *bis* $2i-1$, so nimmt p alle Werthe der Zahlen $2i+\pi$ und $4i+p$ an. Man hat daher

$$\Sigma\Sigma(-1)^m p\, q^{m(m+p-2i)} + \Sigma\Sigma(-1)^m p\, q^{m(m+p+2i)}$$
$$= \Sigma\Sigma(-1)^m (2i+\pi) q^{m(m+\pi)} + \Sigma\Sigma(-1)^m (4i+2p) q^{m(m+p+2i)},$$
$$\Sigma\Sigma(-1)^m q^{m(m+p-2i)} - \Sigma\Sigma(-1)^m q^{m(m+p+2i)}$$
$$= \Sigma\Sigma(-1)^m q^{m(m+\pi)}.$$

Ich will jetzt die drei Fälle untersuchen, wenn in den Ausdrücken rechts vom Gleichheitszeichen $m+\pi$ negativ, $m+\pi$ positiv und $m+\pi=0$ ist.

1) Wenn $m+\pi$ negativ ist, so kann m auch den Werth $-(m+\pi)$ annehmen, und es werden sich je zwei von den Werthen der Gröfsen

$$(-1)^m (2i+\pi) q^{m(m+\pi)}, \qquad (-1)^m q^{m(m+\pi)},$$

in denen m die beiden Werthe m und $-(m+\pi)$ annimmt, gegenseitig aufheben, da für dieselben $(-1)^m$ entgegengesetzte Werthe erhält, der andere Factor aber ungeändert bleibt.

2) Wenn $m+\pi$ positiv ist, kann man $m+\pi$ für m setzen; da man auch $-\pi$ für π setzen kann, so kann man gleichzeitig $m+\pi$ und $-\pi$ statt m und π setzen. Man erhält so zu jedem Term

$$(-1)^m (2i+\pi) q^{m(m+\pi)}, \qquad (-1)^m q^{m(m+\pi)}$$

den entsprechenden

$$-(-1)^m (2i-\pi) q^{m(m+\pi)}, \qquad -(-1)^m q^{m(m+\pi)}.$$

Es werden sich daher, wenn $m+\pi$ positiv ist, je zwei Terme, die man durch Substitution von $m+\pi$, $-\pi$ für m, π aus einander erhält, in der Summe $\Sigma\Sigma(-1)^m q^{m(m+\pi)}$ aufheben, und in der Summe $\Sigma\Sigma(-1)^m (2i+\pi) q^{m(m+\pi)}$ zu *einem* Term

$$(-1)^m 2\pi q^{m(m+\pi)}$$

vereinigen. Da π in dem einen der beiden Terme positiv, in dem andern negativ ist, so darf in dem Term, der beide vereinigt, π nur seine positiven (oder nur seine negativen) Werthe annehmen. In diesem Term ist der *Exponent* von q das Product zweier Factoren, deren Differenz ungerade und *kleiner*

als $2i$ ist; der *Zahlencoëfficient* das Doppelte dieser Differenz; das *Vorzeichen* $+$ oder $-$, je nachdem der kleinere Factor gerade oder ungerade ist. Dies ist genau dasselbe Gesetz, welches die Terme der Doppelsumme

$$\Sigma\Sigma(-1)^m(4i+2p)q^{m(m+p+2i)}$$

befolgen, nur dafs in letztrer die Differenz der beiden Factoren des Exponenten *gröfser* als $2i$ ist. Man kann daher in dem ersten der beiden vorgelegten Ausdrücke diejenigen Terme der ersten Doppelsumme, für welche $m+\pi$ positiv ist, mit der zweiten Doppelsumme in die eine

$$\Sigma\Sigma(-1)^m 2pq^{m(m+p)}$$

vereinigen.

3) Wenn $m+\pi=0$, erhält man die Terme

$$(-1)^m(2i+\pi), \qquad (-1)^m.$$

Die Werthe, welche in denselben m und π annehmen können, sind

$$m=1,\ \pi=-1;\ m=3,\ \pi=-3;\ ..\ m=2i-1,\ \pi=-(2i-1).$$

Hieraus folgt

$$\Sigma(-1)^m(2i+\pi)=-\{2i-1+2i-3+..+1\}=-ii,$$
$$\Sigma(-1)^m=-i.$$

Vereinigt man alle bisher gefundenen Resultate, so erhält man

$$Q_i=-ii+2\Sigma\psi(m)q^{2m}+2\Sigma\Sigma(-1)^m pq^{m(m+p)},$$
$$Z_i=-i.$$

Es ist daher der eine Satz, dafs $Z_i=-i$, bewiesen. Um auch $Q_i=-ii$ zu erhalten, was der andere zu beweisende Satz war, mufs noch gezeigt werden, dafs

$$-\Sigma\Sigma(-1)^m pq^{m(m+p)}=\Sigma\Sigma(-1)^{m+p}pq^{m(m+p)}=\Sigma\psi(m)q^{2m}$$

ist.

Die vorstehende Formel, welche allein noch zu beweisen übrig blieb, kommt mit dem folgenden Satze überein *):

---

*) Es ist nämlich

$$(-1)^{m+p}p=(-1)^{m+p}(m+p)+(-1)^m m.$$

Wenn die Zahl $m(m+p)$, welche jeden beliebigen positiven geraden Werth haben kann, gegeben ist, und man dieselbe auf irgend eine Art in zwei Factoren zerfällt, von denen der eine gerade, der andere ungerade ist, so hat man für $m+p$ den gröfseren, für m den kleineren dieser beiden Factoren zu setzen. Es wird daher in der Doppelsumme der Coëfficient von $q^{m(m+p)}$ oder $\Sigma(-1)^{m+p}p$ gleich der Summe aller dieser Factoren von $m(m+p)$, wenn man jeden Factor positiv oder negativ nimmt, je nachdem er gerade oder ungerade ist.

Wenn man eine gegebne gerade Zahl auf alle mögliche Arten in zwei Factoren zerfällt, von denen der eine ungerade, der andere gerade ist, so ist die Summe der geraden weniger der Summe der ungeraden Factoren gleich der Factorensumme der Hälfte der gegebnen Zahl.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr leicht. Es sei nämlich die gerade Zahl $2^i N$, wo N ungerade; es sei ν die Factorensumme von N, so ist $(2^i-1)\nu$ die Factorensumme der halben Zahl oder von $2^{i-1}N$. Zerfällt man aber die gegebene Zahl $2^i N$ auf alle mögliche Arten in zwei Factoren, von denen der eine ungerade ist, so ist der andere immer durch 2^i theilbar, also die Summe dieser letztern $2^i\nu$, während ν die Summe der ungeraden Factoren ist. Die Differenz beider ist also $(2^i-1)\nu$ oder die Factorensumme von $2^{i-1}N$, w. z. b. w.

Die vorstehende Untersuchung giebt eine unmittelbare Verification der beiden Gleichungen (6.) oder (5.) oder der Gleichungen:

$$9.\quad q(z+z^{-1})-4q^4(z^2+z^{-2})+9q^9(z^3+z^{-3})-\text{etc.}$$
$$=\{1-q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})-q^9(z^3+z^{-2})+\text{etc.}\}$$
$$\times\Sigma\left\{2\psi(m)q^{2m}+\frac{q^m(1+q^{2m})}{(1-q^{2m})^2}(z^m+z^{-m})\right\},$$

$$10.\quad q(z-z^{-1})-2q^4(z^2-z^{-2})+3q^9(z^3-z^{-3})-\text{etc.}$$
$$=\{1-q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})-q^9(z^3+z^{-3})+\text{etc.}\}$$
$$\times\Sigma\frac{q^m}{1-q^{2m}}(z^m-z^{-m}),$$

in welchen m jede beliebige ganze positive Zahl, die Null ausgeschlossen, bedeutet. Da sich aus den Gleichungen (5.),

$$-q\frac{\partial S}{\partial q}=SP,\qquad -z\frac{\partial S}{\partial z}=SR,$$

wenn man für P und Q die Ausdrücke

$$-q\frac{\partial\log\Pi}{\partial q}=P,\qquad -z\frac{\partial\log\Pi}{\partial z}=R$$

setzt, die in den *Fundamentis* auf doppelte Art bewiesene Formel $S=\Pi$ ergiebt, so kann das Vorstehende auch als ein dritter Beweis dieser Fundamentalformel betrachtet werden.

Aus der Natur der Reihe S folgt die Gleichung

$$11.\quad q\frac{\partial S}{\partial q}=\frac{z\,\partial\cdot z\frac{\partial S}{\partial z}}{\partial z}.$$

2*

Substituirt man hierin die Gleichungen

$$-q\frac{\partial S}{\partial q} = SP, \qquad -z\frac{\partial S}{\partial z} = SR,$$

so ergiebt sich

$$SP = \frac{z\partial\cdot SR}{\partial z} = S\frac{z\partial R}{\partial z} + R\frac{z\partial S}{\partial z} = S\frac{z\partial R}{\partial z} - SR^2.$$

Die Gleichung $SP = \frac{z\partial\cdot SR}{\partial z}$ läfst sich mittelst der oben bewiesnen $-ii = Q_i = iZ_i$ verificiren, da man

$$SP = \Sigma(-1)^i q^{ii} Q_i z^i, \qquad SR = \Sigma(-1)^i q^{ii} Z_i z^i$$

hat. Aus der vorstehenden Gleichung ergiebt sich ferner, wenn man durch S dividirt,

$$12. \quad R^2 = \frac{z\partial R}{\partial z} - P,$$

das ist, wenn man für P und R die Ausdrücke (2.) und (3.) setzt,

$$\left\{\Sigma\frac{q^m}{1-q^{2m}}(z^m - z^{-m})\right\}^2 = \Sigma\left\{\left(\frac{(m-1)q^m}{1-q^{2m}} - \frac{2q^{3m}}{(1-q^{2m})^2}\right)(z^m + z^{-m}) - 2\psi(m)q^{2m}\right\}.$$

Von dieser Formel findet man eine unmittelbare Verification in den Fundamentis S. 136. Es ist aber von besonderem Interesse, alle solche Formeln der Theorie der elliptischen Functionen hervorzuheben, welche sich auf Identitäten zurückführen lassen, die unmittelbar, d. i. ohne Hülfe anderweitiger analytischer Sätze eingesehen werden können, indem man dadurch ein Mittel erhält, neue Methoden zu gewinnen. So hat der unmittelbare Beweis der Formel

$$\left\{\frac{\sqrt{q}(z-z^{-1})}{1-q} + \frac{\sqrt{q^3}(z^3-z^{-3})}{1-q^3} + \frac{\sqrt{q^5}(z^5-z^{-5})}{1-q^5} + \text{etc.}\right\}^2$$
$$= \frac{q(z-z^{-1})^2}{1-q^2} + \frac{2q^2(z^2-z^{-2})^2}{1-q^4} + \frac{3q^3(z^3-z^{-3})^2}{1-q^6} + \text{etc.},$$

welchen ich in den Fundamentis S. 110 gegeben habe, zu einer neuen arithmetischen Methode geführt, aus den für die Zusammensetzungen der Zahlen aus *zwei* Quadraten bekannten Sätzen sowohl den bekannten Satz über die Zusammensetzbarkeit aller Zahlen aus *vier* Quadraten als auch neue Sätze über die *Anzahl* der Zusammensetzungen einer Zahl aus vier Quadraten abzuleiten.

3.

Über die partielle Differentialgleichung, welcher die Zähler und Nenner der elliptischen Functionen Genüge leisten.

Es sei $k'k' = 1 - k^2$, $\sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)} = \Delta$ und

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} = u, \quad \int_0^{\varphi} \Delta\, d\varphi = E(u),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta} = K, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \Delta\, d\varphi = E,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - k'k' \sin^2\varphi)}} = K', \quad e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q,$$

$$\Theta = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}\, \Delta\, e^{\int_0^u E(u)\,du - \frac{1}{2}\frac{Eu^2}{K}},$$

endlich

$$u = \frac{2Kx}{\pi}.$$

In den „Fundamentis Theoriae F. Ell." habe ich gezeigt, dafs die elliptischen Functionen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, Δ Brüche sind, deren Zähler und Nenner sich durch die Transcendente Θ darstellen lassen, welche selber sich in die Reihe

$$1 + 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x + 2q^9 \cos 6x + \text{ etc.} = \Theta$$

entwickeln läfst. Jeder Term dieser Reihe und daher die ganze Reihe selbst genügt der partiellen Differentialgleichung

$$-4q\frac{\partial\Theta}{\partial q} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}.$$

Diese partielle Differentialgleichung mufs sich, ohne dafs man die Reihenentwicklung von Θ kennt, unmittelbar auch aus den aufgestellten Definitionen ergeben. Es kann die Frage entstehen, ob man nicht zu solchen einfachen partiellen Differentialgleichungen durch Einführung analoger Gröfsen auch für complicirtere Transcendenten gelangen könne. Ich werde daher, um aus den obigen Definitionen die partielle Differentialgleichung, welcher Θ Genüge leistet,

abzuleiten, statt von dem Integral u von dem allgemeineren Integral

$$\int t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-rt)^{-\alpha}\,dt$$

ausgehen, welches sich für

$$\alpha=\beta=\tfrac{1}{2},\quad \gamma=1,\quad r=k^2,\quad t=\sin^2\varphi$$

auf $2u$ reducirt, und nur schliefslich, wenn die weitere Fortführung der Rechnung es erfordert, für α, β, γ die angegebnen besondern Werthe setzen.

Es sei für Werthe von α und β, welche zwischen 0 und 1 liegen, und für $\gamma>\beta$,

$$Y=\int_0^t t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-rt)^{-\alpha}\,dt,\qquad y=\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-rt)^{-\alpha}\,dt,$$

wo y die von *Euler*, *Pfaff*, *Gaufs*, *Kummer* und andern vielfach behandelte Transcendente ist. Man hat für die beiden Transcendenten Y und y die Differentialgleichungen:

$$(r-rr)\,Y''+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)r\}\,Y'-\alpha\beta Y=-\alpha t^{\beta}(1-t)^{\gamma-\beta}(1-rt)^{-\alpha-1},$$
$$(r-rr)\,y''+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)r\}\,y'-\alpha\beta y=0,$$

in denen, wie auch im Folgenden, durch die obern Indices die nach r für ein constantes t genommenen Differentialquotienten angedeutet werden. Setzt man

$$R=r^{\gamma}(1-r)^{\alpha+\beta+1-\gamma},\qquad T=t^{\beta}(1-t)^{\gamma-\beta},$$

so kann man diese Gleichungen auch so darstellen:

$$RY''+R'Y'-\alpha\beta\frac{YR}{r-rr}=-\alpha\frac{TR(1-rt)^{-\alpha-1}}{r-rr},$$

$$Ry''+R'y'-\alpha\beta\frac{yR}{r-rr}=0.$$

Nennt man z ein zweites Integral der Gleichung, welcher y genügt, so hat man auch

$$Rz''+R'z'-\alpha\beta\frac{zR}{r-rr}=0.$$

Ein solches Integral ist

$$z=\int_1^{\frac{1}{r}} t^{\beta-1}(t-1)^{\gamma-\beta-1}(1-rt)^{-\alpha}\,dt=r_1^{\gamma-\alpha-\beta}\int_0^1 t^{\gamma-\beta-1}(1-t)^{-\alpha}(1-r_1t)^{\alpha-\gamma}\,dt,$$

wo $r_1=1-r$. Aus den vorstehenden Differentialgleichungen folgt, wenn man

$$\frac{Y}{y}=v,\quad \frac{z}{y}=l,\qquad Z=\int\frac{(1-rt)^{-\alpha-1}yR\,dr}{r-rr}$$

setzt, und c eine Constante bedeutet,

$$Rv' = -\alpha\frac{TZ}{yy}, \quad Rl' = \frac{c}{yy} \quad \text{oder} \quad \frac{c\,dr}{R} = yy\,dl.$$

Wenn man statt r die Gröfse l als unabhängige Variable einführt, so wird das vollständige Differential von v durch die Gleichung

$$dv = \frac{1}{y}\frac{\partial Y}{\partial t}dt + v'dr = \frac{T}{y}(1-rt)^{-\alpha}\frac{dt}{t-tt} - \frac{\alpha}{c}TZdl$$

gegeben. Betrachtet man v und l als die beiden unabhängigen Variabeln, und unterscheidet die unter dieser Annahme abgeleiteten partiellen Differentialen durch Klammern, so geben die vorstehenden Formeln:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right) = \frac{1}{\frac{\partial v}{\partial t}} = \frac{y(t-tt)(1-rt)^{\alpha}}{T},$$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial l}\right) = \frac{\alpha}{c}\cdot y(t-tt)(1-rt)^{\alpha}.Z = \frac{\alpha TZ}{c}\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right),$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right) = \frac{1}{c}yyR.$$

Ist eine Function V in r und t gegeben, und man ersetzt die Variabeln r und t durch l und v, so wird

$$\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) = \frac{\partial V}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right),$$

und zufolge der vorstehenden Formeln das nach l genommene Differential,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right) = \frac{\partial V}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial l}\right) + \frac{\partial V}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial l}\right)$$
$$= \frac{\alpha TZ}{c}\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{yyR}{c}\,\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Nimmt man für V die Function

$$V = \tfrac{1}{2}\alpha TZ = -\tfrac{1}{2}Ryyv' = \tfrac{1}{2}R(y'Y - yY'),$$

so wird

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right) = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial.VV}{\partial v}\right) + \frac{\alpha yyTR}{2c}\frac{\partial Z}{\partial r} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial.VV}{\partial v}\right) + \frac{\alpha}{2c}\frac{y^2RR}{r-rr}T(1-rt)^{-\alpha-1}.$$

Es ist ferner

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right) = y, \quad \left(\frac{\partial Y'}{\partial v}\right) = \frac{\alpha t}{1-rt}\left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right) = \frac{\alpha ty}{1-rt},$$

woraus

$$\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) = \tfrac{1}{2}\gamma R\left(\gamma' - \frac{\alpha t\gamma}{1-rt}\right)$$

folgt, und hieraus

$$-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right) = \frac{\alpha\gamma^2 R}{2(1-rt)^2}\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right) = \tfrac{1}{2}\alpha\gamma^3 R\frac{(t-tt)(1-rt)^{\alpha-2}}{T}.$$

Durch Combination aller dieser Formeln ergiebt sich

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right) - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\cdot VV}{\partial v}\right) = -\frac{1}{c}\,\frac{R}{r-rr}\,\frac{TT}{t-tt}(1-rt)^{-2\alpha+1}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right).$$

Man hat daher, wenn man $l = c\lambda$ setzt, in Bezug auf die hier betrachtete allgemeinere Transcendente Y den folgenden Satz:

Es sei

$$Y = \int_0^t t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-rt)^{-\alpha}dt,$$

$$y = \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-rt)^{-\alpha}dt,$$

$$\lambda = \int r^{-\gamma}(1-r)^{\gamma-\alpha-\beta-1}yy\,\partial r, \qquad v = \frac{Y}{y},$$

$$V = \tfrac{1}{2}r^{\gamma}(1-r)^{\alpha+\beta-\gamma+1}\left(Y\frac{\partial y}{\partial r} - y\frac{\partial Y}{\partial r}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\alpha t^{\beta}(1-t)^{\gamma-\beta}\int r^{\gamma-1}(1-r)^{\alpha+\beta-\gamma}(1-rt)^{-\alpha-1}y\,\partial r,$$

so genügt V, als Function von v und λ betrachtet, der partiellen Differentialgleichung,

$$0 = \frac{\partial V}{\partial\lambda} - 2V\frac{\partial V}{\partial v} + r^{\gamma-1}(1-r)^{\alpha+\beta-\gamma}t^{2\beta-1}(1-t)^{2\gamma-2\beta-1}(1-rt)^{-2\alpha+1}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}.$$

In dieser Gleichung sind die Gröfsen t und r aufser in λ und v noch explicite enthalten, aber nur in einem einzigen in $\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}$ multiplicirten Factor. Ich will jetzt zu dem besondern Falle der elliptischen Integrale übergehen, in welchem dieser Factor der Einheit gleich wird.

Setzt man nämlich in den vorstehenden Formeln

$$\gamma = 1, \qquad \alpha = \beta = \tfrac{1}{2},$$

so wird

$$R = r-rr, \qquad TT = t-tt, \qquad (1-rt)^{-2\alpha+1} = 1,$$

und es verwandelt sich daher die zuletzt gefundne Gleichung in die folgende:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right) = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\cdot VV}{\partial v}\right) - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\right).$$

Man setze

$$\int V\,dv = W,$$

so giebt die Integration dieser Gleichung nach v,

$$c\left(\frac{\partial W}{\partial l}\right) = \left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\right).$$

Wenn das Integral, durch welches W definirt wird, von 0 an genommen wird, so mufs man zu demselben solche Function von l oder r addiren, dafs für $v=0$ oder, was dasselbe ist, für $t=0$ die vorstehende Gleichung erfüllt wird. Für $t=0$ verschwindet Y und daher auch Y', und es wird daher

$$\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right) = V = 0;$$

ferner erhält man aus dem oben angegebnen Werthe von $\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)$ für $t=0$,

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) = \tfrac{1}{2}R\gamma\gamma'.$$

Setzt man daher

$$\int_0^v V\,dv + W^0 = W,$$

so mufs W^0 die Gleichung

$$c\left(\frac{\partial W^0}{\partial l}\right) = \gamma\gamma R\frac{\partial W^0}{\partial r} = -\tfrac{1}{2}R\gamma\gamma'$$

erfüllen, woraus

$$W^0 = -\log\sqrt{\gamma}$$

folgt. Setzt man endlich

$$\Omega = e^{-W} = \sqrt{\gamma}\,e^{-\int_0^v V\,dv},$$

so erhält die partielle Differentialgleichung, zu welcher man gelangt war, die einfache Form,

$$-c\left(\frac{\partial\Omega}{\partial l}\right) = \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial v^2}\right).$$

Es ist aber in dem hier betrachteten besondern Fall

$$Y = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(t(1-t)(1-rt))}}, \qquad \gamma = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(t(1-t)(1-rt))}},$$

und daher, wenn man

$$r = k^2, \qquad t = \sin^2\varphi$$

setzt, und den Gröfsen u, K, K' etc. die ihnen oben beigelegte Bedeutung giebt,

$$Y = 2u, \quad v = \frac{u}{K} = \frac{2x}{\pi}, \quad R = k^2 k'^2.$$

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher K genügt, hat auch die Lösung K'; man kann daher

$$z = 2K'$$

setzen, woraus

$$l = \frac{z}{y} = \frac{K'}{K} = -\frac{1}{\pi}\log q$$

folgt. Die Constante c hat man aus der Gleichung $\frac{c\,dr}{R} = y^2 dl$ oder

$$\frac{c\,d\cdot k^2}{k^2 k'^2} = -\frac{4}{\pi} KK\, d\log q$$

zu bestimmen. Für unendlich kleine Werthe von k wird nach einem Satze *Eulers* in den Opusc. V. A. $\frac{\pi K'}{2K} = \log\frac{4}{k}$, also $k^2 = 16q$, und daher

$$c = -\pi.$$

Substituirt man die Werthe $l = -\frac{1}{\pi}\log q$, $v = \frac{2x}{\pi}$, $c = -\pi$ in die für Ω gefundne partielle Differentialgleichung, so wird dieselbe

$$-4q\frac{\partial\Omega}{\partial q} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}.$$

Ich will jetzt zeigen, dafs die Function Ω von der oben mit Θ bezeichneten Transcendente nur um einen constanten Factor verschieden ist.

Aus der Formel

$$\tfrac{1}{2}Y = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}$$

ergiebt sich, wenn man nach $r = k^2$ differentiirt,

$$Y' = \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)^3}}.$$

Es ist aber

$$k^2 d\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} = \left(-\frac{k'k'}{\Delta^2} + \Delta\right)d\varphi,$$

und daher

$$k^2 Y' = \int_0^\varphi \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{\Delta}\right)d\varphi = \frac{1}{k'k'}E(u) - u - \frac{k^2}{k'k'}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}.$$

Hieraus folgt, wenn man $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ setzt,

$$k^2 y' = \frac{1}{k'k'}E - K,$$

und daher

$$\tfrac{1}{2}k^2(y'Y - yY') = \frac{-1}{k'k'}(KE(u) - E.u) + \frac{k^2K}{k'k'}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\varDelta}.$$

Man hat daher nach einander die Formeln

$$-V = \frac{-1}{2}k^2k'^2(y'Y - yY') = KE(u) - E.u - \frac{k^2K\sin\varphi\cos\varphi}{\varDelta},$$

$$-\int_0^v V dv = \frac{-1}{K}\int_0^u V du = \int_0^u E(u)du - \tfrac{1}{2}\frac{E.u^2}{K} + \log\varDelta,$$

$$\Omega = \sqrt{(2K)}e^{-\int_0^v V dv} = \sqrt{(2K)}\varDelta e^{\int_0^u E(u)du - \frac{Eu^2}{K}} = \sqrt{\pi}.\Theta,$$

w. z. b. w.

Die Transcendente $\Theta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Omega$ genügt derselben partiellen Differentialgleichung wie Ω oder der Gleichung

$$-4q\frac{\partial\Theta}{\partial q} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2},$$

welche sich aus der Reihenentwicklung von Θ unmittelbar ergab. Umgekehrt kann man mittelst dieser partiellen Differentialgleichung die Reihenentwicklung von Θ finden. Wenn α positiv ist, wird für $t = \frac{1}{r}$ sowohl V als $\int V\partial v$ unendlich und demgemäfs Θ verschwinden. Für $t = \frac{1}{r}$ erhält man ferner, wenn man für z den oben angegebnen Werth setzt,

$$Y = y + (-1)^{\gamma-\beta-1}z, \quad v = 1 + (-1)^{\gamma-\beta-1}t,$$

und daher

$$u = K + K'\sqrt{-1}, \quad x = \frac{\pi u}{2K} = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\log q\sqrt{-1}.$$

Vermöge der partiellen Differentialgleichung erhält die für Θ anzunehmende Reihe die Form

$$A + A_1 q\cos 2x + A_2 q^4\cos 4x + A_3 q^9\cos 6x + \text{etc.},$$

wo A, A_1, A_2, etc. Zahlencoëfficienten sind, und es giebt die Bedingung, dafs diese Reihe für $x = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\log q\sqrt{-1}$ verschwinden soll, die Werthe

$$A = A_1 = A_2 .. = 1.$$

Die hierbei gemachte Voraussetzung, dafs eine Entwicklung von Θ nach den Cosinus der geraden Vielfachen von x für jeden reellen oder imaginären Werth von x gültig bleibt, rechtfertigt sich durch den Erfolg.

Die vorstehenden Betrachtungen lehren, dafs man aus der Definition der Function Θ durch geschlofsne Integralausdrücke die merkwürdige Reihenentwicklung dieser Transcendente mittelst allgemeiner Methoden, ohne einen der Theorie der elliptischen Functionen eigenthümlichen Satz zu kennen, ableiten kann. Die weitere Verfolgung dieser Betrachtungen und die Untersuchung, wie weit sie auf die allgemeinere Transcendente Y Anwendung finden, behalte ich einer andern Gelegenheit vor.

4.

Über die Differentialgleichung, welcher die Reihen

$$1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + \text{etc.},$$

$$2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \text{etc.}$$

Genüge leisten.

Die Aufgabe, eine gegebene Function durch eine Differentialgleichung zu definiren, ist im Allgemeinen eine unbestimmte, weil man mittelst der Gleichung, welche zwischen der Function und der unabhängigen Variable Statt findet, die Differentialgleichung auf unendlich viel Arten abändern kann. Aber diese Aufgabe wird bestimmt, wenn die Function keine algebraische ist, die Differentialgleichung aber, wie stillschweigend vorausgesetzt zu werden pflegt, eine algebraische Gleichung zwischen der unabhängigen Variable, der Function und ihren Differentialquotienten sein soll. Unter allen Differentialgleichungen dieser Art, welchen dieselbe Function Genüge leistet, wird eine die niedrigste Ordnung haben, und die übrigen durch Differentiation ergeben. Von dieser soll allein im Folgenden die Rede sein, wenn man von der Differentialgleichung spricht, welcher eine Function Genüge leistet. Macht man diese Gleichung rational und befreit den Ausdruck, welcher $=0$ wird, von Brüchen, so bestimmt die Dimension, auf welche der höchste Differentialquotient in diesem Ausdrucke steigt, den *Grad* der Differentialgleichung.

Es giebt aber im Allgemeinen kein Mittel, um zu erkennen, ob es eine solche endliche Differentialgleichung zwischen der Function und der unabhängigen Variable giebt, oder wenn man irgend woher wüfste, dafs es eine solche giebt, um dieselbe aufzufinden. Nur wenn die Function einer *linearen* Differentialgleichung Genüge leistet, hat man einige allgemeine Vorschriften, dieses zu erkennen, und die Differentialgleichung selber zu bilden. Wenn man z. B. die Reihe

$$y = 1 + 2q + 2q + 2q^9 + \text{etc.}$$

betrachtet, deren Bildungsgesetz so einfach ist, so giebt es doch trotz dieser Einfachheit kein Mittel, um *aus der Natur dieser Reihe selber* zu erkennen, ob sie durch eine endliche Differentialgleichung, d. h. durch eine algebraische

Gleichung zwischen ihr selbst, der unabhängigen Variable und ihren Differentialquotienten definirt werden kann. Und wenn es möglich ist, mit Hülfe der Theorie der elliptischen Functionen eine solche Differentialgleichung zu finden, wie complicirt und indirect sind die dazu nöthigen Betrachtungen! Man mufs zuerst zeigen, dafs man die beiden Gröfsen y und q durch eine dritte Variable k mittelst der transcendenten Gleichungen,

$$y = \sqrt{\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}\right\}},$$

$$\log\frac{1}{q} = \frac{\pi\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos^2\varphi+k^2\sin^2\varphi)}}}{\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}}$$

ausdrücken kann. Wie sehr man auch bei der Mannigfaltigkeit der Methoden, welche die Theorie der elliptischen Functionen darbietet, den Beweis dieses merkwürdigen Theorems abkürzen mag, so wird derselbe doch immer eine lange Kette subtiler Schlüsse erfordern. Man zeigt dann, dafs der Zähler sowohl wie der Nenner des für $\log\frac{1}{q}$ angegebnen Ausdrucks einer und derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung, in welcher k die unabhängige Variable ist, genügen. Durch diesen Umstand wird es möglich, den Differentialquotient $\frac{\partial \log q}{\partial k}$ durch y und k auszudrücken, wodurch es ferner möglich wird, in der zwischen y und k Statt findenden Differentialgleichung zweiter Ordnung die nach k genommnen Differentialquotienten von y durch andere nach $\log q$ genommene zu ersetzen. Man gewinnt hierdurch eine Gleichung, aus welcher man k durch y und seine nach $\log q$ genommenen Differentialquotienten bestimmen kann. Durch eine neue Differentiation endlich erhält man mittelst Elimination von k eine blofs zwischen y und seinen nach q genommenen Differentialquotienten Statt findende Gleichung dritter Ordnung und zweiten Grades, welche die verlangte Differentialgleichung ist. Diese Differentialgleichung steigt in Bezug auf y und seine Differentialquotienten bis auf die *vierzehnte Dimension*, und sie dürfte daher trotz aller unserer Kenntnisse von den quadratischen Formen durch die unmittelbare Substitution der Reihe schwer zu beweisen sein. Ich will jetzt die etwas beschwerliche Rechnung näher angeben, durch welche man zu dieser Differentialgleichung gelangen kann, deren Complication in einem merkwürdigen Gegensatz zu der Einfachheit der Reihe steht, welche ihr genügt.

Die Substitution

$$\cos\psi = \frac{k'\sin\varphi}{\Delta}, \qquad \sin\psi = \frac{\cos\varphi}{\Delta}, \qquad \sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)} = \frac{k'}{\Delta},$$

in welcher

$$k' = \sqrt{(1-k^2)}, \qquad \Delta = \sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}$$

ist, giebt

$$\frac{d\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}} = \frac{d\varphi}{\Delta},$$

und daher die Gleichungen

$$1. \quad \begin{cases} \int \Delta\, d\varphi = k'^2 \int \frac{d\varphi}{\Delta^3}, \\ \int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} = \int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3}, \\ \int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta} = k'^2 \int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3}, \end{cases}$$

wo die Integrale, so wie auch im Folgenden immer, von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ ausgedehnt gedacht werden. Bezeichnet man das ganze Integral der ersten Gattung mit

$$K = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}},$$

so hat man

$$kK = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{1}{k^2}-\sin^2\varphi\right)}}, \qquad k'K = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{k'^2}+\sin^2\varphi\right)}}.$$

Die Differentiation dieser drei Integrale nach k^2 ergiebt, wenn man die Formeln (1.) zu Hülfe nimmt, die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial K}{\partial \cdot k^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{2k'^2}\int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta},$$

$$\frac{\partial \cdot kK}{\partial \cdot k^2} = \frac{1}{2k}\int \frac{d\varphi}{\Delta^3} = \frac{1}{2kk'^2}\int \Delta\, d\varphi,$$

$$\frac{\partial \cdot k'K}{\partial \cdot k^2} = -\frac{1}{2k'}\int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta^3} = -\frac{1}{2k'}\int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta}.$$

Die letztere erhält man leicht, wenn man bemerkt, dafs $\partial.k^2 = -\partial.k'^2$.

Es ist ferner, wenn man wieder die Gleichungen (1.) zu Hülfe ruft,

$$\frac{\partial \cdot \int \frac{k^2\cos^2\varphi\, d\varphi}{\Delta}}{\partial \cdot k^2} = \frac{\partial \cdot \int \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}\left(\frac{1}{\Delta}-\Delta\right) d\varphi}{\partial \cdot k^2} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{\cos^2\varphi}{\Delta} + \frac{\cos^2\varphi}{\Delta^3}\right) d\varphi = \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\Delta},$$

$$\frac{\partial \int \frac{1}{k}\Delta\, d\varphi}{\partial \cdot k^2} = \frac{\partial \cdot \int \sqrt{\left(\frac{1}{k^2}-\sin^2\varphi\right)} d\varphi}{\partial \cdot k^2} = -\frac{1}{2k^3}\int \frac{d\varphi}{\Delta},$$

$$\frac{\partial\int\frac{k^2}{k'}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta}}{\partial\cdot k^2}=\frac{\partial\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{k'^2}+\sin^2\varphi\right)}}}{\partial\cdot k'^2}-\frac{\partial\int\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{\left(\frac{\cos^2\varphi}{k'^2}+\sin^2\varphi\right)}d\varphi}{\partial\cdot k'^2}$$

$$=\frac{1}{2k'^3}\int\left\{\frac{k'^2\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta^3}+\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta}\right\}=\frac{1}{2k'^3}\int\frac{\partial\varphi}{\Delta}.$$

Setzt man daher

$$K=\tfrac{1}{2}\pi\cdot A,\qquad kK=\tfrac{1}{2}\pi\cdot A_1,\qquad k'K=\tfrac{1}{2}\pi\cdot A_2,$$

ferner

$$k^2\int\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\Delta}=\tfrac{1}{2}\pi\cdot B,$$

$$\frac{1}{k}\int\Delta\,d\varphi=\tfrac{1}{2}\pi\cdot B_1,$$

$$\frac{k^2}{k'}\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\Delta}=\tfrac{1}{2}\pi\cdot B_2,$$

so wird

$$2.\quad\begin{cases}\dfrac{\partial A}{\partial\cdot k^2}=\dfrac{1}{2k^2k'^2}B, & \dfrac{\partial B}{\partial\cdot k^2}=\tfrac{1}{2}A;\\[2mm] \dfrac{\partial A_1}{\partial\cdot k^2}=\dfrac{1}{2k'^2}B_1, & \dfrac{\partial B_1}{\partial\cdot k^2}=-\dfrac{1}{2k^4}A_1;\\[2mm] \dfrac{\partial A_2}{\partial\cdot k^2}=-\dfrac{1}{2k^2}B_2, & \dfrac{\partial B_2}{\partial\cdot k^2}=\dfrac{1}{2k'^4}A_2.\end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, dafs A der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial\cdot k^2k'^2\frac{\partial A}{\partial\cdot k^2}}{\partial\cdot k^2}=\tfrac{1}{4}A,$$

oder, wenn man der Kürze halber

$$\frac{\partial\cdot k^2}{k^2k'^2}=\partial\log\frac{k^2}{k'^2}=\partial l$$

setzt, der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2A}{\partial l^2}=\tfrac{1}{4}k^2k'^2A$$

Genüge leistet. Diese Differentialgleichung bleibt unverändert, wenn man k in k' verändert. Es ist daher auch

$$K'=\int\frac{d\varphi}{(1-k'^2\sin^2\varphi)}$$

ein Integral derselben. Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial^2 A}{\partial l^2} = \tfrac{1}{4}k^2 k'^2 A, \qquad \frac{\partial^2 K'}{\partial l^2} = \tfrac{1}{4}k^2 k'^2 K'$$

folgt

$$A\frac{\partial^2 K'}{\partial l^2} - K'\frac{\partial^2 A}{\partial l^2} = 0,$$

und durch Integration

$$A\frac{\partial K'}{\partial l} - K'\frac{\partial A}{\partial l} = \alpha,$$

wo α eine Constante ist. Diese Gleichung kann man auch so darstellen,

$$\frac{\partial\cdot\frac{K'}{A}}{\partial l} = \frac{\alpha}{A^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial\cdot\frac{K'}{A}}{\partial\cdot k^2} = \frac{\alpha}{k^2 k'^2 . A^2}.$$

Der Bruch $\frac{1}{k'^2 A^2} = \frac{\pi^2}{4k'^2 K^2}$ läfst sich für kleine Werthe von k in eine nach den ganzen positiven Potenzen von k^2 fortschreitende, mit der Einheit beginnende Reihe entwickeln, woraus durch Integration folgt, dafs der Werth von $\frac{K'}{A} = \frac{\pi K'}{2K}$ für kleine Werthe von k bis auf Gröfsen von der Ordnung k^2 genau

$$\alpha \log k^2 + \beta$$

ist, wo β eine neue Constante bedeutet. Die Werthe von α und β hat *Euler* in den „Opusculis varii argumenti" $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \log 4$ gefunden. Substituirt man den Werth von α, und setzt

$$\log q = -\frac{\pi K'}{K} = -2\frac{K'}{A},$$

so erhält man

$$3. \qquad \frac{\partial \log q}{\partial\cdot k^2} = \frac{1}{k^2 k'^2 A^2} = \frac{1}{k'^2 A_1^2} = \frac{1}{k^2 A_2^2},$$

oder auch

$$3^*. \qquad \frac{\partial \log\frac{k^2}{k'^2}}{\partial \log q} = A^2, \quad \frac{\partial \log\frac{1}{k'^2}}{\partial \log q} = A_1^2, \quad \frac{\partial \log k^2}{\partial \log q} = A_2^2.$$

Wenn man mittelst der Formeln (3.) statt des Differentials $\partial\cdot k^2$ das Differential $\partial \log q$ einführt, so werden die Formeln (2.):

$$4. \quad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial \log q} = \tfrac{1}{2}BA^2, & \dfrac{\partial B}{\partial \log q} = \tfrac{1}{2}k^2 k'^2 A^3; \\[2ex] \dfrac{\partial A_1}{\partial \log q} = \tfrac{1}{2}B_1 A_1^2, & \dfrac{\partial B_1}{\partial \log q} = -\tfrac{1}{2}\dfrac{k'^2}{k^4} A_1^3; \\[2ex] \dfrac{\partial A_2}{\partial \log q} = -\tfrac{1}{2}B_2 A_2^2, & \dfrac{\partial B_2}{\partial \log q} = \tfrac{1}{2}\dfrac{k^2}{k'^4} A_2^3. \end{cases}$$

Man hat daher, wenn man

$$A = \frac{1}{C},\quad A_1 = \frac{1}{C_1},\quad A_2 = \frac{1}{C_2}$$

setzt, und die nach $\log q$ genommenen Differentialen der Functionen C mit obern Indices bezeichnet,

$$5.\quad 4C^3C'' = -k^2k'^2,\quad 4C_1^3C_1'' = \frac{k'^2}{k^4},\quad 4C_2^3C_2'' = \frac{k^2}{k'^4}.$$

Ich bemerke jetzt, dafs wenn man in dem Ausdruck

$$\frac{\sqrt{(4h+1)}-1}{\sqrt{(4h+1)}+1}$$

für h die drei vorstehenden Gröfsen

$$-k^2k'^2,\quad \frac{k'^2}{k^4},\quad \frac{k^2}{k'^4}$$

setzt, und bei der zweiten die Wurzel negativ nimmt, die Gröfsen

$$-\frac{k^2}{k'^2},\quad \frac{1}{k'^2},\quad k^2$$

erhalten werden. Dies sind zufolge (3*.) die Gröfsen, deren Logarithmen differentiirt die Differentiale $A^2\partial\log q$, $A_1^2\partial\log q$, $A_2^2\partial\log q$ oder

$$\frac{\partial\log q}{C^2},\quad \frac{\partial\log q}{C_1^2},\quad \frac{\partial\log q}{C_2^2}$$

geben. Es ist aber

$$\partial\log\frac{\sqrt{(4h+1)}-1}{\sqrt{(4h+1)}+1} = \frac{\partial h}{h\sqrt{(4h+1)}} = \frac{\partial\log h}{\sqrt{(4h+1)}}.$$

Substituirt man daher in $\frac{\partial\log h}{\sqrt{(4h+1)}}$ für h die drei Werthe (5.), so erhält man

$$\frac{\partial\log q}{C^2},\quad \frac{\partial\log q}{C_1^2},\quad \frac{\partial\log q}{C_2^2}.$$

Hieraus ergiebt sich, dafs für alle drei Gröfsen C, C_1, C_2 dieselbe Differentialgleichung

$$6.\quad \partial\log\cdot C^3C'' = \sqrt{(16C^3C''+1)}\frac{\partial\log q}{C^2}$$

Statt findet, nur dafs man, wenn man C_1 für C setzt, die Quadratwurzel negativ zu nehmen hat. Macht man diese Gleichung rational, so ergiebt sich für alle drei Functionen

$$C = \frac{\pi}{2K},\quad C_1 = \frac{\pi}{2kK},\quad C_2 = \frac{\pi}{2k'K}$$

dieselbe Differentialgleichung dritter Ordnung und zweiten Grades,

$$7.\quad C^2(CC'''+3C'C'')^2 = C''^2(16C^3C''+1).$$

Wenn man

$$C = y^{-2}$$

setzt, und die nach $\log q$ genommenen Differentialquotienten von y wieder durch obere Indices bezeichnet, so erhält man nach einander

$$C' = -2y^{-3}y', \qquad C'' = -2y^{-3}y''+6y^{-4}y'^2,$$
$$C''' = -2y^{-3}y'''+18y^{-4}y'y''-24y^{-5}y'^3,$$

und daher

$$CC'''+3C'C'' = -2y^{-5}y'''+30y^{-6}y'y''-60y^{-7}y'^3.$$

Es verwandelt sich daher die Differentialgleichung (7.), wenn man noch mit $\frac{1}{4}y^{18}$ multiplicirt, in die folgende Differentialgleichung zwischen y und q,

8. $$(y^2y'''-15yy'y''+30y'^3)^2+32(yy''-3y'^2)^3 = y^{10}(yy''-3y'^2)^2.$$

In dieser Gleichung kann y, den drei Werthen von C entsprechend, jede der drei Functionen $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}$ bedeuten. Wenn man daher die aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten, nach den Potenzen von q fortschreitenden Reihenentwicklungen dieser Functionen einführt, so erhält man das folgende Theorem:

Theorem.

Es bedeute** y **eine der drei Reihen

$$1\pm 2q+2q^4\pm 2q^9+2q^{16}\pm 2q^{25}+\text{etc.},$$
$$2\{\sqrt[4]{q}+\sqrt[4]{q^9}+\sqrt[4]{q^{25}}+\sqrt[4]{q^{49}}+\text{etc.}\},$$

so findet zwischen** y **und** q **die folgende Differentialgleichung dritter Ordnung und zweiten Grades Statt, in welcher** $d\log q$ **als das constante Differential angenommen ist,

$$\{y^2d^3y-15y\,dy\,d^2y+30dy^3\}^2+32\{y\,d^2y-3dy^2\}^3$$
$$= y^{10}\{y\,d^2y-3dy^2\}^2(d\log q)^2.$$

Die beiden der vorstehenden Differentialgleichung genügenden Reihen

$$1+2q+2q^4+2q^9+.. = \sqrt{\frac{2K}{\pi}},$$

$$1-2q+2q^4-2q^9+.. = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},$$

werden aus einander durch Veränderung von q in $-q$ erhalten. Allgemeiner

kann man, da die Differentialgleichung (8.) nur die nach $\log q$ genommenen Differentiale und nicht q selber enthält, aus jedem für y gefundenen Ausdruck einen andern, welcher derselben Differentialgleichung Genüge leistet, erhalten, wenn man αq statt q setzt, wo α eine beliebige Constante bedeutet. Wenn man in der Reihe

$$2\sqrt[4]{q}\{1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\text{etc.}\} = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}},$$

welche ebenfalls der Differentialgleichung (8.) genügt, die Variable q in $-q$ verwandelt, oder $\alpha = -1$ setzt, so wird diese Reihe mit einer 8ten Wurzel der Einheit multiplicirt. Die Differentialgleichung (8.) mufs daher so beschaffen sein, dafs sie unverändert bleibt, wenn man y mit einer 8ten Wurzel der Einheit multiplicirt, oder es müssen in den verschiedenen Termen der Gleichung (8.) die Unterschiede ihrer Dimensionen in Bezug auf y und seine Differentialquotienten durch 8 theilbar sein. Dies ist auch in der That der Fall, da in Bezug auf y und seine Differentialquotienten die Terme links vom Gleichheitszeichen in der Gleichung (8.) von der 6ten, die Terme rechts vom Gleichheitszeichen von der 14ten Dimension sind.

Die Gleichung

$$\partial \log q = \frac{\partial \cdot k^2}{k^2 k'^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2} = \frac{\partial \cdot k^2}{k^2 k'^2 y^4}$$

bleibt unverändert, wenn man q in q^m und gleichzeitig y in $\frac{y}{\sqrt[4]{m}}$ (oder C in $\sqrt[4]{m}\,C$) ändert. Hieraus folgt, *dafs aus jeder gegebenen Function, welche der Differentialgleichung* (8.) *Genüge leistet, eine andere erhalten wird, welche derselben Differentialgleichung genügt, wenn man die gegebene Function mit* $\sqrt[4]{m}$ *multiplicirt und gleichzeitig* q *in* q^m *ändert.* Es mufs daher in jedem Term der Differentialgleichung (8.) die Summe der Ordnungen der einzelnen Differentialquotienten weniger dem 4ten Theile seiner in Bezug auf y und die Differentialquotienten von y gemefsnen Dimension die gleiche Zahl geben, oder in je zwei verschiednen Termen die Differenz der Summe der Ordnungen der Differentialquotienten gleich dem vierten Theile des Unterschiedes ihrer Dimensionen sein. In der That ist in (8.) der 4te Theil des Unterschiedes der Dimensionen der Terme rechts und links vom Gleichheitszeichen $\frac{1}{4}(14-6) = 2$ und der Unterschied der Summe der Ordnungen ihrer Differentialquotienten ebenfalls $6-4 = 2$.

In der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen wird gezeigt, dafs durch die Änderung von q in q^m, wenn m eine beliebige rationale Zahl ist, das ganze elliptische Integral K und daher auch $C=\frac{\pi}{2K}$ mit einem Factor, welcher eine algebraische Function von k ist, multiplicirt wird. Bedeutet daher g einen solchen Factor, so mufs dem Vorhergehenden zufolge der Differentialgleichung (7.), welcher C genügt, auch die Function $\frac{gC}{\sqrt{m}}$ genügen. Es giebt daher unendlich viele Fälle, in welchen zwei Integrale der Differentialgleichung (7.) aus einander durch Multiplication mit einer algebraischen Function von k erhalten werden. Wenn allgemein f einen Factor von der Beschaffenheit bedeutet, dafs $fC=\frac{\pi f}{2K}$ wieder ein Integral der Differentialgleichung (7.) wird, welcher C genügt, so findet man die zwischen diesem Factor f und dem Modul k bestehende Differentialgleichung auf folgende Art.

Die zwischen den Gröfsen C und q Statt findende Differentialgleichung (7.) wurde durch Elimination von $k^2k'^2$ aus den Gleichungen

$$4C^3C'' = -k^2k'^2,\quad \frac{\partial \log -k^2k'^2}{\sqrt{(1-4k^2k'^2)}} = \frac{\partial \log q}{C^2}$$

abgeleitet. Die letztere Gleichung folgt aus der Gleichung $\partial \log \frac{k^2}{k'^2} = \partial l = \frac{\partial \log q}{C^2}$. Diese giebt für eine beliebige Function u,

$$C^2u' = C^2\frac{\partial u}{\partial \log q} = \frac{\partial u}{\partial l}.$$

Setzt man

$$D = f.C,$$

und bezieht die obern Indices von D und f, ebenso wie die von y, C und u auf die Differentiation nach $\log q$, so wird

$$D'' = fC''+2f'C'+f''C.$$

Man hat daher

$$4D^3D'' = -4f^4k^2k'^2+4f^3C^2\frac{\partial.C^2f'}{\partial \log q}$$

$$= -4f^4k^2k'^2+4f^3\frac{\partial^2 f}{\partial l^2},$$

$$\frac{\partial l}{f^2} = \frac{\partial \log q}{D^2}.$$

Setzt man den Ausdruck

$$9.\quad -4f^4k^2k'^2+4f^3\frac{\partial^2 f}{\partial l^2} = H,$$

men, so werden die Functionen $\sqrt{n}.M$ Integrale der zwischen f und $k_1 = \frac{k^2}{k'^2}$ bestehenden Differentialgleichung (12.), und zwar algebraische Integrale dieser Gleichung.

Die für C und y oben aufgestellten Differentialgleichungen sind aus der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren besondere Integrale K und K' sind, in Verbindung mit der Gleichung

$$\partial \log q = \partial \cdot \frac{-\pi K'}{K} = \frac{\partial . k^2}{k^2 k'^2 \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2}$$

erhalten worden. Setzt man für K und K' zwei vollständige Integrale der erstern,

$$Q = aK + \sqrt{-1}\, bK', \qquad Q' = a'K' + \sqrt{-1}\, b'K,$$

so wird

$$\partial \cdot \frac{-\pi Q'}{Q} = \frac{(aa'+bb')\partial \cdot k^2}{k^2 k'^2 \left(\frac{2Q}{\pi}\right)^2}.$$

Hieraus folgt, dafs man in den zwischen K, k und q aufgestellten Differentialgleichungen für K und $\log q$ auf die allgemeinste Art die Gröfsen $\frac{Q}{\sqrt{(aa'+bb')}}$ und $-\frac{\pi Q'}{Q}$ setzen kann. ***Es wird daher das vollständige Integral der Differentialgleichungen* (7.) *und* (8.) *durch das System der beiden Gleichungen***

$$17. \quad \begin{cases} C^{-1} = y = \sqrt{\dfrac{\frac{2}{\pi}(aK+\sqrt{-1}\, bK')}{\sqrt{(aa'+bb')}}}, \\ \log q = -\dfrac{\pi(a'K'+\sqrt{-1}\, b'K)}{aK+\sqrt{-1}\, bK'} \end{cases}$$

gegeben, wo a, b, a', b' willkürliche Constanten bedeuten, und die Gröfsen K und K' gegebne Functionen einer dritten Gröfse k sind, nämlich die ganzen elliptischen Integrale erster Gattung für die Moduln k und $\sqrt{(1-k^2)}$.

Setzt man

$$-\frac{K'}{K} = r,$$

woraus

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2e^{\pi r} + 2e^{4\pi r} + 2e^{9\pi r} + \text{etc.}$$

folgt, so erhält man aus der letzten der beiden vorstehenden Gleichungen (17.),

$$\log q = \frac{\pi(a'r - \sqrt{-1}\, b')}{a - \sqrt{-1}\, br},$$

und daher

$$r = \frac{a\log q+\sqrt{-1}\,b'\pi}{a'\pi+\sqrt{-1}\,b\log q},\qquad a-\sqrt{-1}\,br = \frac{(aa'+bb')\pi}{a'\pi+\sqrt{-1}\,b\log q}.$$

Der vollständige Werth von y, durch r ausgedrückt, wird

$$y = \sqrt{\frac{a-\sqrt{-1}\,br}{\sqrt{(aa'+bb')}}}\cdot\{1+2e^{\pi r}+2e^{4\pi r}+2e^{9\pi r}+\text{etc.}\}.$$

Wenn man in diesen Formeln a, b, a', b' statt $\frac{a}{\sqrt{(aa'+bb')}}$, $\frac{b}{\sqrt{(aa'+bb')}}$, $\frac{a'}{\sqrt{(aa'+bb')}}$, $\frac{b'}{\sqrt{(aa'+bb')}}$ und

$$q = e^{\pi\varrho},\qquad \log q = \pi\varrho$$

setzt, so erhält man das folgende

Theorem.

„Die Reihe

$$y = 1+2e^{\pi\varrho}+2e^{4\pi\varrho}+2e^{9\pi\varrho}+\text{etc.}$$

genügt der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\{y^2d^3y-15y\,dy\,d^2y+30\,dy^3\}^2+32\,\{y\,d^2y-3\,dy^2\}^3 = y^{10}\{y\,d^2y-3\,d^2y\}^2\pi^2d\varrho^2,$$

in welcher $d\varrho$ das beständige Differential ist, und es wird das vollständige Integral dieser Differentialgleichung,

$$y = \frac{1+2e^{\pi r}+2e^{4\pi r}+2e^{9\pi r}+\text{etc.}}{\sqrt{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)}},$$

wo

$$r = \frac{a\varrho+\sqrt{-1}\,b'}{a'+\sqrt{-1}\,b\varrho}$$

ist, und a, a', b, b' willkürliche Constanten bedeuten, für welche

$$aa'+bb' = 1$$

ist."

Man kann das vorstehende Theorem aus dem ersten oben gegebnen Theorem ableiten, wenn man beweist,

dafs, wenn $y=f(\varrho)$, *wo* $\pi\varrho=\log q$, *ein beliebiges particuläres Integral der Differentialgleichung* (8.) *bedeutet, und man* $r=\frac{a\varrho+\sqrt{-1}\,b'}{a'+\sqrt{-1}\,b\varrho}$ *setzt, wo* $aa'+bb'=1$, *die Function*

$$y = \frac{f(r)}{\sqrt{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)}}$$

das vollständige Integral der Differentialgleichung (8.) *ist.*

Man zeigt dieses leicht auf folgende Art.

Die Differentialgleichung (8.) verwandelt sich, wenn man $y = C^{-1}$ setzt, in die Differentialgleichung (7.), welche, wie wir gesehen haben, aus dem Systeme zweier Gleichungen,

$$4C^3C'' = H, \quad \frac{\partial \log H}{\sqrt{(1+4H)}} = \frac{\partial \log q}{C^2},$$

durch Elimination von H hervorgeht. Setzt man $\log q = \pi\varrho$, und für C ein beliebiges particuläres Integral der Differentialgleichung (7.),

$$C = \varphi(\varrho) = \{f(\varrho)\}^{-2},$$

so werden die beiden vorstehenden Gleichungen, wenn man sich der *Lagrange*-schen Bezeichnungsart der Differentialquotienten bedient,

$$4\varphi(\varrho)^3\varphi''(\varrho) = \pi^2 H, \quad \frac{\partial \log H}{\sqrt{(1+4H)}} = \frac{\pi\partial\varrho}{\varphi(\varrho)^2}.$$

Schreibt man r für ϱ, so werden auch zwei Gleichungen von der Form

$$4\varphi(r)^3\varphi''(r) = \pi^2 H_1, \quad \frac{\partial \log H_1}{\sqrt{(1+4H_1)}} = \frac{\pi\partial r}{\varphi(r)^2}$$

gleichzeitig Statt finden. Es seien a, b, a', b' Constanten, für welche $aa'+bb' = 1$, und

$$r = \frac{a\varrho+\sqrt{-1}\,b'}{a'+\sqrt{-1}\,b\varrho}, \quad \partial r = \frac{\partial\varrho}{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)^2},$$

ferner

$$\psi(\varrho) = (a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)\varphi(r):$$

so erhält man durch zweimaliges Differentiiren,

$$\psi'(\varrho) = \sqrt{-1}\,b\varphi(r)+\frac{\varphi'(r)}{a'+\sqrt{-1}\,b\varrho},$$

$$\psi''(\varrho) = \frac{\varphi''(r)}{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)^3},$$

und daher

$$\psi(\varrho)^3\psi''(\varrho) = \varphi(r)^3\varphi''(r).$$

Fügt man hinzu die Formel

$$\frac{\partial r}{\varphi(r)^2} = \frac{\partial\varrho}{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)^2\varphi(r)^2} = \frac{\partial\varrho}{\psi(\varrho)^2},$$

so verwandeln sich die beiden Gleichungen

$$4\varphi(r)^3\varphi''(r) = \pi^2 H_1, \quad \frac{\partial \log H_1}{\sqrt{(1+4H_1)}} = \frac{\pi\partial r}{\varphi(r)^2}$$

in die ganz ähnlichen,

$$4\psi(\varrho)^3\psi''(\varrho) = \pi^2 H_1, \qquad \frac{\partial \log H_1}{\sqrt{(1+4H_1)}} = \frac{\pi\,\partial\varrho}{\psi(\varrho)^2}.$$

Es folgt hieraus, dafs die Function

$$\psi(\varrho) = (a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)\varphi(r),$$

eben so wie $\varphi(\varrho)$, ein Integral der Differentialgleichung (7.) und daher auch

$$\{\psi(\varrho)\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{f(r)}{\sqrt{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)}}$$

ein Integral der Differentialgleichung (8.) ist, und zwar sind dies die vollständigen Integrale dieser Differentialgleichungen, weil sie 3 willkürliche Constanten enthalten.

Man hat oben gesehn, dafs die Reihe

$$2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+2\sqrt[4]{q^{49}}+\text{ etc.}$$

ebenfalls ein Integral der Differentialgleichung (8.) ist. Man wird daher mittelst des eben gefundenen Satzes auch aus dieser Reihe das vollständige Integral der Differentialgleichung (8.) ableiten können, und es mufs das aus der einen Form erhaltene vollständige Integral das Integral der andern Form umfassen. Es müssen daher in dem Ausdruck $r = \frac{a\varrho+\sqrt{-1}\,b'}{a'+\sqrt{-1}\,b\varrho}$ die Constanten a, b, a', b' immer so bestimmt werden können, dafs

$$\frac{1+2e^{\pi r}+2e^{4\pi r}+2e^{9\pi r}+\text{ etc.}}{\sqrt{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)}} = 2e^{\frac{1}{4}\pi\varrho}+2e^{\frac{9}{4}\pi\varrho}+2e^{\frac{25}{4}\pi\varrho}+\text{ etc.}$$

Die Theorie der elliptischen Transcendenten lehrt, dafs diese Bestimmung auf unendlich viel Arten möglich ist. Es ergiebt sich nämlich aus der Theorie der unendlich vielen Formen der Transcendente Θ *), dafs die vorstehende Gleichung immer gilt, wenn a, b, a', b' positive oder negative ganze Zahlen sind, von denen a, a' und b ungerade sind, und a' und b durch 4 dividirt nicht denselben Rest lassen. *Das Zeichen der den Nenner bildenden Quadratwurzel in der vorstehenden Formel hängt von dem Werthe der in der Theorie der quadratischen Reste mit* $\left(\frac{a'}{b}\right)$ *bezeichneten Gröfse ab.* Ein doppelter Gang der Untersuchung, welchen man einschlagen kann, führt zu dieser Zeichen-

*) Ich habe diese Theorie in mehreren an der Königsberger Universität gehaltnen Vorlesungen umständlich auseinandergesetzt, und behalte mir vor, dieselbe bei einer andern Gelegenheit bekannt zu machen.

bestimmung entweder mittelst einer Kettenbruchentwicklung oder der von *Gaufs* in seiner Abhandlung *Summatio serierum quarundam singularium* betrachteten Summen. Die vorstehende Gleichung wird, wenn a und b ungerade ist, immer gelten, wofern man nur die eine Seite derselben mit einer 8ten Wurzel der Einheit multiplicirt. Wenn von den Zahlen a und b die eine gerade, die andere ungerade ist, hat man die Gleichung

$$\delta\cdot\frac{1+2e^{\pi r}+2e^{4\pi r}+2e^{9\pi r}+\ldots}{\sqrt{(a'+\sqrt{-1}\,b\varrho)}} = 1\pm 2e^{\pi\varrho}+2e^{4\pi\varrho}\pm 2e^{9\pi\varrho}+\ldots,$$

wo δ eine 8te Wurzel der Einheit bedeutet, und das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem von den Zahlen a' und b die eine gerade, die andere ungerade oder beide ungerade sind.

Die vorstehenden Reihenentwicklungen setzen voraus, dafs der reelle Theil der Gröfsen ϱ und r negativ ist. Wenn dies bei ϱ, aber nicht bei der Gröfse r der Fall ist, so kann man die Constanten a und b' mit $\sqrt{-1}$ multipliciren und die Constanten a' und b mit $\sqrt{-1}$ dividiren, wodurch die Bedingung $aa'+bb'=1$ unverändert bleibt, und sich r in $-r$ verwandelt, also der reelle Theil negativ wird. ***Für beliebige reelle Werthe der willkürlichen Constanten a, a', b, b' wird, wenn der reelle Theil von ϱ negativ ist, auch der reelle Theil von r immer negativ sein.*** Setzt man nämlich

$$\varrho = -\varrho_0+\varrho_1\sqrt{-1},$$

so wird

$$\begin{aligned} r &= -\frac{a\varrho_0+(a\varrho_1+b_1)\sqrt{-1}}{a'-b\varrho_1-b\varrho_0\sqrt{-1}} \\ &= -\frac{\varrho_0+\sqrt{-1}\,\{(a'-b\varrho_1)(a\varrho_1+b_1)-ab\varrho_0^2\}}{(a'-b\varrho_1)^2+b^2\varrho_0^2}, \end{aligned}$$

woraus der vorstehende Satz folgt.

5.

Über eine particuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

1.

Es seien x, y, z rechtwinklichte Coordinaten und

$$\varphi(x,y,z)=\varrho,\quad \varphi_1(x,y,z)=\varrho_1,\quad \varphi_2(x,y,z)=\varrho_2$$

die Gleichungen dreier orthogonalen Flächensysteme, in welchen man ϱ, ϱ_1, ϱ_2 als die veränderlichen Parameter betrachtet. Für gegebne Werthe der Coordinaten x, y, z erhalten durch diese Gleichungen die drei Parameter ϱ, ϱ_1, ϱ_2 bestimmte Werthe, und es ist daher für einen gegebnen Punct des Raumes die individuelle Fläche jedes Systems bestimmt, welche durch ihn hindurchgeht. Setzt man

$$\left(\frac{\partial\varrho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho}{\partial z}\right)^2=h^2,$$
$$\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial z}\right)^2=h_1^2,$$
$$\left(\frac{\partial\varrho_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho_2}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varrho_2}{\partial z}\right)^2=h_2^2,$$

und nennt

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\quad \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2$$

die Cosinus der Winkel, welche die an den drei Flächen in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitt errichteten Normalen mit den drei Coordinatenachsen bilden, so hat man

$$1.\quad \begin{cases} h\alpha=\frac{\partial\varrho}{\partial x}, & h\beta=\frac{\partial\varrho}{\partial y}, & h\gamma=\frac{\partial\varrho}{\partial z},\\ h_1\alpha_1=\frac{\partial\varrho_1}{\partial x}, & h_1\beta_1=\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}, & h_1\gamma_1=\frac{\partial\varrho_1}{\partial z},\\ h_2\alpha_2=\frac{\partial\varrho_2}{\partial x}, & h_2\beta_2=\frac{\partial\varrho_2}{\partial y}, & h_2\gamma_2=\frac{\partial\varrho_2}{\partial z}.\end{cases}$$

Da die drei Normalen selber auf einander senkrecht stehen, so haben die 9 Gröfsen α, β, etc. die bekannten Eigenschaften der Coëfficienten der Transformationsformeln zweier rechtwinklichten Coordinatensysteme.

Aus den vorstehenden Formeln folgt für eine beliebige Function V,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \alpha.h\frac{\partial V}{\partial \varrho}+\alpha_1.h_1\frac{\partial V}{\partial \varrho_1}+\alpha_2.h_2\frac{\partial V}{\partial \varrho_2},$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \beta.h\frac{\partial V}{\partial \varrho}+\beta_1.h_1\frac{\partial V}{\partial \varrho_1}+\beta_2.h_2\frac{\partial V}{\partial \varrho_2},$$
$$\frac{\partial V}{\partial z} = \gamma.h\frac{\partial V}{\partial \varrho}+\gamma_1.h_1\frac{\partial V}{\partial \varrho_1}+\gamma_2.h_2\frac{\partial V}{\partial \varrho_2},$$

und daher zufolge der erwähnten Eigenschaften der Gröfsen α, β, etc.

$$2.\quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = h^2\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)^2+h_1^2\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho_1}\right)^2+h_2^2\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho_2}\right)^2.$$

Vermöge der Eigenschaften dieser Gröfsen hat man auch

$$\Sigma\pm\alpha\beta_1\gamma_2 = 1,$$

woraus durch Substitution von (1.) die Formel

$$\Sigma\pm\frac{\partial\varrho}{\partial x}\frac{\partial\varrho_1}{\partial y}\frac{\partial\varrho_2}{\partial z} = hh_1h_2$$

folgt, und daher auch vermittelst einer bekannten Eigenschaft der Determinanten,

$$3.\quad \Sigma\pm\frac{\partial x}{\partial\varrho}\frac{\partial y}{\partial\varrho_1}\frac{\partial z}{\partial\varrho_2} = \frac{1}{hh_1h_2}.$$

Man kann diese Formel auch folgendermafsen ableiten. Aus (1.) ergiebt sich

$$\alpha dx+\beta dy+\gamma dz = \frac{1}{h}d\varrho,$$
$$\alpha_1 dx+\beta_1 dy+\gamma_1 dz = \frac{1}{h_1}d\varrho_1,$$
$$\alpha_2 dx+\beta_2 dy+\gamma_2 dz = \frac{1}{h_2}d\varrho_2,$$

und daraus vermöge der Eigenschaften der Gröfsen α, β, etc.

$$dx = \frac{\alpha}{h}d\varrho+\frac{\alpha_1}{h_1}d\varrho_1+\frac{\alpha_2}{h_2}d\varrho_2,$$
$$dy = \frac{\beta}{h}d\varrho+\frac{\beta_1}{h_1}d\varrho_1+\frac{\beta_2}{h_2}d\varrho_2,$$
$$dz = \frac{\gamma}{h}d\varrho+\frac{\gamma_1}{h_1}d\varrho_1+\frac{\gamma_2}{h_2}d\varrho_2,$$

ferner

$$4.\quad dx^2+dy^2+dz^2 = \frac{1}{h^2}d\varrho^2+\frac{1}{h_1^2}d\varrho_1^2+\frac{1}{h_2^2}d\varrho_2^2.$$

Die ersten drei der vorstehenden Gleichung ergeben

$$5.\quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \varrho}=\frac{\alpha}{h}, & \frac{\partial y}{\partial \varrho}=\frac{\beta}{h}, & \frac{\partial z}{\partial \varrho}=\frac{\gamma}{h}, \\ \frac{\partial x}{\partial \varrho_1}=\frac{\alpha_1}{h_1}, & \frac{\partial y}{\partial \varrho_1}=\frac{\beta_1}{h_1}, & \frac{\partial z}{\partial \varrho_1}=\frac{\gamma_1}{h_1}, \\ \frac{\partial x}{\partial \varrho_2}=\frac{\alpha_2}{h_2}, & \frac{\partial y}{\partial \varrho_2}=\frac{\beta_2}{h_2}, & \frac{\partial z}{\partial \varrho_2}=\frac{\gamma_2}{h_2}, \end{cases}$$

und hieraus folgt, wie oben gefunden worden,

$$\Sigma\pm\frac{\partial x}{\partial \varrho}\frac{\partial y}{\partial \varrho_1}\frac{\partial z}{\partial \varrho_2}=\frac{1}{h h_1 h_2}\Sigma\pm\alpha\beta_1\gamma_2=\frac{1}{h h_1 h_2}.$$

Diese Formel zeigt, dafs das Raumelement $dx\,dy\,dz$, wenn man die Parameter ϱ, ϱ_1, ϱ_2 statt der rechtwinklichten Coordinaten einführt, durch das Element

$$\frac{1}{h h_1 h_2}d\varrho\, d\varrho_1 d\varrho_2$$

ausgedrückt wird, wie sich leicht auch aus geometrischen Betrachtungen ergiebt.

Will man die Gröfsen ϱ, ϱ_1, ϱ_2 statt x, y, z in die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

einführen, so kann man die transformirte partielle Differentialgleichung unmittelbar aus den beiden Formeln (2.) und (3.) erhalten, wie aus den folgenden Betrachtungen erhellt.

2.

Man denke sich ein $n$faches Integral, welches unter dem Integralzeichen eine unbestimmte abhängige Variable nebst ihren partiellen Differentialquotienten beliebiger Ordnung enthält, durch Einführung neuer unabhängiger Variabeln in ein anderes transformirt, und die Variationen der beiden einander gleichen Integrale nach den bekannten Vorschriften durch partielle Integration so reducirt, dafs sich unter den $n$fachen Zeichen nur noch die eine Variation der abhängigen Variable als Factor findet. Die in diese Variation unter den $n$fachen Integralzeichen multiplicirten Ausdrücke müssen einander gleich sein. Wenn man in dieser Gleichung die Elemente, in welche diese Ausdrücke multiplicirt sind, auf einander zurückführt, so erhält man die Transformation der Function, welche sich in der reducirten Variation des gegebnen Integrals unter dem $n$fachen Zeichen findet, und welche immer auf eine viel höhere Ordnung wie die Function steigt, die in dem gegebnen Integral selbst unter dem Zeichen steht. Ist z. B. F eine Function von

$$x,\ y,\ z,\ V,\ \frac{\partial V}{\partial x},\ \frac{\partial V}{\partial y},\ \frac{\partial V}{\partial z},$$

welche sich durch Einführung dreier andern Variabeln u, u_1, u_2 für x, y, z in eine Function von

$$u,\quad u_1,\quad u_2,\quad V,\quad \frac{\partial V}{\partial u},\quad \frac{\partial V}{\partial u_1},\quad \frac{\partial V}{\partial u_2}$$

verwandelt, und setzt man

$$\Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial z}{\partial u_2} = \varDelta,$$

so folgt aus der Gleichung

$$\iiint F\,dx\,dy\,dz = \iiint F\varDelta\,du\,du_1\,du_2$$

durch Reduction der Variation der beiden Integrale die Gleichung

$$\varDelta\left\{\frac{\partial F}{\partial V}-\frac{\partial\cdot\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial V}{\partial x}}}{\partial x}-\frac{\partial\cdot\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial V}{\partial y}}}{\partial y}-\frac{\partial\cdot\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial V}{\partial z}}}{\partial z}\right\}$$

$$=\varDelta\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)-\left(\frac{\partial\cdot\varDelta\left(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial V}{\partial u}}\right)}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial\cdot\varDelta\left(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial V}{\partial u_1}}\right)}{\partial u_1}\right)-\left(\frac{\partial\cdot\varDelta\left(\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial V}{\partial u_2}}\right)}{\partial u_2}\right),$$

wo ich durch die hinzugefügten Klammern angedeutet habe, dafs die zu differentiirenden Gröfsen als Functionen von u, u_1, u_2, V, $\frac{\partial V}{\partial u}$, $\frac{\partial V}{\partial u_1}$, $\frac{\partial V}{\partial u_2}$ angesehen werden. Man dehnt diese zur Transformation der Diffenrentialausdrücke dienende Methode leicht auf die Fälle aus, in welchen sich unter dem Integralzeichen mehrere abhängige Variabeln mit ihren Differentialquotienten befinden. Sie bietet den doppelten Vortheil, beschwerliche Rechnungen zu ersparen, und die Resultate in einer bequemen Form zu geben.

Setzt man in dem vorstehenden Beispiele

$$F=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

und verwandelt sich dieser Ausdruck durch Einführung neuer Variabeln u, u_1, u_2 in

$$E\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2+E_1\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)^2+E_2\left(\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)^2$$

$$+2e\frac{\partial V}{\partial u_1}\frac{\partial V}{\partial u_2}+2e_1\frac{\partial V}{\partial u_2}\frac{\partial V}{\partial u}+2e_2\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial u_1}$$

$$=\left(\frac{\partial V}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y^2}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

und ist ferner, wie im Vorhergehenden,

$$\Sigma\pm\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial z}{\partial u_2} = \Delta,$$

so giebt die obige allgemeine Formel,

$$1.\qquad \Delta\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right\}$$

$$= \frac{\partial\cdot\Delta\left\{E\frac{\partial V}{\partial u}+e_2\frac{\partial V}{\partial u_1}+e_1\frac{\partial V}{\partial u}\right\}}{\partial u}$$

$$+\frac{\partial\cdot\Delta\left\{e_2\frac{\partial V}{\partial u}+E_1\frac{\partial V}{\partial u_1}+e\frac{\partial V}{\partial u_2}\right\}}{\partial u_1}$$

$$+\frac{\partial\cdot\Delta\left\{e_1\frac{\partial V}{\partial u}+e\frac{\partial V}{\partial u_1}+E_2\frac{\partial V}{\partial u_2}\right\}}{\partial u_2}.$$

Wird insbesondere

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = E\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2+E_1\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)^2+E_2\left(\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)^2,$$

so erhält man

$$2.\qquad \Delta\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right\} = \frac{\partial\cdot\Delta E\frac{\partial V}{\partial u}}{\partial u}+\frac{\partial\cdot\Delta E_1\frac{\partial V}{\partial u_1}}{\partial u_1}+\frac{\partial\cdot\Delta E_2\frac{\partial V}{\partial u_2}}{\partial u_2}.$$

Nimmt man für die neuen Variabeln die Parameter ϱ, ϱ_1, ϱ_2, so wird man zufolge dieser Formel aus den Gleichungen (2.) und (3.) des vorigen Paragraphen,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = h^2\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)^2+h_1^2\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho_1}\right)^2+h_2^2\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho_2}\right)^2,$$

$$\Sigma\pm\frac{\partial x}{\partial \varrho}\frac{\partial y}{\partial \varrho_1}\frac{\partial z}{\partial \varrho_2} = \Delta = \frac{1}{h h_1 h_2},$$

unmittelbar auch die folgende erhalten:

$$3.\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$= h h_1 h_2\left\{\frac{\partial\cdot\frac{h}{h_1 h_2}\frac{\partial V}{\partial \varrho}}{\partial \varrho}+\frac{\partial\cdot\frac{h_1}{h_2 h}\frac{\partial V}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1}+\frac{\partial\cdot\frac{h_2}{h h_1}\frac{\partial V}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2}\right\}.$$

Die vorgelegte partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

verwandelt sich daher durch Einführung der Parameter $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$ statt der rechtwinklichten Coordinaten x, y, z in die Gleichung

$$4.\quad \frac{\partial\cdot\frac{h}{h_1 h_2}\cdot\frac{\partial V}{\partial\varrho}}{\partial\varrho}+\frac{\partial\cdot\frac{h_1}{h_2 h}\cdot\frac{\partial V}{\partial\varrho_1}}{\partial\varrho_1}+\frac{\partial\cdot\frac{h_2}{h h_1}\cdot\frac{\partial V}{\partial\varrho_2}}{\partial\varrho_2}=0,$$

welche von Herrn *Lamé* im 23ten Hefte des Pariser Polytechnischen Journals gegeben ist. Setzt man in (3.) für V eine Function von ϱ,

$$V=f(\varrho),\quad \text{und}\quad \frac{\partial f(\varrho)}{\partial\varrho}=f'(\varrho),$$

so erhält man

$$\frac{\partial^2 f(\varrho)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(\varrho)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f(\varrho)}{\partial z^2}=h h_1 h_2\frac{\partial\cdot\frac{h}{h_1 h_2}f'(\varrho)}{\partial\varrho}.$$

Setzt man $f(\varrho)=\varrho$, so folgt hieraus

$$\frac{\partial^2\varrho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial z^2}=h^2\frac{\partial\log\frac{h}{h_1 h_2}}{\partial\varrho},$$

welche Formel Herr *Lamé* ebendaselbst S. 222 gegeben hat. — Wenn der Coëfficient ΔE in (2.) von u unabhängig ist, so giebt diese Formel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

so dafs also, wenn ΔE von u unabhängig ist, $V=u$ eine Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung ist.

Ich will bei dieser Gelegenheit noch bemerken, dafs man die Transformation des Ausdrucks

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

so wie den Werth von Δ, immer aus der Transformation des Ausdrucks $dx^2+dy^2+dz^2$ erhalten kann. Hat man nämlich für irgend welche neue Variabeln u, u_1, u_2,

$$dx^2+dy^2+dz^2$$
$$=A du^2+B du_1^2+C du_2^2+2a du_1 du_2+2b du_2 du+2c du du_1,$$

so wird

$$\Delta^2=\left\{\Sigma\pm\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial z}{\partial u_2}\right\}^2=ABC-Aa^2-Bb^2-Cc^2+2abc$$

und

$$\Delta^2\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\}$$
$$=(BC-a^2)\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2+(CA-b^2)\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)^2+(AB-c^2)\left(\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)^2$$
$$+2(bc-aA)\frac{\partial V}{\partial u_1}\frac{\partial V}{\partial u_2}+2(ca-BC)\frac{\partial V}{\partial u_2}\frac{\partial V}{\partial u}+2(ab-cC)\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial u_1}.$$

Diese Formel in Verbindung mit der Formel (1.) zeigt,

dafs der transformirte Ausdruck des Quadrates des Linienelementes $dx^2+dy^2+dz^2$ allein hinreicht, um sogleich die Transformation der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$ zu erhalten.

Ist insbesondere

$$dx^2+dy^2+dz^2 = A\,du^2+A_1\,du_1^2+A_2\,du_2^2,$$

so erhält man

$$\Delta=\sqrt{(\Delta A_1 A_2)},\quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2=\frac{1}{A}\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)^2+\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)^2,$$

und die transformirte partielle Differentialgleichung wird

$$\frac{\partial\cdot\sqrt{\frac{A_1A_2}{A}}\frac{\partial V}{\partial u}}{\partial u}+\frac{\partial\cdot\sqrt{\frac{A_2A}{A_1}}\frac{\partial V}{\partial u_1}}{\partial u_1}+\frac{\partial\cdot\sqrt{\frac{AA_1}{A_2}}\frac{\partial V}{\partial u_2}}{\partial u_2}=0.$$

Die Zeichen der Wurzelgröfsen sind hier aus einem derselben dadurch bestimmt, dafs sich die Wurzelgröfsen wie $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{A_1}$, $\frac{1}{A_2}$ verhalten müssen.

Durch Einführung von Polarcoordinaten statt der rechtwinklichten erhält man, indem man

$$x=u\cos u_1,\qquad y=u\sin u_1\cos u_2,\qquad z=u\sin u_1\sin u_2$$

setzt,

$$dx^2+dy^2+dz^2 = du^2+u^2du_1^2+u^2\sin u_1^2du_2^2;$$

es wird daher für diesen Fall $A=1$, $A_1=u^2$, $A_2=u^2\sin u_1^2$, also

$$\sqrt{\frac{A_1A_2}{A}}=u^2\sin u_1,\quad \sqrt{\frac{A_2A}{A_1}}=\sin u_1,\quad \sqrt{\frac{AA_1}{A_2}}=\frac{1}{\sin u_1},$$

und daher die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

durch Einführung der Polarcoordinaten in die folgende:

$$\sin u_1\frac{\partial\cdot\frac{u^2\partial V}{\partial u}}{\partial u}+\frac{\partial\cdot\sin u_1\frac{\partial V}{\partial u_1}}{\partial u_1}+\frac{1}{\sin u_1}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2}=0,$$

transformirt, welches die bekannte von *Laplace* aufgestellte Gleichung ist.

Um dieselben Formeln auf den Fall anzuwenden, wenn man statt der rechtwinklichten Coordinaten x, y, z die sogenannten *elliptischen* einführt, will ich die bekannten auf diese bezüglichen Relationen in der Kürze ableiten.

3.

Die für die Zerfällung rationaler Brüche in Partialbrüche bekannten Formeln ergeben die Gleichung

$$1.\quad \frac{(\lambda-\varrho^2)(\lambda-\varrho_1^2)(\lambda-\varrho_2^2)}{\lambda(\lambda-b^2)(\lambda-c^2)} = 1-\frac{x^2}{\lambda}-\frac{y^2}{\lambda-b^2}-\frac{z^2}{\lambda-c^2},$$

wenn man

$$2.\quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{\varrho^2\varrho_1^2\varrho_2^2}{b^2c^2}, \\ y^2 = \dfrac{(\varrho^2-b^2)(\varrho_1^2-b^2)(\varrho_2^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}, \\ z^2 = \dfrac{(\varrho^2-c^2)(\varrho_1^2-c^2)(\varrho_2^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)} \end{cases}$$

setzt. Es seien b, c und ϱ, ϱ_1, ϱ_2 positiv, ferner

$$c > b,$$

so werden die Gröfsen x, y, z immer reell, wenn

$$\varrho > c, \quad c > \varrho_1 > b, \quad b > \varrho_2,$$

und umgekehrt, wenn die Gröfsen x, y, z reell sind, kommen die Gröfsen ϱ, ϱ_1, ϱ_2 in den angegebnen Intervallen zu liegen. Die Formel (1.) zeigt nämlich, dafs die cubische Gleichung

$$3.\quad 1 = \frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-b^2}+\frac{z^2}{\lambda-c^2},$$

durch welche λ bestimmt wird, die Gröfsen ϱ^2, ϱ_1^2, ϱ_2^2 zu Wurzeln hat, und es folgt aus bekannten Principien der Theorie der Gleichungen, dafs, wenn x^2, y^2, z^2 reelle positive Gröfsen sind, die Wurzeln der Gleichung (3.) immer in den angegebnen Intervallen liegen.

Die drei Gleichungen

$$4.\quad \begin{cases} 1 = \dfrac{x^2}{\varrho^2}+\dfrac{y^2}{\varrho^2-b^2}+\dfrac{z^2}{\varrho^2-c^2}, \\ 1 = \dfrac{x^2}{\varrho_1^2}+\dfrac{y^2}{\varrho_1^2-b^2}+\dfrac{z^2}{\varrho_1^2-c^2}, \\ 1 = \dfrac{x^2}{\varrho_2^2}+\dfrac{y^2}{\varrho_2^2-b^2}+\dfrac{z^2}{\varrho_2^2-c^2} \end{cases}$$

geben, wenn man den Parametern ϱ, ϱ_1, ϱ_2 alle ihre in den angegebnen Intervallen

befindlichen Werthe beilegt, alle möglichen Ellipsoïde und ein- und zweiflächigen Hyperboloïde, in denen die Hauptschnitte dieselben Brennpuncte haben, die xy- und xz Schnitte die Puncte der x Achse, die um b und c, die yz Schnitte, die Puncte der y Achse, die um $\sqrt{(c^2-b^2)}$ vom Mittelpunct entfernt sind.

Da man die identische Gleichung $\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{b^2(b^2-c^2)}+\frac{1}{c^2(c^2-b^2)}=0$ hat, so folgt aus den Formeln (2.),

$$5.\quad\begin{cases}\frac{x^2}{\varrho_1^2\varrho_2^2}+\frac{y^2}{(\varrho_1^2-b^2)(\varrho_2^2-b^2)}+\frac{z^2}{(\varrho_1^2-c^2)(\varrho_2^2-c^2)}=0,\\ \frac{x^2}{\varrho_2^2\varrho^2}+\frac{y^2}{(\varrho_2^2-b^2)(\varrho^2-b^2)}+\frac{z^2}{(\varrho_2^2-c^2)(\varrho^2-c^2)}=0,\\ \frac{x^2}{\varrho^2\varrho_1^2}+\frac{y^2}{(\varrho^2-b^2)(\varrho_1^2-b^2)}+\frac{z^2}{(\varrho^2-c^2)(\varrho_1^2-c^2)}=0.\end{cases}$$

Diese Formeln, welche sich auch ergeben, wenn man je zwei der Formeln (4.) von einander abzieht, zeigen, dafs die drei Flächensysteme orthogonal sind. Wenn man die Gleichung (1.) nach λ differentiirt, und hierauf dieser Gröfse nach einander die Werthe ϱ^2, ϱ_1^2, ϱ_2^2 beilegt, so erhält man

$$6.\quad\begin{cases}\frac{(\varrho^2-\varrho_1^2)(\varrho^2-\varrho_2^2)}{\varrho^2(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)}=\frac{x^2}{\varrho^4}+\frac{y^2}{(\varrho^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\varrho^2-c^2)^2},\\ \frac{(\varrho_1^2-\varrho^2)(\varrho_1^2-\varrho_2^2)}{\varrho_1^2(\varrho_1^2-b^2)(\varrho_1^2-c^2)}=\frac{x^2}{\varrho_1^4}+\frac{y^2}{(\varrho_1^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\varrho_1^2-c^2)^2},\\ \frac{(\varrho_2^2-\varrho^2)(\varrho_2^2-\varrho_1^2)}{\varrho_2^2(\varrho_2^2-b^2)(\varrho_2^2-c^2)}=\frac{x^2}{\varrho_2^4}+\frac{y^2}{(\varrho_2^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\varrho_2^2-c^2)^2}.\end{cases}$$

Nimmt man von den Gleichungen (2.) die Logarithmen und differentiirt, so erhält man

$$7.\quad\begin{cases}dx=\frac{x\varrho}{\varrho^2}d\varrho+\frac{x\varrho_1}{\varrho_1^2}d\varrho_1+\frac{x\varrho_2}{\varrho_2^2}d\varrho_2,\\ dy=\frac{y\varrho}{\varrho^2-b^2}d\varrho+\frac{y\varrho_1}{\varrho_1^2-b^2}d\varrho_1+\frac{y\varrho_2}{\varrho_2^2-b^2}d\varrho_2,\\ dz=\frac{z\varrho}{\varrho^2-c^2}d\varrho+\frac{z\varrho_1}{\varrho_1^2-c^2}d\varrho_1+\frac{z\varrho_2}{\varrho_2^2-c^2}d\varrho_2,\end{cases}$$

und daher, vermöge (5.) und (6.),

$$dx^2+dy^2+dz^2$$
$$=\frac{(\varrho^2-\varrho_1^2)(\varrho^2-\varrho_2^2)}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)}d\varrho^2+\frac{(\varrho_1^2-\varrho_2^2)(\varrho_1^2-\varrho^2)}{(\varrho_1^2-b^2)(\varrho_1^2-c^2)}d\varrho_1^2+\frac{(\varrho_2^2-\varrho^2)(\varrho_2^2-\varrho_1^2)}{(\varrho_2^2-b^2)(\varrho_2^2-c^2)}d\varrho_2^2.$$

Bestimmt man respective ϱ, ϱ_1, ϱ_2 als Functionen von u, u_1, u_2 mittelst der Gleichungen

$$8.\quad \begin{cases} \dfrac{d\varrho}{\sqrt{((\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2))}} = du, \\ \dfrac{d\varrho_1}{\sqrt{(-(\varrho_1^2-b^2)(\varrho_1^2-c^2))}} = du_1, \\ \dfrac{d\varrho_2}{\sqrt{((\varrho_2^2-b^2)(\varrho_2^2-c^2))}} = du_2, \end{cases}$$

so verwandelt sich diese Gleichung in die folgende,

$$9.\quad dx^2+dy^2+dz^2 = A\,du^2+A_1\,du_1^2+A_2\,du_2^2,$$

wo

$$10.\quad \begin{cases} A = (\varrho^2-\varrho_1^2)(\varrho^2-\varrho_2^2), \\ -A_1 = (\varrho_1^2-\varrho_2^2)(\varrho_1^2-\varrho^2), \\ A_2 = (\varrho_2^2-\varrho^2)(\varrho_2^2-\varrho_1^2), \end{cases}$$

und daher

$$\Delta = \sqrt{(AA_1A_2)} = (\varrho_1^2-\varrho_2^2)(\varrho^2-\varrho_1^2)(\varrho^2-\varrho_2^2).$$

Man erhält aus (8.) zufolge der im vorigen Paragraphen gegebnen allgemeinen Regel.

$$11.\quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial V}{\partial u_1}\right)^2+\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial V}{\partial u_2}\right)^2,$$

und die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$ wird, wenn man die Gröfsen u, u_1, u_2 als unabhängige Variabeln einführt,

$$\frac{\partial\cdot\frac{\sqrt{(AA_1A_2)}}{A}\frac{\partial V}{\partial u}}{\partial u}+\frac{\partial\cdot\frac{\sqrt{(AA_1A_2)}}{A_1}\frac{\partial V}{\partial u_1}}{\partial u_1}+\frac{\partial\cdot\frac{\sqrt{(AA_1A_2)}}{A_1}\frac{\partial V}{\partial u_2}}{\partial u_2} = 0,$$

oder, wenn man die obigen Werthe von A, A_1, A_2 substituirt,

$$12.\quad (\varrho_1^2-\varrho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+(\varrho^2-\varrho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2}+(\varrho^2-\varrho_1^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2} = 0,$$

welches die elegante von Herrn *Lamé* gegebne Transformation ist. Die Gleichung (12.) ergiebt sich auch aus der allgemeinen Formel (3.) des vorigen Paragraphen, wenn man bemerkt, dafs die im §. 1. eingeführten Gröfsen h, h_1, h_2 die Werthe

$$13.\quad h = \frac{1}{\sqrt{A}}\frac{d\varrho}{du},\quad h_1 = \frac{1}{\sqrt{A_1}}\frac{d\varrho_1}{du_1},\quad h_2 = \frac{1}{\sqrt{A_2}}\frac{d\varrho_2}{du_2}$$

annehmen, welche sich aus Vergleichung der Formel (11.) mit der Formel (2.) §. 1. ergeben.

Zufolge der allgemeinen Formel (2.) des vorigen Paragraphen wird für eine beliebige Function V der linke Theil der Gleichung (12.)

$$(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+(\varrho^2-\varrho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2}+(\varrho^2-\varrho_1^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2}$$

$$=(\varrho_1^2-\varrho_2^2)(\varrho^2-\varrho_1^2)(\varrho^2-\varrho_2^2)\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right\}.$$

Ist V eine Function der einen Gröfse ϱ, $V=f(\varrho)$, so folgt hieraus

$$\frac{\partial^2 f(\varrho)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(\varrho)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f(\varrho)}{\partial z^2}=\frac{1}{(\varrho^2-\varrho_1^2)(\varrho^2-\varrho_2^2)}\frac{d^2 f(\varrho)}{du^2},$$

welche Formel mehrerer merkwürdiger Anwendungen fähig ist.

4.

Der partiellen Differentialgleichung

$$(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+(\varrho^2-\varrho_2^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2}+(\varrho^2-\varrho_1^2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2}=0$$

geschieht durch einen Ausdruck von der Form

$$f(u+u_1\sqrt{-1}+u_2)+f_1(u+u_1\sqrt{-1}-u_2)$$
$$+f_2(u-u_1\sqrt{-1}+u_2)+f_3(u-u_1\sqrt{-1}-u_2)=V$$

Genüge, wo f, f_1, f_2, f_3 vier willkürliche Functionen sind. Es kann aber niemals eine allgemeine Lösung aus dieser particulären zusammengesetzt werden, weil dieselbe jeder partiellen Differentialgleichung von der Form

$$(U_1-U_2)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+(U-U_2)\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2}+(U-U_1)\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2}=0$$

angehört, die Gröfsen U, U_1, U_2 mögen Functionen der drei Gröfsen u, u_1, u_2 sein, welche sie wollen.

Vermittelst der Theorie der elliptischen Functionen oder des *Abel*schen Lehrsatzes kann man die willkürlichen Functionen f etc. in andere verwandeln, deren Argumente algebraische Functionen von x, y, z sind. Es sei

1. $(\lambda^2+m\lambda+n)^2-p^2\lambda(\lambda-b^2)(\lambda-c^2)=(\lambda-\varrho^2)(\lambda-\varrho_1^2)(\lambda-\varrho_2^2)(\lambda-\sigma^2)$.

Sieht man in dieser Gleichung die Gröfsen ϱ, ϱ_1, ϱ_2 als Veränderliche an, so werden m, n, p, σ Functionen derselben. Zwischen der letzten dieser Gröfsen und ϱ, ϱ_1, ϱ_2 hat man in Folge des *Abel*schen Theorems die Differentialgleichung

$$\frac{d\varrho}{\sqrt{\{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)\}}}\pm\frac{d\varrho_1}{\sqrt{\{(\varrho_1^2-b^2)(\varrho_1^2-c^2)\}}}\pm\frac{d\varrho_2}{\sqrt{\{(\varrho_2^2-b^2)(\varrho_2^2-c^2)\}}}$$
$$=\frac{d\sigma}{\sqrt{\{(\sigma^2-b^2)(\sigma^2-c^2)\}}}.$$

Der linke Theil dieser Gleichung ist zufolge (8.) des vorigen Paragraphen $du \pm du_1\sqrt{-1} \pm du_2$, woraus hervorgeht, dafs die particuläre Lösung $V = f(u \pm u_1\sqrt{-1} \pm u_2)$ auch durch

$$V = f(\sigma)$$

dargestellt werden kann. Je nach den vier Werthen von σ, welche den verschiedenen Zeichen der Quadratwurzeln entsprechen, erhält man vier solcher Lösungen, welche man durch Addition mit einander verbinden kann.

Die Werthe, welche der Ausdruck $\lambda^2+m\lambda+n$ für $\lambda = 0,\ b^2,\ c^2$ annimmt, sind zufolge (1.):

$$\rho\rho_1\rho_2\sigma, \quad \sqrt{\{(b^2-\rho^2)(b^2-\rho_1^2)(b^2-\rho)\}}\cdot\sqrt{(b^2-\sigma^2)},$$
$$\sqrt{\{(c^2-\rho^2)(c^2-\rho_1^2)(c^2-\rho_2^2)\}}\cdot\sqrt{(c^2-\sigma^2)},$$

oder nach den zu Anfang des §. 3. gegebnen Formeln,

$$bc\cdot x\sigma, \quad b\sqrt{(b^2-c^2)}\cdot y\sqrt{(b^2-\sigma^2)}, \quad c\sqrt{(c^2-b^2)}\cdot z\sqrt{(c^2-\sigma^2)}.$$

Man erhält daher durch Zerfällung in Partialbrüche,

$$2.\quad \frac{\lambda^2+m\lambda+n}{\lambda(\lambda-b^2)(\lambda-c^2)} = \frac{x\sigma\sqrt{-1}}{bc}\cdot\frac{1}{\lambda}+\frac{y\sqrt{(b^2-\sigma^2)}}{b\sqrt{(b^2-c^2)}}\cdot\frac{1}{\lambda-b^2}+\frac{z\sqrt{(c^2-\sigma^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}\cdot\frac{1}{\lambda-c^2}.$$

Entwickelt man beide Seiten dieser Gleichung nach den absteigenden Potenzen von λ, so erhält man durch Vergleichung der Coëfficienten von $\frac{1}{\lambda}$:

$$3.\quad 1 = \frac{x\sigma\sqrt{-1}}{bc}+\frac{y\sqrt{(\sigma^2-b^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}}+\frac{z\sqrt{(c^2-\sigma^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}},$$

Es ergiebt sich hieraus der Satz:

wird die Gröfse σ durch x, y, z mittelst der Gleichung

$$1 = \sqrt{-1}\,\frac{x\sigma}{bc}+\frac{y\sqrt{(\sigma^2-b^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}}+\frac{z\sqrt{(c^2-\sigma^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}$$

bestimmt, in welcher b und c beliebige Constanten bedeuten, so genügt jede Function dieser Gröfse,

$$V = f(\sigma),$$

der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Man kann dieses Resultat auch auf folgende Art erhalten und verallgemeinern.

5.

Damit es erlaubt sei, in der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

für V eine willkürliche Function einer Gröfse σ zu setzen, mufs nicht nur die Gleichung

$$1.\quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}=0,$$

sondern auch die Gleichung

$$2.\quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right)^2=0$$

Statt finden, und umgekehrt kann man, so oft die Function σ beide Gleichungen erfüllt, für V eine beliebige Function von σ setzen. Ein Corollar dieses Satzes ist, *dafs kein Ausdruck σ, von dem jede beliebige Function der Gleichung*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

genügt, reell sein kann.

Bezeichnet man die zwischen der Gröfse σ und x, y, z Statt findende Gleichung durch

$$\Pi(x, y, z, \sigma)=0,$$

so wird

$$3.\quad \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial x}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x},\quad \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial y}=-\frac{\partial \Pi}{\partial y},\quad \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial z}=-\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Es erfordert daher die Gleichung (2.), dafs auch

$$4.\quad \left\{\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right\}^2+\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right\}^2+\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right\}^2=0$$

sei. Differentiirt man die Gleichungen (3.) respective nach x, y, z, und addirt, so verschwindet wegen (2.) der in $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma^2}$ multiplicirte Ausdruck, und man erhält

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}\left\{\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}\right\}$$

$$=-2\left\{\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma \partial x}\frac{\partial \sigma}{\partial x}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma \partial y}\frac{\partial \sigma}{\partial y}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \sigma \partial z}\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right\}-\left\{\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}\right\}.$$

Der erste Theil des Ausdrucks rechts vom Gleichheitszeichen reducirt sich aber, wenn man ihn mit $\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}$ multiplicirt und die Werthe (3.) substituirt, auf das nach σ

genommne partielle Differential des Ausdrucks

$$\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right\}^2+\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right\}^2+\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right\}^2.$$

Ist daher die Function Π so beschaffen, dafs die Gleichung (4.) *identisch* erfüllt wird, so verschwindet dieser Theil und man erhält

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}\left\{\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}\right\} = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}.$$

Umgekehrt hat man die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right)^2 = 0, \qquad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} = 0,$$

wenn σ als Function von x, y, z durch die Gleichung $\Pi = 0$ bestimmt wird, und die beiden Gleichungen

$$5. \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)^2 = 0, \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = 0, \end{cases}$$

und zwar die erste *identisch*, Statt finden. Man hat daher den Satz:

Wenn eine Gröfse σ als Function von x, y, z durch die Gleichung $\Pi = 0$ bestimmt wird, in welcher die Function Π der partiellen Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)^2 = 0,$$

Genüge leistet, und man aufserdem

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = 0$$

hat, so ist eine willkürliche Function der Gröfse σ,

$$V = f(\sigma)$$

eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Wenn Π in Bezug auf x, y, z lineär ist, so findet die zweite der Bedingungsgleichungen (5.) von selber Statt. Man findet daher in diesem Falle als Corollar des vorstehenden Satzes den folgenden:

Wird eine Gröfse σ als Function von x, y, z durch die Gleichung

$$Ax+By+Cz-1 = 0$$

bestimmt, in welcher A, B, C beliebige Functionen von σ bedeuten,

welche der Gleichung

$$A^2+B^2+C^2 = 0$$

Genüge leisten, so ist jede Function von σ,

$$V = f(\sigma)$$

eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Der oben mit Hülfe des *Abel*schen Theorems gefundene Satz 3. §. 4. ist ein specieller Fall des vorstehenden. In der That findet für

$$A = \frac{\sigma\sqrt{-1}}{bc},\quad B = \frac{\sqrt{(\sigma^2-b^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}},\quad C = \frac{\sqrt{(c^2-\sigma^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}$$

die Gleichung $A^2+B^2+C^2=0$ Statt. Man sieht aber aus dem vorstehenden allgemeinern, dafs man in (3.) §. 4. links vom Gleichheitszeichen statt 1 eine beliebige Function von σ setzen kann. Man sieht leicht, dafs derselbe für jede Zahl Variabeln gilt. Für $n=2$ erhält man auf diese Weise die bekannte allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0;$$

denn es folgt in diesem Falle aus der Gleichung $Ax+By=1$, in welcher $A^2+B^2=0$, dafs $\frac{1}{A}=x+y\sqrt{-1}$; es wird daher σ, als Function von A, eine Function derselben Gröfse, und man kann daher für V eine beliebige Function von $x+y\sqrt{-1}$ setzen.

6.

Eine Function V, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

genügt, ist bestimmt, wenn sie auf allen Puncten zweier von den §. 3. betrachteten confocalen Ellipsoïden gegebne Werthe annimmt. Ich will jetzt untersuchen, wie diese Werthe beschaffen sein müssen, damit der allgemeine Werth von V die im §. 4. angegebne Form

$$f(u+u_1\sqrt{-1}+u_2)+f_1(u+u_1\sqrt{-1}-u_2)$$
$$+f_2(u-u_1\sqrt{-1}+u_2)+f_3(u-u_1\sqrt{-1}-u_2) = V$$

erhält, wo die Gröfsen u, u_1, u_2 durch die Gleichungen des §. 3. mit den rechtwinklichten Coordinaten x, y, z verbunden sind.

Den gegebnen confocalen Ellipsoïden entsprechen constante Werthe von ϱ, die ich mit ϱ^0 und ϱ^1 bezeichne, und daher auch constante Werthe von u, die ich entsprechend u^0 und u^1 nennen will, so wie V^0 und V^1 die entsprechenden Werthe der Function V sein sollen. Setzt man daher

$$\begin{aligned} f(u^0+u_1\sqrt{-1}+u_2)+f_3(u^0-u_1\sqrt{-1}-u_2) &= \varphi(u_1\sqrt{-1}+u_2),\\ f(u^1+u_1\sqrt{-1}+u_2)+f_3(u^1-u_1\sqrt{-1}-u_2) &= \varphi_1(u_1\sqrt{-1}+u_2),\\ f_1(u^0+u_1\sqrt{-1}-u_2)+f_2(u^0-u_1\sqrt{-1}+u_2) &= \psi(u_1\sqrt{-1}-u_2),\\ f_1(u^1+u_1\sqrt{-1}-u_2)+f_2(u^1-u_1\sqrt{-1}+u_2) &= \psi_1(u_1\sqrt{-1}-u_2),\end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} V^0 &= \varphi(u_1\sqrt{-1}+u_2)+\psi(u_1\sqrt{-1}-u_2),\\ V^1 &= \varphi_1(u_1\sqrt{-1}+u_2)+\psi_1(u_1\sqrt{-1}-u_2).\end{aligned}$$

In diesen Formeln ist

$$\sqrt{-1}\,du_1 = \frac{d\varrho_1}{\sqrt{((\varrho_1^2-b^2)(\varrho_1^2-c^2))}},\qquad du_2 = \frac{d\varrho_2}{\sqrt{((\varrho_2^2-b^2)(\varrho_2^2-c^2))}}.$$

Setzt man

$$1.\qquad \lambda(\lambda+m)^2-n^2(\lambda-b^2)(\lambda-c^2) = (\lambda-\varrho_1^2)(\lambda-\varrho_2^2)(\lambda-\tau),$$

so wird zufolge des *Abel*schen Theorems,

$$\frac{d\tau}{\sqrt{((\tau^2-b^2)(\tau^2-c^2))}} = \sqrt{-1}\,du_1 \pm du_2.$$

Es werden also die beiden der Gleichung (1.) genügenden Werthe von τ, die ich τ_1 und τ_2 nennen will, respective Functionen von $u_1\sqrt{-1}+u_2$ und $u_1\sqrt{-1}-u_2$, und es erhält daher jede von den Functionen V^0 und V^1 die Form

$$\Pi_1(\tau_1)+\Pi_2(\tau_2),$$

wo Π_1 und Π_2 beliebige Functionen sein können.

Aus (1.) folgt, wenn man der Gröfse λ die Werthe b^2, c^2 beilegt,

$$\begin{aligned} b(b^2+m) &= \sqrt{((b^2-\varrho_1^2)(b^2-\varrho_2^2)(b^2-\tau))},\\ c(c^2+m) &= \sqrt{((c^2-\varrho_1^2)(c^2-\varrho_2^2)(c^2-\tau))},\end{aligned}$$

oder zufolge der Formeln (2.) §. 3.:

$$\begin{aligned} \frac{b^2+m}{b^2-c^2} &= \frac{y}{\sqrt{(\varrho^2-b^2)}}\,\frac{\sqrt{(b^2-\tau)}}{\sqrt{(b^2-c^2)}},\\ \frac{c^2+m}{c^2-b^2} &= \frac{z}{\sqrt{(\varrho^2-c^2)}}\,\frac{\sqrt{(c^2-\tau)}}{\sqrt{(c^2-b^2)}}.\end{aligned}$$

Die Addition dieser beiden Formeln ergiebt

$$1 = \frac{y}{\sqrt{(\varrho^2-b^2)}}\sqrt{\frac{b^2-\tau}{b^2-c^2}}+\frac{z}{\sqrt{(\varrho^2-c^2)}}\sqrt{\frac{c^2-\tau}{c^2-b^2}}.$$

In diesen Formeln sind ϱ, $\sqrt{(\varrho^2-b^2)}$, $\sqrt{(\varrho^2-c^2)}$ die halben Hauptachsen des Ellipsoïds. Man kann daher

$$\frac{x}{\varrho}=\sin\eta,\qquad \frac{y}{\sqrt{(\varrho^2-b^2)}}=\cos\eta\cos\vartheta,\qquad \frac{z}{\sqrt{(\varrho^2-c^2)}}=\cos\eta\sin\vartheta$$

setzen. Setzt man ferner

$$\tau = b^2\sin^2 t+c^2\cos^2 t,$$

wodurch

$$\sqrt{\frac{b^2-\tau}{b^2-c^2}}=\cos t,\qquad \sqrt{\frac{c^2-\tau}{c^2-b^2}}=\sin t,$$

so verwandelt sich die Gleichung, durch welche τ bestimmt worden, wenn man die verschiednen Zeichen der Wurzelgröfsen berücksichtigt, in

$$1 = \cos\eta\cos(t\pm\vartheta),$$

woraus

$$\cos(t\pm\vartheta)=\frac{1}{\cos\eta},\qquad \pm\sqrt{-1}\sin(t\pm\vartheta)=\frac{\sin\eta}{\cos\eta},$$

$$\pm\sqrt{-1}(t\pm\vartheta)=\log\frac{1+\sin\eta}{\cos\eta}$$

folgt. Hieraus ergeben sich die vier Werthe von t,

$$t=\pm\vartheta\pm\sqrt{-1}\log\frac{1+\sin\eta}{\cos\eta},$$

von denen jedoch je zwei, die einander entgegengesetzt sind, hier nur für einen zu rechnen sind. Nennt man t_1 und t_2 zwei nicht blofs einander entgegengesetzte Werthe von t, so kann die hier betrachtete besondere Form, welche die Function V für $\varrho=\varrho^0$ und $\varrho=\varrho^1$ annehmen soll, $V=\Pi_1(\tau_1)+\Pi_2(\tau_2)$, auch durch

$$V=\Pi_1(t_1)+\Pi_2(t_2)$$

dargestellt werden, da eine beliebige Function von τ auch eine beliebige Function von t ist. Man hat daher den Satz:

Wenn auf den beiden gegebnen confocalen Ellipsoïden,

$$\frac{x^2}{\varrho^{02}}+\frac{y^2}{\varrho^{02}-b^2}+\frac{z^2}{\varrho^{02}-c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\varrho^{12}}+\frac{y^2}{\varrho^{12}-b^2}+\frac{z^2}{\varrho^{12}-c^2}=1,$$

die Coordinaten der Puncte durch zwei Winkel η und ϑ mittelst der Formeln

$$x=\varrho^0\sin\eta,\qquad y=\sqrt{(\varrho^{02}-b^2)}\cos\eta\cos\vartheta,\qquad z=\sqrt{(\varrho^{02}-c^2)}\cos\eta\sin\vartheta,$$

$$x=\varrho^1\sin\eta,\qquad y=\sqrt{(\varrho^{12}-b^2)}\cos\eta\cos\vartheta,\qquad z=\sqrt{(\varrho^{12}-c^2)}\cos\eta\sin\vartheta$$

ausgedrückt werden, und die diesen Puncten entsprechenden Werthe einer Function V, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

genügt, für jedes der beiden Ellipsoïde die Form

$$\Pi\left(\vartheta+\sqrt{-1}\log\frac{1+\sin\eta}{\cos\eta}\right)+\Pi_1\left(\vartheta-\sqrt{-1}\log\frac{1+\sin\eta}{\cos\eta}\right)$$

annehmen, so erhält der allgemeine Werth von V die Form

$$V=F_1(\sigma_1)+F_2(\sigma_2)+F_3(\sigma_3)+F_4(\sigma_4),$$

wo F_1, F_2, F_3, F_4 willkürliche Functionen und σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2, σ_4^2 die vier Wurzeln der Gleichung

$$1=\sqrt{-1}\cdot\frac{x\sigma}{bc}+\frac{y\sqrt{(\sigma^2-b^2)}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}}+\frac{z\sqrt{(c^2-\sigma^2)}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}$$

sind.

Setzt man

$$\log\frac{1+\sin\eta}{\cos\eta}=\vartheta_1,\qquad\text{oder}\qquad\frac{1-\sin\eta}{\cos\eta}=\sqrt{\frac{1-\sin\eta}{1+\sin\eta}}=e^{-\vartheta_1},$$

so erhält V in dem hier betrachteten Fall auf jedem der confocalen Ellipsoïde die Form

$$V=\Pi(\vartheta+\vartheta_1\sqrt{-1})+\Pi_1(\vartheta-\vartheta_1\sqrt{-1})$$

und genügt daher der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta_1^2}=0.$$

In demselben Falle hatte aber auch V auf jedem der confocalen Ellipsoïde die Form

$$V=\varphi(u_1\sqrt{-1}+u_2)+\psi(u_1\sqrt{-1}-u_2)$$

und genügte daher der ganz ähnlichen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2}=0.$$

Was die Gränzen dieser verschiedenen Variabeln betrifft, so ist zu bemerken, dafs, während die Gröfse ϑ alle Werthe von 0 bis 2π, die Gröfse ϑ_1 alle Werthe von $-\infty$ bis ∞ annimmt, die Werthe von u_1 und u_2 immer endlich bleiben.

7.

Um die Gröfsen u, u_1, u_2 auf die übliche Form der elliptischen Integrale zu reduciren, führe man statt der Gröfsen ϱ, ϱ_1, ϱ_2 Winkel ein, welche von 0

bis $\frac{1}{2}\pi$ wachsen oder abnehmen, wenn ϱ von c bis ∞, ϱ_1 von b bis c, ϱ_2 von 0 bis b wächst. Zu diesem Zweck setze man

$$\varrho = \sqrt{(c^2+(c^2-b^2)\operatorname{tang}^2\chi)},$$

woraus

$$\sqrt{\frac{\varrho^2-b^2}{c^2-b^2}} = \frac{1}{\cos\chi}, \quad \sqrt{\frac{\varrho^2-c^2}{c^2-b^2}} = \operatorname{tang}\chi, \quad \frac{1}{c^2-b^2}d\varrho = \frac{\operatorname{tang}\chi\, d\chi}{\cos\chi\sqrt{(c^2-b^2\sin^2\chi)}}$$

folgt, und daher

$$du = \frac{d\varrho}{\sqrt{((\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2))}} = \frac{d\chi}{\sqrt{(c^2-b^2\sin^2\chi)}}.$$

Ferner setze man

$$\varrho_1 = \sqrt{(c^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)},$$

woraus

$$\sqrt{\frac{\varrho_1^2-b^2}{c^2-b^2}} = \cos\varphi, \quad \sqrt{\frac{c^2-\varrho_1^2}{c^2-b^2}} = \sin\varphi,$$

$$\frac{1}{c^2-b^2}d\varrho_1 = \frac{-bc\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(c^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)^3}}$$

folgt, und daher

$$du_1 = \frac{-d\varrho_1}{\sqrt{((\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2))}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{(c^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)}}.$$

Endlich setze man

$$\varrho_2 = b\sin\psi,$$

woraus

$$du_2 = \frac{d\varrho_2}{\sqrt{((b^2-\varrho_2^2)(c^2-\varrho_2^2))}} = \frac{d\psi}{\sqrt{(c^2-b^2\sin^2\varphi)}}.$$

Wenn

$$\frac{b}{c} = k', \quad \frac{1}{c}\sqrt{(c^2-b^2)} = k,$$

so wird nach der *Legendre*schen Bezeichnung,

$$cu = F(\chi, k'), \quad cu_1 = F(\varphi, k), \quad cu_2 = F(\psi, k').$$

Setzt man

$$cu = v, \quad cu_1 = v_1, \quad cu_2 = v_2,$$

so erhält man nach den von mir eingeführten Bezeichnungen, wenn man überall den Modul k hinzudenkt, wenn kein anderer angegeben ist,

$$\varphi = \operatorname{am} v_1, \qquad \psi = \operatorname{am}(v_2, k'),$$
$$\varrho_1 = c\Delta\operatorname{am} v_1, \qquad \varrho_2 = c.k'\sin\operatorname{am}(v_2, k'),$$

und daher, wenn man noch die Formeln (2.) §. 3. zu Hülfe nimmt,

$$\sin\eta = \frac{x}{\varrho} = \frac{\varrho_1\varrho_2}{bc} = \Delta\operatorname{am} v_1 \sin\operatorname{am}(v_2, k'),$$

$$\cos\eta\cos\vartheta = \frac{y}{\sqrt{(\varrho^2-b^2)}} = \frac{\sqrt{((\varrho_1^2-b^2)(b^2-\varrho_2^2))}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}} = \cos\operatorname{am} v_1 \cos\operatorname{am}(v_2, k'),$$

$$\cos\eta\sin\vartheta = \frac{z}{\sqrt{(\varrho^2-c^2)}} = \frac{\sqrt{((c^2-\varrho_1^2)(c^2-\varrho_2^2))}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}} = \sin\operatorname{am} v_1 \Delta\operatorname{am}(v_2, k').$$

Um alle Puncte des Ellipsoïds zu erhalten, mufs man dem Winkel ϑ alle Werthe von 0 bis 2π und dem Winkel η alle Werthe von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{1}{2}\pi$, oder der Gröfse v_1 alle Werthe von 0 bis $4K$, der Gröfse v_2 alle Werthe von $-K'$ bis $+K'$ beilegen, wenn man, wie gewöhnlich, mit K und K' die ganzen Integrale

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}, \qquad K' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\varphi)}}$$

bezeichnet.

Will man das im vorigen Paragraphen gefundene Resultat in der gewöhnlichen Bezeichnung der elliptischen Functionen darstellen, so erhält man den Satz,

dafs durch die Substitution

$$\tang\vartheta = \frac{\tang\operatorname{am} v_1}{\sin\operatorname{coam}(v_2, k')} = \frac{\sin\operatorname{am} v_1 \Delta\operatorname{am}(v_2, k')}{\cos\operatorname{am} v_1 \cos\operatorname{am}(v_2, k')},$$

$$e^{-\vartheta_1} = \sqrt{\frac{1-\Delta\operatorname{am} v_1 \sin\operatorname{am}(v_2, k')}{1+\Delta\operatorname{am} v_1 \sin\operatorname{am}(v_2, k')}}$$

die partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial v_2^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta_1^2} = 0$$

in einander übergehen.

Aus den Gleichungen, durch welche in dem Vorhergehenden $\tang\vartheta$ und $e^{-\vartheta_1}$ bestimmt worden sind, ergeben sich die Formeln,

$$d\vartheta = \frac{\Delta\varphi\cos\psi\Delta(\psi, k')\,dv_1 + k^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\,dv_2}{1-\Delta^2\varphi\sin^2\psi},$$

$$d\vartheta_1 = \frac{-k^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\,dv_1 + \Delta\varphi\cos\psi\Delta(\psi, k')\,dv_2}{1-\Delta^2\varphi\sin^2\psi}.$$

Hieraus folgt nach mehreren Reductionen,

$$\frac{1}{\cos^2\eta}\{d\eta^2+\cos^2\eta\, d\vartheta^2\} = d\vartheta^2+d\vartheta_1^2 = \frac{1-k^2\sin^2\varphi-k'^2\sin^2\psi}{1-\Delta^2\varphi\sin^2\psi}(dv_1^2+dv_2^2),$$

woraus sich zufolge der §. 2. gegebnen allgemeinen Formeln sogleich die Transformation der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial v_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial v_2^2}=0$ in die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta_1^2}=0$ ergiebt.

8.

Man hat in §. 6. gesehn, dafs die Function

$$V = \Pi(\vartheta+\vartheta_1\sqrt{-1})+\Pi_1(\vartheta-\vartheta_1\sqrt{-1})$$

der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial v_2^2}=0$$

genügt. Es mufs sich daher diese Function als die Summe zweier Functionen respective von $v_1+v_2\sqrt{-1}$ und von $v_1-v_2\sqrt{-1}$ darstellen lassen, wie sich auch aus bekannten Formeln der Theorie der elliptischen Functionen ergiebt.

Man erhält nämlich aus den Formeln des vorigen Paragraphen

$$\frac{\cos\eta(\cos\vartheta+\sqrt{-1}.\sin\vartheta)}{1+\sin\eta} = e^{-\vartheta_1+\vartheta\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{\cos\operatorname{am} v_1 \cos\operatorname{am}(v_2, k')+\sqrt{-1}\sin\operatorname{am} v_1\, \Delta\operatorname{am}(v_2, k')}{1+\Delta\operatorname{am} v_1 \sin\operatorname{am}(v_2, k')}.$$

Da (Fundam. pag. 34)

$$\sin\operatorname{am}(v_2, k') = -\sqrt{-1}\operatorname{tang}\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1}),$$

$$\cos\operatorname{am}(v_2, k') = \frac{1}{\cos\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})},$$

$$\Delta\operatorname{am}(v_2, k') = \frac{\Delta\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})}{\cos\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})},$$

so wird

$$e^{-\vartheta_1+\vartheta\sqrt{-1}} = \frac{\cos\operatorname{am} v_1+\sqrt{-1}\sin\operatorname{am} v_1\, \Delta\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})}{\cos\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})-\sqrt{-1}\,\Delta\operatorname{am} v_1 \sin\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner des vorstehenden Bruchs mit

$$\cos\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})+\sqrt{-1}\,\Delta\operatorname{am} v_1\sin\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1}),$$

und bemerkt, dafs

$$\cos^2\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})+\Delta^2\operatorname{am} v_1\sin^2\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1}) = 1-k^2\sin^2\operatorname{am} v_1\sin^2\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1}),$$

ferner die Fundamentalformeln

$$\cos\operatorname{am}(v_1+v_2\sqrt{-1})$$

$$= \frac{\cos\operatorname{am} v_1 \cos\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})-\sin\operatorname{am} v_1\, \Delta\operatorname{am} v_1 \sin\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})\,\Delta\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} v_1\sin^2\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})},$$

$$\sin\operatorname{am}(v_1+v_2\sqrt{-1})$$

$$= \frac{\sin\operatorname{am} v_1 \cos\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})\,\Delta\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})+\sin\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})\cos\operatorname{am} v_1\,\Delta\operatorname{am} v_1}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} v_1\sin^2\operatorname{am}(v_2\sqrt{-1})},$$

so erhält man

$$e^{-\vartheta_1+\vartheta\sqrt{-1}} = \cos\operatorname{am}(v_1+v_2\sqrt{-1})+\sqrt{-1}\sin\operatorname{am}(v_1+v_2\sqrt{-1}) = e^{\sqrt{-1}\operatorname{am}(v_1+v_2\sqrt{-1})},$$

tates $\Delta^n(\Delta-1)^m$ linearis, ex ea alia obtinetur ponendo cuiusque termini $\Delta^n(\Delta-1)^m$ loco terminum $(-1)^{m+n}\Delta^m(\Delta-1)^n$. Hinc sequens fluit

Theorema II.

Ex unaquaque relatione lineari inter differentias $\Delta^m A_n$ altera obtinetur, si in locum cuiusque termini $\Delta^m A_n$ ponitur terminus

$$(-1)^{m+n}\Delta^n A_m.$$

Formulae duae elementares,

$$\Delta^m A_0 = A_m - mA_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}A_{m-2} \dots \pm A_0,$$

$$A_m = \Delta^m A_0 + m\Delta^{m-1}A_0 + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^{m-2}A_0 \dots + A_0,$$

per theorema II. altera ex altera fluunt. Secundum theorema I. altera ex evolutione potestatis $(\Delta-1)^n$, altera ex evolutione potestatis $\Delta^n = (\Delta-1+1)^n$ eruitur. Alia varia praeterea exempla, quibus theorema generale I. illustrari possit. Addam tantum concinnam demonstrationem duarum insignium formularum, quas *Eulerus* olim in Calculo Differentiali tradidit. Invenit *Eulerus*, posito

$$x = \frac{y}{1+y} \quad \text{sive} \quad y = \frac{x}{1-x},$$

fieri

$$A_0x + A_1x^2 + A_2x^3 + A_3x^4 + \text{etc.}$$
$$= A_0y + \Delta A_0.y^2 + \Delta^2A_0.y_3 + \Delta^3A_0.y^4 + \text{etc.}$$

Quae transformatio sequitur e formula

$$\frac{x}{1-\Delta x} = \frac{y}{1-(\Delta-1)y},$$

functione altera secundum ipsius x, altera secundum ipsius y potestates ascendentes evoluta, et secundum theorema I. in locum quantitatum Δ^n et $(\Delta-1)^n$ terminis A_n et $\Delta^n A_0$ positis.

Secundo loco, posito

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.},$$

atque

$$S = aA_0 + bA_1x + cA_2x^2 + dA_3x^3 + \text{etc.},$$

invenit *Eulerus* fieri

$$S = A_0f(x) + \Delta A_0.x\frac{df(x)}{dx} + \frac{1}{1.2}\Delta^2A_0.x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\Delta^3A_0.x^3\frac{d^3f(x)}{dx^3} + \text{etc.}$$

Demonstratio transformationis prodit e formula

$$f(Ax) = f(x+(A-1)x),$$

parte altera secundum ipsius Ax, altera theorematis *Tayloriani* ope secundum ipsius $(A-1)x$ potestates evoluta, ac deinde ipsis A^n, $(A-1)^n$ mutatis in A_n, $\Delta^n A_0$.

Serie

$$1, \quad \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}, \quad \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+1)}, \quad \text{etc.}$$

proposita, fit differentiarum series *prima*,

$$\frac{\beta-\gamma}{\gamma}, \quad \frac{\beta-\gamma}{\gamma}\cdot\frac{\beta}{\gamma+1}, \quad \frac{\beta-\gamma}{\gamma}\cdot\frac{\beta(\beta+1)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}, \quad \frac{\beta-\gamma}{\gamma}\cdot\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)}, \quad \text{etc.},$$

secunda,

$$\frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)}, \quad \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{\beta}{\gamma+2}, \quad \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot\frac{\beta(\beta+1)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}, \quad \text{etc.}$$

et ita porro. Generaliter si seriei propositae terminos denotamus per

$$A_n = \frac{\beta(\beta+1)\ldots.(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots.(\gamma+n-1)},$$

erit

$$\Delta^m A_0 = \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)\ldots.(\beta-\gamma-m+1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots.(\gamma+m-1)},$$

ac generalius

$$\Delta^m A_n = \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)\ldots.(\beta-\gamma-m+1).\beta(\beta+1)\ldots.(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots.(\gamma+m+n-1)}.$$

Hinc eruitur

Theorema III.

Quaecunque inter quantitates $A^n(A-1)^m$ habetur aequatio linearis, iusta manet, si in ea ipsis $A^n(A-1)^m$ substituuntur quantitates

$$\frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)\ldots.(\beta-\gamma+m-1).\beta(\beta+1)\ldots.(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots.(\gamma+m+n-1)},$$

designantibus β et γ quantitates quascunque.

Applicemus hanc propositionem ad aequationem quae nascitur evolutione fractionum aequalium,

$$\frac{1}{(1-Ax)^\alpha} = \frac{1}{(1-x-(A-1)x)^\alpha},$$

vel, si placet, in theoremate *Euleriano* posteriore ponamus $f(x) = (1-x)^{-\alpha}$ ipsisque A_n, $\Delta^m A_0$ valores supra traditos tribuamus: venit nota formula,

exhibita, quantitatibus illis substituere licet terminos

$$A_{l,m,n,p\ldots}$$

Theorema traditum paucis exemplis illustrabo.

Posito

$$y = \log(1+x),$$

fit

$$e^{Ay} = 1 + Ay + A^2\frac{y^2}{2} + A^3\frac{y^3}{2.3} + \text{etc.}$$

$$= 1 + Ax + A(A-1)\frac{x^2}{2} + A(A-1)(A-2)\frac{x^3}{2.3} + \text{etc.}$$

$$= (1+x)\left\{1 + (A-1)x + (A-1)(A-2)\frac{x^2}{2} + (A-1)(A-2)(A-3)\frac{x^3}{2.3} + \text{etc.}\right\}$$

$$= (1+x)^2\left\{1 + (A-2)x + (A-2)(A-3)\frac{x^2}{2} + (A-2)(A-3)(A-4)\frac{x^3}{2.3} + \text{etc.}\right\},$$

et ita porro. Hinc secundum propositionem traditam sequitur, posito $y = \log(1+x)$, fieri

$$1 + A_1 y + A_2\frac{y^2}{2} + A_3\frac{y^3}{2.3} + \text{etc.}$$

$$= 1 + A_1 x + A_{1,1}\frac{x^2}{2} + A_{1,1,1}\frac{x^3}{2.3} + \text{etc.}$$

$$= (1+x)\left\{1 + A_{0,1}x + A_{0,1,1}\frac{x^2}{2} + A_{0,1,1,1}\frac{x^3}{2.3} + \text{etc.}\right\}$$

$$= (1+x)^2\left\{1 + A_{0,0,1}x + A_{0,0,1,1}\frac{x^2}{2} + A_{0,0,1,1,1}\frac{x^3}{2.3} + \text{etc.}\right\},$$

et ita porro.

Cl. *Stirling* olim in *Methodo Differentiali* dedit formulas,

$$\frac{1}{x-A} = \frac{1}{x} + \frac{A}{x^2} + \frac{A^2}{x^3} + \frac{A^3}{x^4} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{A}{x(x-1)} + \frac{A(A-1)}{x(x-1)(x-2)} + \frac{A(A-1)(A-2)}{x(x-1)(x-2)(x-3)} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{A-1}{(x-1)(x-2)} + \frac{(A-1)(A-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} + \frac{(A-1)(A-2)(A-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{x-2} + \frac{A-2}{(x-2)(x-3)} + \frac{(A-2)(A-3)}{(x-2)(x-3)(x-4)} + \frac{(A-2)(A-3)(A-4)}{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} + \text{etc.}$$

et ita porro. E quibus per propositionem traditam emergunt sequentes:

$$\frac{1}{x}+\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x^3}+\frac{A_3}{x^4}+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{A_1}{x(x-1)}+\frac{A_{1,1}}{x(x-1)(x-2)}+\frac{A_{1,1,1}}{x(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{A_{0,1}}{(x-1)(x-2)}+\frac{A_{0,1,1}}{(x-1)(x-2)(x-3)}+\frac{A_{0,1,1,1}}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{x-2}+\frac{A_{0,0,1}}{(x-2)(x-3)}+\frac{A_{0,0,1,1}}{(x-2)(x-3)(x-4)}+\frac{A_{0,0,1,1,1}}{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}+\text{etc.}$$

et ita porro. Generalior formula sic eruitur.

Data functione $f(x)$, formetur series

$$f(x),\quad f(2x),\quad f(3x),\quad f(4x)\ \text{etc.},$$

eiusque differentiarum series prima, secunda, tertia etc. Quarum serierum termini primi si designantur per

$$\nabla^1 f(x),\quad \nabla^2 f(x),\quad \nabla^2 f(x),\quad \text{etc.}$$

habetur nota interpolationis formula,

$$f(Ax)=f(x)+(A-1)\nabla^1 f(x)+\frac{(A-1)(A-2)}{1.2}\nabla^2 f(x)+\text{etc.}$$

Unde theorematis IV. ope fluit hoc

Theorema V.

Detur quaecunque series

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \textit{etc.},$$

sitque

$$a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\textit{etc.}=f(x),$$

porro sit

$$A_0a+A_1a_1x+A_2a_2x^2+A_3a_3x^3\ \textit{etc.}=S;$$

datis valoribus quantitatum

$$f(x),\quad f(2x),\quad f(3x),\quad f(4x),\quad \textit{etc.}$$

earum quantitatum formentur differentiarum series prima, secunda, tertia etc.; quarum termini primi si vocantur

$$\nabla^1 f(x),\quad \nabla^2 f(x),\quad \nabla^3 f(x),\quad \textit{etc.}$$

fit

$$S=A_0f(x)+A_{0,1}\nabla^1 f(x)+A_{0,1,1}\frac{\nabla^2 f(x)}{1.2}+A_{0,1,1,1}\frac{\nabla^3 f(x)}{1.2.3}+\text{etc.}$$

Formula antecedente theoremate proposita analoga est ***Eulerianae*** supra traditae, quippe ***differentialium*** functionis $f(x)$ in formula ***Euleriana*** locum in hac formula tenent primi termini serierum ***differentiarum***, quae de serie $f(x)$, $f(2x)$, $f(3x)$ etc. derivantur. Theoremate V. patet, ponendo

$$\Delta^i A_0 = B_i, \quad \Delta^i B_0 = C_i, \quad \Delta^i C_0 = D_i, \quad \text{etc.}$$

si unquam perveniatur ad seriem sive totam evanescentem sive in quantitates evanescentes desinentem, seriei S obtineri summam finitam.

7.

Über unendliche Reihen, deren Exponenten zugleich in zwei verschiednen quadratischen Formen enthalten sind.

Einleitung.

Zwischen der Analysis und Zahlentheorie, welche man lange für völlig getrennte Disciplinen hielt, sind in neuerer Zeit immer häufigere, oft unerwartete Verbindungen und Übergänge entdeckt worden. Eine reichhaltige Quelle gegenseitiger Beziehungen beider, welche noch lange unerschöpft bleiben wird, ist die Analysis der elliptischen Functionen. Ich will im Folgenden eine Anzahl Formeln mittheilen, welche eine neue Anwendung dieser Analysis auf die Arithmetik gewähren, die Anwendung nämlich auf die Simultanformen des zweiten Grades, in denen gewisse Zahlenclassen immer enthalten sind.

Das erste Beispiel von tiefer liegenden Sätzen über die Eigenschaften solcher Simultanformen ergab sich aus der ersten *Gaufs*ischen Abhandlung über die biquadratischen Reste, welche von dem biquadratischen Character der Zahl 2 handelt. Aus den in dieser Abhandlung gefundnen Resultaten folgt eine Beziehung zwischen den beiden quadratischen Formen

$$aa+2bb \quad \text{und} \quad cc+dd,$$

in welchen jede Primzahl von der Form $8i+1$ gleichzeitig enthalten ist. *Gaufs* beweist nämlich daselbst durch rein arithmetische Betrachtungen,

> dafs die Zahl 2, welche quadratischer Rest jeder Primzahl von der Form $8i+1$ ist, auch ihr biquadratischer Rest ist oder nicht, je nachdem bei der Darstellung der Primzahl durch die Form $aa+2bb$ die Wurzel des ungeraden Quadrates a die Form $8i\pm1$ oder die Form $8i\pm3$ hat.

Durch andere von diesen ganz unabhängige, aus seiner Theorie der Kreistheilung geschöpfte Betrachtungen, denen er jedoch ebenfalls eine arithmetische Einkleidung gab, beweist dann *Gaufs* an demselben Orte ferner auch,

> dafs die Zahl 2 biquadratischer Rest einer Primzahl von der Form $8i+1$ ist oder nicht, je nachdem bei Zerfällung der Primzahl in zwei Quadrate

die Wurzel des geraden Quadrates durch 8 dividirt aufgeht oder den Rest 4 läfst.

Die Vergleichung dieser beiden Criterien ergiebt den Satz,

dafs bei der Darstellung einer Primzahl von der Form $8i+1$ durch die beiden quadratischen Formen $aa+2bb$ und $cc+dd$, wo d die Wurzel des geraden Quadrates sein mag, immer gleichzeitig a die Form $8i\pm1$ und d die Form $8i$ oder a die Form $8i\pm3$ und d die Form $8i+4$ hat.

Es war zu wünschen, dafs dieser Satz unabhängig von der Theorie der biquadratischen Reste durch unmittelbare Betrachtung der Gleichung

$$aa+2bb = cc+dd$$

bewiesen, und dadurch das eine *Gaufs*ische Criterium auf das andere zurückgeführt würde. Dies hat *Dirichlet* in einer Abhandlung des 3ten Bandes des *Crelle*schen Journals gethan, wo er zugleich Untersuchungen über die allgemeinere Gleichung

$$aa+nbb = cc+dd$$

angestellt hat.

Der zuletzt erwähnte Satz kann auch noch auf eine andere Art ausgedrückt werden. Da entweder $+a$ oder $-a$, $+c$ oder $-c$ die Form $4m+1$ hat, ferner aus der Gleichung

$$p = aa+2bb = cc+dd,$$

wenn p die Form $8i+1$ hat, folgt, dafs b durch 2, d durch 4 aufgeht: so erhält man aus diesen beiden Zerfällungen der Primzahl p immer eine Gleichung,

$$(4m'+1)^2+8n'n' = (4m+1)^2+16nn = p,$$

wo die Zahlen m und m' positiv oder negativ sind. Der obige Satz besagt, dafs in dieser Gleichung m' und n gleichzeitig gerade oder ungerade sind, oder *dafs die Zahl $m'+n$ immer gerade ist.* Aus derselben Gleichung folgt aber auch unmittelbar, dafs m und $m'+n'$ gerade sind, wenn p die Form $16n+1$ hat, und dafs m und $m'+n'$ ungerade sind, wenn p die Form $16n+9$ hat, oder *dafs die Zahl $m+m'+n'$ immer gerade ist.* Es wird daher zufolge des obigen Satzes auch $m+n+n'$ immer gerade sein, oder dieser Satz folgendermafsen ausgesprochen werden können,

wenn eine Primzahl p von der Form $8i+1$ durch die beiden quadratischen Formen $(4m+1)^2+16nn$ und $(4m'+1)^2+8n'n'$ dargestellt wird, so sind die beiden Zahlen $m+n$ und n' immer gleichzeitig gerade oder ungerade.

In dieser Gestalt findet man den Satz auch als ein Corollar einer analytischen Formel, welche sich aus den Reihenentwicklungen der Theorie der elliptischen Functionen ergiebt, und in welcher eine Reihe, deren Exponenten die eine quadratische Form haben, einer Reihe gleich wird, deren Exponenten in der andern quadratischen Form enthalten sind. Aus derselben Quelle fliefst eine grofse Anzahl ähnlicher Gleichungen, die Sätze über die Eigenschaften quadratischer Simultanformen ergeben, und in denen die Exponenten der Reihen in den quadratischen Formen x^2+y^2, x^2+2y^2, x^2+3y^2, x^2+6y^2, $2x^2+3y^2$ enthalten sind. Einige solcher Gleichungen lassen sich auch aufstellen, in denen die Exponenten der Reihen in höheren quadratischen Formen, wie x^2+5y^2, x^2+7y^2 enthalten sind. Die folgenden Untersuchungen sollen sich mit diesen analytischen Formeln und den daraus folgenden arithmetischen Sätzen beschäftigen. Da die Anzahl dieser Formeln begränzt scheint, so kann es Interesse haben, dieselben zu erschöpfen.

Die sämmtlichen diesen Untersuchungen zum Grunde gelegten Entwicklungen sind particuläre Fälle einer Fundamentalformel der Theorie der elliptischen Functionen, welche in der Gleichung

$$\begin{aligned}&(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots\\ &\times(1-qz)(1-q^3z)(1-q^5z)(1-q^7z)\ldots\\ &\times(1-qz^{-1})(1-q^3z^{-1})(1-q^5z^{-1})(1-q^7z^{-1})\ldots\\ &=1-q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})-q^9(z^3+z^{-3})+\ldots\end{aligned}$$

enthalten ist. Diese Gleichung gilt für alle Werthe von z und für die Werthe von q, deren Modul kleiner als 1 ist. Man kann derselben verschiedne Formen geben. Setzt man q^m für q, wo m eine beliebige positive Gröfse ist, und gleichzeitig $+q^{\pm n}$ oder $-q^{\pm n}$ für z, so erhält man aus ihr die folgenden beiden Formeln:

$$1.\quad \begin{aligned}&(1-q^{m-n})(1-q^{m+n})(1-q^{2m})(1-q^{3m-n})(1-q^{3m+n})(1-q^{4m})\ldots\\ &=1-q^{m-n}-q^{m+n}+q^{4m-2n}+q^{4m+2n}-q^{9m-3n}-q^{9m+3n}+\ldots,\end{aligned}$$

$$2.\quad \begin{aligned}&(1+q^{m-n})(1+q^{m+n})(1-q^{2m})(1+q^{3m-n})(1+q^{3m+n})(1-q^{4m})\ldots\\ &=1+q^{m-n}+q^{m+n}+q^{4m-2n}+q^{4m+2n}+q^{9m-3n}+q^{9m+3n}+\ldots\end{aligned}$$

Setzt man $m-n=a$, $2n=b$, so werden diese Formeln,

$$3.\quad \begin{aligned}&(1-q^a)(1-q^{a+b})(1-q^{2a+b})(1-q^{3a+b})(1-q^{3a+2b})(1-q^{4a+2b})\ldots\\ &=1-q^a-q^{a+b}+q^{4a+b}+q^{4a+3b}-q^{9a+3b}-q^{9a+6b}+\ldots,\end{aligned}$$

$$4.\quad \begin{aligned}&(1+q^a)(1+q^{a+b})(1-q^{2a+b})(1+q^{3a+b})(1+q^{3a+2b})(1-q^{4a+2b})\ldots\\ &=1+q^a+q^{a+b}+q^{4a+b}+q^{4a+3b}+q^{9a+3b}+q^{9a+6b}+\ldots,\end{aligned}$$

wo die Exponenten in den unendlichen Producten eine Reihe bilden, deren

erstes Glied a ist und deren Differenzen

$$b,\ a,\ a,\ b,\ a,\ a,\ b \text{ etc.}$$

sind, die Exponenten in den Entwicklungen dagegen eine Reihe bilden, deren erstes Glied 0 ist, und deren Differenzen

$$a,\ b,\ 3a,\ 2b,\ 5a,\ 3b,\ 7a \text{ etc.}$$

sind. Bezeichnet man die unendlichen Producte und Reihen durch die ihren allgemeinen Gliedern vorgesetzten Zeichen Π und Σ, so kann man die Formeln (1.) und (2.) folgendermafsen darstellen,

$$5.\quad \Pi\{(1-q^{2mi+m-n})(1-q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})\} = \Sigma(-1)^i q^{mi^2+ni},$$

$$6.\quad \Pi\{(1+q^{2mi+m-n})(1+q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})\} = \Sigma q^{mi^2+ni}.$$

Hier sind dem Index i unter dem Zeichen Π die Werthe $0, 1, 2, \ldots \infty$, unter dem Zeichen Σ dagegen die Werthe $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm\infty$ beizulegen, wie auch im Folgenden immer angenommen werden wird. Setzt man in diesen Formeln m^2 für m, $2mn$ für n, und multiplicirt auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit q^{n^2}, so erhalten sie folgende Form:

$$7.\quad q^{n^2}\Pi\{(1-q^{2m^2i+m^2-2mn})(1-q^{2m^2i+m^2+2mn})(1-q^{2m^2i+2m^2})\} = \Sigma(-1)^i q^{(mi+n)^2},$$

$$8.\quad q^{n^2}\Pi\{(1+q^{2m^2i+m^2-2mn})(1+q^{2m^2i+m^2+2mn})(1-q^{2m^2i+2m^2})\} = \Sigma q^{(mi+n)^2}.$$

Von den drei einfachen unendlichen Producten, welche mit einander zu multipliciren sind, werden zwei einander gleich, wenn $b=0$; es können die drei in zwei zusammengezogen werden, wenn $b=2a$, oder in ein einziges, wenn $b=a$. Setzt man in diesen Fällen $a=1$, wie es unbeschadet der Allgemeinheit geschehen kann, und daher

1. $m=1$, $n=0$; 2. $m=2$, $n=1$; 3. $m=\frac{3}{2}$, $n=\frac{1}{2}$:

so erhält man aus (5.) und (6.) die *fünf* particulären Formeln:

$$9.\quad \begin{cases} \Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\} = \Sigma(-1)^i q^{i^2}, \\ \Pi\{(1+q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\} = \Sigma q^{i^2}, \\ \Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\} = \Sigma(-1)^i q^{2i^2+i}, \\ \Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\} = \Sigma q^{2i^2+i}, \\ \Pi(1-q^{i+1}) = \Sigma(-1)^i q^{\frac{3}{2}i^2+\frac{1}{2}i}. \end{cases}$$

Die Zahlen $2i^2+i$ bilden, wenn man dem i alle positiven und negativen Werthe giebt, die Reihe der *dreieckigen* Zahlen.

Wenn von den unendlichen Producten, welche aus (5.) und (6.) für specielle Werthe von m und n hervorgehen, irgend welche zwei mit einander

multiplicirt werden, so erhält man dadurch ein neues unendliches Product, in dessen Reihenentwicklung nur solche Glieder vorkommen, deren Exponenten in einer bestimmten quadratischen Form zweier Variabeln enthalten sind, welche Anzahl der Variabeln der quadratischen Formen ich immer stillschweigend voraussetzen werde, wenn nicht das Gegentheil bemerkt ist. So oft daher, was in einer grofsen Anzahl von Fällen geschieht, ein solches unendliche Product noch durch die Multiplication zweier anderer in den obigen Ausdrücken (5.) und (6.) enthaltner unendlicher Producte entstehen kann, werden durch die Entwicklung desselben Reihen erhalten, in denen die Exponenten der Glieder *in zwei bestimmten quadratischen Functionen zugleich* enthalten sind.

Zufolge ihrer Entstehungsart können diese Reihen durch zwei verschiedne Doppelsummen ausgedrückt, und daher nach zwei verschiedenen Gesetzen gebildet werden. Nach dem einen erhalten die Exponenten der einzelnen Glieder eine andere quadratische Form als nach dem andern; wenn man aber in jeder Doppelsumme alle Glieder, in deren Exponenten die quadratische Form denselben Werth erhält, zusammenfafst, müssen beide Bildungsgesetze zu demselben Resultate führen, und daher sowohl nach dem einen als nach dem andern die Coëfficienten aller Glieder, in welchen die Exponenten nicht zugleich in den beiden quadratischen Formen enthalten sind, verschwinden. Wenn man hingegen die Coëfficienten der Glieder, deren Exponenten in den beiden quadratischen Formen enthalten sind, wie sie aus den beiden verschiednen Bildungsweisen hervorgehen, mit einander vergleicht, erhält man jedesmal einen ähnlichen arithmetischen Satz, wie oben für die beiden Zerfällungen der Primzahlen von der Form $8i+1$ aufgestellt worden ist.

Durch die Herleitung dieser arithmetischen Sätze aus den analytischen Entwicklungen wird aber nicht allein der Vorrath der arithmetischen Beweismittel vermehrt, sondern es werden dadurch auch die Sätze selbst in einer neuen bemerkenswerthen Form gefunden. Schon in einem früheren Falle, in welchen sich ein arithmetischer Fundamentalsatz als Corollar einer elliptischen Formel ergab, erhielt zugleich dieser Satz eine wesentlich verschiedene Fassung, die ihm einen allgemeineren Character und eine erhöhte Wichtigkeit gab. Der Satz nämlich,

> dafs für jede Zahl P, *die nur Primzahlen von der Form* $4i+1$ *zu Theilern hat,* die Gleichung $xx+yy=P$ so viel Lösungen in ganzen positiven oder negativen Werthen von x und y verstattet, als die vierfache Anzahl der ungeraden Factoren von P beträgt,

ergiebt sich aus der Theorie der elliptischen Functionen in der allgemeinern Form,

dafs für *jede beliebige* Zahl P die Gleichung $xx+yy=P$ so viel Lösungen in ganzen positiven oder negativen Werthen von x und y verstattet, als der vierfache *Überschufs* der Anzahl der Factoren der Zahl P von der Form $4i+1$ über die Anzahl ihrer Factoren von der Form $4i+3$ beträgt *).

Diese verallgemeinerte Form des Satzes über die Anzahl der Zusammensetzungen der Zahlen aus *zwei* Quadraten verstattet es, von ihm aus zu Sätzen über die Anzahl der Zusammensetzungen der Zahlen aus *vier* Quadraten aufzusteigen. S. *Crelle's* Journal 12ter Theil S. 167. Anwendungen ähnlicher Umformungen auf tiefere arithmetische Sätze findet man in der berühmten Abhandlung: *Sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, im 21ten Bande desselben Journals S. 3.

Als Beispiel der allgemeineren Fassung, in welcher die Sätze über Simultanformen durch die Analysis der elliptischen Functionen gefunden werden, will ich die Erweiterung anführen, welche der oben aufgestellte Satz erfährt,

dafs in den Simultanformen $(4m+1)^2+16nn$ und $(4m'+1)^2+8n'n'$, durch welche man jede Primzahl von der Form $8i+1$ darstellen kann, die Zahlen $m+n$ und n' gleichzeitig gerade und ungerade sind.

In der Form, wie er aus der analytischen Formel hervorgeht, heifst dieser Satz:

für jede beliebige Zahl P beträgt der Überschufs der Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$P=(4m+1)^2+16nn,$$

in welchen $m+n$ gerade, über die Anzahl der Lösungen, in welchen $m+n$ ungerade ist, eben so viel als der Überschufs der Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$P=(4m'+1)^2+8n'n',$$

in welchen n' gerade, über die Anzahl der Lösungen, in welchen n' ungerade ist.

Der wesentliche Character dieser Erweiterungen besteht darin, dafs die nur für eine besondere Classe von Zahlen geltenden Sätze durch andere ersetzt werden, welche *auf alle Zahlen* Anwendung finden, für jene besondern Classen von Zahlen die tiefer liegenden Eigenschaften, welche man bemerken will, herausstellen, für alle andern Zahlen aber sich auf einen elementaren Inhalt

*) S. Fund. N. Th. F. Ell. pag. 107.

reduciren. Wenn gewisse Zahlenclassen gewisse Zerfällungen verstatten, so ersetzt man die Zahlen, welche die Anzahl dieser Zerfällungen bestimmen, durch Überschüsse, welche sich für die besondern Classen von Zahlen auf die Anzahl ihrer Zerfällungen reduciren, und für alle andern Classen *verschwinden*.

Ich habe im Folgenden die sich aus den analytischen Entwicklungen ergebenden Eigenschaften der Zahlen auch aus bekannten arithmetischen Sätzen abzuleiten gesucht, wodurch man jedesmal für die analytische Formel einen *rein* arithmetischen Beweis erhält. Wenn diese arithmetischen Beweise der auf analytischem Wege gewonnenen Resultate keine wesentlichen Schwierigkeiten darbieten, so sind sie doch bisweilen complicirter Natur, und erfordern eigenthümliche Classificationen der Zahlen, welche vielleicht auch in andern Untersuchungen von Nutzen sein können. Es verstatten diese Beweise oft eine gewisse Willkür in der Wahl der Methoden der Behandlung, so dafs sie leicht variirt werden können.

Ich bemerke noch, dafs bei mehreren der hier behandelten Entwicklungen elliptischer Reihen für die Vorzeichen der Glieder solche Gesetze gefunden werden, dafs man sie durch Gröfsen ausdrücken kann, welche von den biquadratischen Characteren der Zahlen abhängen. Man gelangt so *a posteriori* zu den ersten merkwürdigen Beispielen der Einführung der biquadratischen Reste in die Entwicklungsgesetze elliptischer Reihen mit beliebigem Modul. Die Gröfsen, durch welche sich die Vorzeichen dieser elliptischen Reihen unmittelbar ausdrücken lassen, sind die nämlichen, welche durch ein von mir in die Theorie der Potenzreste eingeführtes besonderes Symbol bezeichnet werden, wodurch die Darstellung dieser Reihen an Einfachheit gewinnt.

Zusammenstellung der analytischen Formeln.

In dem 16ten Capitel der Einleitung in die Analysis des Unendlichen, welches *von der Theilung der Zahlen* handelt, hat *Euler* das unendliche Product

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\ldots},$$

dessen Entwicklungscoëfficienten bestimmen, wie oft eine gegebene Zahl in beliebige ungleiche Zahlen oder in gleiche und ungleiche ungerade Zahlen ge-

theilt werden kann, Behufs der Erforschung dieser Coëfficienten untersucht, und dasselbe bei dieser Gelegenheit dem Bruche

$$\frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-q^{24}-q^{30}+q^{44}+q^{52}-\dots}{1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}+q^{22}+q^{26}-\dots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{3ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}$$

gleich gefunden. ***Euler*** ersetzt nämlich das unendliche Product durch den Bruch

$$\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\dots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\dots},$$

dessen Zähler aus dem Nenner durch die Verwandlung von q in q^2 erhalten wird; für den Nenner aber findet er die in dem Nenner des vorstehenden Bruchs befindliche Reihe, deren Glieder zu Exponenten die *fünfeckigen* Zahlen, vor- und rückwärts ins Unendliche fortgesetzt, und abwechselnd die Coëfficienten $+1$ und -1 haben. Die eben angegebenen elliptischen Formeln lehren aber, dafs man für dasselbe unendliche Product noch *sechs* ähnliche Brüche, wie der von ***Euler*** gefundene, hat. Um diese demselben unendlichen Product gleichen Brüche zu erhalten, stelle ich dasselbe auf verschiedene Arten als Quotienten zweier anderer dar, welche in den allgemeinen unendlichen Producten (1.) und (2.) enthalten sind. Dies geschieht mittelst der folgenden Formeln:

I.

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\dots$$

$$= \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\dots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\dots}$$

$$= \frac{(1+q)(1+q^3)(1-q^4)(1+q^5)(1+q^7)(1-q^8)\dots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)(1-q^{10})(1-q^{12})\dots}$$

$$= \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)(1-q^6)\dots}{(1-q)^2(1-q^2)(1-q^3)^2(1-q^4)(1-q^5)^2(1-q^6)\dots}$$

$$= \frac{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)(1-q^4)(1+q^5)(1-q^6)\dots}{(1-q^2)^2(1-q^4)(1-q^6)^2(1-q^8)(1-q^{10})^2(1-q^{12})\dots}$$

$$= \frac{(1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})(1-q^{16})(1-q^{20})(1-q^{24})\dots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)(1-q^7)(1-q^8)\dots}$$

$$= \frac{(1+q)(1+q^2)(1-q^3)(1+q^4)(1+q^5)(1-q^6)\dots}{(1-q^3)^2(1-q^6)(1-q^9)^2(1-q^{12})(1-q^{15})^2(1-q^{18})\dots}$$

$$= \frac{(1+q^3)(1+q^9)(1-q^{12})(1+q^{15})(1+q^{21})(1-q^{24})\dots}{(1-q)(1-q^5)(1-q^6)(1-q^7)(1-q^{11})(1-q^{12})\dots}.$$

Wegen der einfachen Reihenentwicklung, deren die elliptischen unendlichen Producte

$$(1\pm q^{m-n})(1\pm q^{m+n})(1-q^{2m})(1\pm q^{3m-n})(1\pm q^{3m+n})(1-q^{4m})\,..$$
$$=\Pi\{1\pm q^{2mi+m-n})(1\pm q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})\}$$

zufolge der Formeln (1.) und (2.) oder (3.) und (4.) fähig sind, kann man sie gleichsam als Elementarfunctionen betrachten, und andere unendliche Producte aus ihnen zusammenzusetzen suchen. Die vorstehenden Formeln lösen die Aufgabe, das von *Euler* betrachtete unendliche Product

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\,..$$

durch diese elliptischen unendlichen Producte darzustellen. Man sieht, dafs diese Aufgabe mehrere Lösungen hat, indem man das vorgelegte unendliche Product durch die Formeln (I.) auf *sieben* verschiedne Arten als Quotienten zweier solcher elliptischen unendlichen Producte findet.

Die Factoren der elliptischen unendlichen Producte, welche die Zähler und Nenner der Formeln (I.) bilden, sind so geordnet, dafs die Exponenten der Potenzen von q fortwährend wachsen. Die Vorzeichen dieser Potenzen sind in den Nennern immer —, wie in der Formel (1.); in den Zählern dagegen entweder ebenfalls alle — oder abwechselnd in zweien Factoren + und im dritten —, wie in der Formel (2.). Nur der Zähler des vierten Bruchs macht eine Ausnahme, indem derselbe aus (1.) oder (2.) durch Annahme specieller Werthe für m und n nicht unmittelbar hervorgeht, sondern aus dem den Werthen $m=\frac{3}{2}$, $n=\frac{1}{2}$ entsprechenden Product $\Pi(1-q^{i+1})$ durch Änderung von q in $-q$ erhalten wird. Durch diese Änderung wird die letzte der Gleichungen (9.),

$$\Pi(1-q^{i+1})=\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)},$$

in

$$10.\quad \Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{2i})\}=\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)}q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}$$

verwandelt, oder in

$$11.\quad (1+q)(1-q^2)(1+q^3)(1-q^4)(1+q^5)\,..$$
$$=1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}+q^{15}+q^{22}+q^{26}+q^{35}-\,..,$$

in welcher Reihe nach den beiden ersten positiven Gliedern abwechselnd *vier* negative und *vier* positive folgen.

Wenn man die beiden ersten Factoren der elliptischen unendlichen Producte mit

$$(1\pm q^a)(1\pm q^{a+b})$$

bezeichnet, so werden die Werthe von a und b oder von $m = a + \frac{1}{2}b$, $n = \frac{1}{2}b$ für die Zähler und Nenner der Formeln I. durch folgendes Tableau gegeben:

II.

Zähler:	a	2	1*	1	1**	4	1*	3*	m	3	2*	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$**	6	$\frac{3}{2}$*	6*
	b	2	2	1	1	4	1	6	n	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	3
Nenner:	a	1	2	1	2	1	3	1	m	$\frac{3}{2}$	3	1	2	2	3	3
	b	1	2	0	0	2	0	4	n	$\frac{1}{2}$	1	0	0	1	0	2.

Die Fälle, in welchen immer zwei Vorzeichen $+$, das dritte $-$ sind, habe ich bei den Zählern von den Fällen, in welchen alle Vorzeichen $-$ sind, durch übergesetzte Sternchen unterschieden. Das doppelte Sternchen bezieht sich auf den besondern Fall des Zählers des vierten Bruches, wo die Vorzeichen der Potenzen von q in den einzelnen Factoren abwechselnd $+$ und $-$ sind. Man erhält aus den angegebnen Werthen von a und b die Reihe der Exponenten durch ihre ersten Differenzen b, a, a, b, a, a etc.

Bezeichnet man die elliptischen unendlichen Producte durch die *allgemeinen* Ausdrücke ihrer Factoren, wie in den Formeln (5.) und (6.), so erhält man aus I. die folgenden Gleichungen, deren Richtigkeit ganz von selbst in die Augen fällt, wenn man nur die eine Hülfsgleichung

$$\Pi\{(1+q^{i+1})(1-q^{2i+1})\} = \frac{\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{2i+2})\}}{\Pi(1-q^{i+1})} = 1$$

benutzt:

III.

$$\Pi(1+q^{i+1}) = \frac{\Pi(1-q^{2i+2})}{\Pi(1-q^{i+1})} \quad \dots\dots\dots\dots \quad 1.$$

$$= \frac{\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}}{\Pi(1-q^{2i+2})} \quad \dots\dots\dots \quad 2.$$

$$= \frac{\Pi(1-q^{i+1})}{\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}} \quad \dots\dots\dots \quad 3.$$

$$= \frac{\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{2i+2})\}}{\Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})\}} \quad \dots\dots\dots \quad 4.$$

$$= \frac{\Pi(1-q^{4i+4})}{\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}} \quad \dots\dots\dots \quad 5.$$

$$= \frac{\Pi\{(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+3})\}}{\Pi\{(1-q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})\}} \quad \dots\dots \quad 6.$$

$$= \frac{\Pi\{(1+q^{6i+3})(1-q^{12i+12})\}}{\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}} \quad \dots \quad 7.$$

Man kann bemerken, dafs alle diese Brüche im Zähler oder Nenner oder in beiden einen der fünf in den Formeln (9.) angegebnen particulären Ausdrücke enthalten, in welchen von den drei einfachen unendlichen Producten von der Form $\Pi(1 \pm q^{\alpha i+\beta})$, durch deren Multiplication jedes der elliptischen unendlichen Producte (1.) oder (2.) gebildet wird, entweder zwei einander gleich sind, oder zwei oder auch alle drei in ein solches einfaches unendliches Product zusammengezogen werden können.

Wenn man von diesen Zusammenziehungen keinen Gebrauch macht, so kann man die unter dem Zeichen Π befindlichen *allgemeinen* Ausdrücke der Factoren der elliptischen unendlichen Producte *aus ihren drei ersten Factoren* erhalten, indem man in diesen drei Factoren zu den Exponenten von q das Product des Index i mit dem im *dritten* Factor befindlichen Exponenten hinzufügt, wie dies die Vergleichung der Formeln (I.) und (III.) vor Augen legt. Nur in dem Zähler des vierten Bruchs müssen wegen der besondern Beschaffenheit desselben die Potenzen von q in den einzelnen Factoren noch mit $(-1)^i$ multiplicirt werden. Man erhält dann zufolge der angegebenen Regel aus den drei ersten Factoren $(1+q)(1-q^2)(1+q^3)$ das unendliche Product

$$\Pi\{(1+(-1)^i q^{3i+1})(1-(-1)^i q^{3i+2})(1+(-1)^i q^{3i+3})\},$$

oder wenn man für i einmal alle geraden und dann alle ungeraden Zahlen setzt,

$$\Pi\{(1+q^{6i+1})(1-q^{6i+2})(1+q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}$$
$$= \Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{2i+2})\},$$

wie in (III.).

Die Reihenentwicklungen der elliptischen unendlichen Producte der hier betrachteten Art erhält man ebenfalls leicht aus ihren *beiden* ersten Factoren

$$(1+q^a)(1+q^{a+b}) \quad \text{oder} \quad (1-q^a)(1-q^{a+b}).$$

Aus den Formeln (3.) und (4.) der Einleitung erhellt nämlich, dafs die Exponenten der Potenzen von q in diesen Entwicklungen eine Reihe bilden, deren erstes Glied 0 ist, und deren erste Differenzen

$$a,\ b,\ 3a,\ 2b,\ 5a,\ 3b \text{ etc.}$$

sind. Zufolge der Formeln (5.) und (6.) wird das allgemeine Glied dieser Entwicklungen

$$q^{\frac{1}{2}(a+b)i^2+\frac{1}{2}bi} \quad \text{oder} \quad (-1)^i q^{\frac{1}{2}(a+b)i^2+\frac{1}{2}bi},$$

und man erhält aus demselben die einzelnen Glieder in der Ordnung, wie die Exponenten von q der Gröfse nach auf einander folgen, wenn man dem In-

dex i nach einander die Werthe

$$0,\quad -1,\quad +1,\quad -2,\quad +2,\quad -3 \text{ etc.}$$

beilegt. Die Coëfficienten der Potenzen von q vom zweiten Gliede an werden, wenn die beiden ersten Factoren des unendlichen Products $(1-q^a)(1-q^{a+b})$ sind, abwechselnd -1, -1 und $+1$, $+1$, oder, wenn dieselben $(1+q)(1+q^{a+b})$ sind, alle $+1$. Wenn $b=0$, werden vom zweiten Gliede an immer zwei aufeinander folgende Glieder der Entwicklung einander gleich, und können daher in ein Glied, das den Coëfficienten -2 oder $+2$ erhält, zusammengezogen werden.

Es ist im Vorhergehenden immer angenommen, was unbeschadet der Allgemeinheit verstattet ist, dafs a und b positiv sind. Betrachtet man nämlich die allgemeine Form der elliptischen unendlichen Producte (1.) und (2.),

$$\Pi\{(1\pm q^{2mi+m-n})(1\pm q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})\},$$

in welcher m immer positiv sein mufs, weil sonst die Factoren nicht convergiren, so kann man darin auch n immer positiv annehmen, da das Product ungeändert bleibt, wenn man n in $-n$ verändert; es wird daher auch $b=2n$ positiv. Es kann endlich auch $n<m$ oder $m-n=a$ positiv angenommen werden. Denn setzt man in dem vorstehenden unendlichen Producte $n+2km$ statt n, so erleidet dasselbe keine weitere Veränderung, als dafs es mit einem Factor

$$\frac{1\pm q^{m-n-2km}}{1\pm q^{-m+n+2km}}\cdot\frac{1\pm q^{3m-n-2km}}{1\pm q^{-3m+n+2km}}\cdots\frac{1\pm q^{(2k-1)m-n-2km}}{1\pm q^{-(2k-1)m+n+2km}} = (\pm 1)^k q^{-(k^2m+kn)}$$

multiplicirt wird. Man kann daher n immer kleiner als $2m$ annehmen. Ist n kleiner als $2m$, aber gröfser als m, so kann man $n+m$ für n setzen, wo $n<m$. Hierdurch aber verwandeln sich die unendlichen Producte

$$\Pi(1\pm q^{2mi+m-n}),\qquad \Pi(1\pm q^{2mi+m+n})$$

in

$$(1\pm q^{-n})\Pi(1\pm q^{2mi+m+m-n}),\qquad (1\pm q^{n})^{-1}\Pi(1\pm q^{2mi+m-(m-n)}),$$

und daher die elliptischen unendlichen Producte (1.) und (2.) in andere, in welchen blofs $m-n$ für n gesetzt ist, abgesehen von einem Factor $\pm q^{-n}$, mit welchem man noch zu multipliciren hat; die Gröfse $m-n$ ist aber positiv und kleiner als m. Es können daher in allen Fällen die elliptischen unendlichen Producte (1.) und (2.) auf solche zurückgeführt werden, in welchen n positiv und kleiner als m ist, und daher $a=m-n$, $b=2n$ positiv sind.

Vermittelst der obigen Regeln ist es leicht, die Reihenentwicklungen der Zähler und Nenner der Brüche anzugeben, durch welche in den For-

meln (I.) das *Euler*sche unendliche Product ausgedrückt worden ist. Es genügt hiezu, die beiden ersten Factoren jedes Zählers und Nenners, oder auch, wenn man will, das Tableau der Werthe von a und b in (II.) zu betrachten. Nur für den Zähler des vierten Bruches, der von etwas abweichender Beschaffenheit ist, und noch die Veränderung von q in $-q$ erfordert, hat man sich der Formeln (10.) und (11.) zu bedienen. Man erhält hiernach die folgenden Ausdrücke des *Euler*schen Products, von denen der erste der von *Euler* selbst gefundene ist:

IV.

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\dots$$

$$= \frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-q^{24}-\dots}{1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-\dots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{3ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}} \quad \dots 1.$$

$$= \frac{1+q+q^3+q^6+q^{10}+q^{15}+\dots}{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-q^{24}-\dots} = \frac{\Sigma q^{2ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{3ii+i}} \quad \dots 2.$$

$$= \frac{1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}+\dots}{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\dots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}{\Sigma(-1)^i q^{ii}} \quad \dots 3.$$

$$= \frac{1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}+q^{15}+\dots}{1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\dots} = \frac{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)} q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}{\Sigma(-1)^i q^{2ii}} \quad \dots 4.$$

$$= \frac{1-q^4-q^8+q^{20}+q^{28}-q^{48}-q^{60}-\dots}{1-q-q^3+q^6+q^{10}-q^{15}-q^{21}+\dots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{6ii+2i}}{\Sigma(-1)^i q^{2ii+i}} \quad \dots 5.$$

$$= \frac{1+q+q^2+q^5+q^7+q^{12}+q^{15}+\dots}{1-2q^3+2q^{12}-2q^{27}+2q^{48}-\dots} = \frac{\Sigma q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}{\Sigma(-1)^i q^{3ii}} \quad \dots 6.$$

$$= \frac{1+q^3+q^9+q^{18}+q^{30}+q^{45}+\dots}{1-q-q^5+q^8+q^{16}-q^{21}-q^{33}+\dots} = \frac{\Sigma q^{6ii+3i}}{\Sigma(-1)^i q^{3ii+2i}} \quad \dots 7.$$

Euler benutzt am angeführten Orte die von ihm gegebne Formel

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\dots = \frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\dots}{1-q-q^2+q^5+q^7-\dots}$$
$$= 1+C_1 q+C_2 q^2+C_3 q^3+C_4 q^4+\dots,$$

um für die Coëfficienten C_i ein recurrirendes Gesetz zu erhalten. Solcher recurrirender Gesetze für die Gröfsen C_i erhält man durch die Formeln (IV.) *sieben* verschiedne. Das bequemste gewährt der vorletzte der Brüche (IV.). Derselbe giebt den Satz:

Wenn C_i die Anzahl der Zerlegungen einer Zahl i in beliebige ungleiche Zahlen oder in gleiche und ungleiche ungerade Zahlen bedeutet, so wird

$$C_i = 2\{C_{i-3}-C_{i-12}+C_{i-27}-C_{i-48}+C_{i-75}-\dots\},$$

wo man, wenn i die Form $\frac{1}{2}\{3nn \pm n\}$ hat, rechts vom Gleichheitszeichen noch $+1$ hinzufügen mufs.

Nach der *Euler*schen Recursionsformel wird jeder Coëfficient C_i durch ungefähr $\sqrt{\frac{8i}{3}}$, nach der vorstehenden Recursionsformel durch ungefähr $\sqrt{\frac{i}{3}}$ vorhergehende Coëfficienten gefunden, so dafs man nach der letztern jeden Coëfficienten aus $\sqrt{8}$ mal oder nur aus beinahe *dreimal* so wenigen vorhergehenden durch Addition und Subtraction zusammenzusetzen hat.

Wenn man in den Formeln (IV.) die beiden ersten oder den ersten und dritten von den sieben Brüchen mit einander multiplicirt, so erhält man zwei ähnliche Darstellungen auch für das *Quadrat* des *Euler*schen Productes:

V.

$$\{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots\}^2 = \Pi(1+q^{i+1})^2$$
$$= \frac{(1+q)(1+q^3)(1-q^4)(1+q^5)\ldots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots} = \frac{\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}}{\Pi(1-q^{i+1})}$$
$$= \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots}{(1-q)^2(1-q^2)(1-q^3)^2(1-q^4)\ldots} = \frac{\Pi(1-q^{2i+2})}{\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}}$$
$$= \frac{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\ldots}{1-q-q^2+q^5+q^7-\ldots} = \frac{\Sigma q^{2ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}$$
$$= \frac{1-q^2-q^4+q^{10}+q^{14}-\ldots}{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\ldots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{3ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{ii}}.$$

Wenn man die *drei* ersten Brüche in (IV.) mit einander multiplicirt, erhält man eine ähnliche Darstellung auch noch für den *Cubus* desselben Productes. Man kann aber für denselben Cubus auch eine Darstellung durch einen Bruch anderer Art erhalten, dessen Zähler und Nenner unendliche Reihen sind, in denen die Exponenten von q zwar auch eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, die Coëfficienten aber nicht mehr der positiven oder negativen Einheit gleich, sondern, abgesehen vom Zeichen, die Glieder einer arithmetischen Reihe der *ersten* Ordnung sind. Man erhält diese Darstellung mit Hülfe der in den Fund. pag. 185 (5.) gegebenen Formel,

$$\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots\}^3$$
$$= 1-3q+5q^3-7q^6+9q^{10}-\ldots = \Sigma(4i+1)q^{2ii+i},$$

und der daraus durch Verwandlung von q in q^2 abgeleiteten. Hiernach werden die beiden Ausdrücke für den *Cubus* des *Euler*schen Productes:

VI.

$$\{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots\}^3 = \Pi(1+q^{i+1})^3$$
$$= \frac{(1+q)(1+q^3)(1-q^4)(1+q^5)\ldots}{(1-q)^2(1-q^2)(1-q^3)^2(1-q^4)\ldots} = \frac{\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}}{\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}}$$
$$= \left\{\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots}\right\}^3 = \frac{\Pi(1-q^{2i+2})^3}{\Pi(1-q^{i+1})^3}$$
$$= \frac{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\ldots}{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}\ldots} = \frac{\Sigma q^{2ii+i}}{\Sigma(-1)^i q^{ii}}$$
$$= \frac{1-3q^2+5q^6-7q^{12}+9q^{20}-\ldots}{1-3q+5q^3-7q^6+9q^{10}-\ldots} = \frac{\Sigma(4i+1)q^{4ii+2i}}{\Sigma(4i+1)q^{2ii+i}}.$$

Wenn man in dieser und den vorhergehenden Formeln die Zähler und Nenner mit einander vertauscht, so erhält man die Ausdrücke für das unendliche Product

$$(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\ldots,$$

so wie für sein Quadrat und seinen Cubus.

Ich will jetzt das unendliche Product, durch welches Fund. S. 83 die 4te Wurzel des Complements des Moduls der elliptischen Functionen ausgedrückt wird,

$$\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)(1+q^7)\ldots} = \sqrt[4]{k'}$$

als Quotienten zweier elliptischen unendlichen Producte von der hier betrachteten Art darstellen. Es kann auch dies auf mehrere Arten geschehen, wie aus den folgenden leicht zu beweisenden Formeln erhellt:

VII.

$$\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots} = \frac{\Pi(1-q^{2i+1})}{\Pi(1+q^{2i+1})}$$
$$= \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots}{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)\ldots} = \frac{\Pi(1-q^{i+1})}{\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{2i+2})\}} \quad \ldots 1.$$
$$= \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^4)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1-q^4)\ldots} = \frac{\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}}{\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}} \quad \ldots 2.$$
$$= \frac{(1-q)^2(1-q^2)(1-q^3)^2\ldots}{(1-q^2)^2(1-q^4)(1-q^6)^2\ldots} = \frac{\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}}{\Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})\}} \quad \ldots 3.$$
$$= \frac{(1-q^2)^2(1-q^4)(1-q^6)^2\ldots}{(1+q)^2(1-q^2)(1+q^3)^2\ldots} = \frac{\Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})\}}{\Pi\{(1+q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}} \quad \ldots 4.$$

Die Zähler und Nenner der vorstehenden vier Brüche, durch welche das vorgelegte unendliche Product ausgedrückt werden kann, gehören sämmtlich zu den elliptischen unendlichen Producten, welche in den Formeln (9.) entwickelt sind, aufser dem Nenner des ersten, der noch die Verwandlung von q in $-q$ erfordert, und in der Formel (10.) oder (11.) entwickelt ist. Substituirt man

diese Reihenentwicklungen, die man auch mittelst der oben gegebnen Regeln aus den beiden ersten Factoren der unendlichen Producte ableiten kann, so erhält man die folgenden Formeln:

VIII.

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-\ldots}{1+q-q^2-q^5-q^7-q^{12}+\ldots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}}{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)} q^{\frac{1}{2}(3ii+i)}} \quad \ldots \quad 1.$$

$$= \frac{1-q-q^3+q^6+q^{10}+\ldots}{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\ldots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{2ii+i}}{\Sigma q^{2ii+i}} \quad \ldots \quad 2.$$

$$= \frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-\ldots}{1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\ldots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{ii}}{\Sigma(-1)^i q^{2ii}} \quad \ldots \quad 3.$$

$$= \frac{1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\ldots} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{2ii}}{\Sigma q^{ii}} \quad \ldots \quad 4.$$

Die beiden letzten Brüche können aus einander durch die Betrachtung abgeleitet werden, dafs das vorgelegte Product, wenn man q in $-q$ verändert, den reciproken Werth annimmt. Wenn man diese beiden Brüche mit einander multiplicirt, so heben der Nenner des ersten und der Zähler des zweiten einander auf, und man erhält für das *Quadrat* des vorgelegten Products oder für $\sqrt{k'}$ den in den Fund. S. 184 angegebnen Ausdruck.

Die 4te Wurzel des Moduls selbst wird zufolge Fund. S. 89 (7.),

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\cdot\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\cdot\frac{(1-q)(1+q^2)(1-q^3)(1+q^4)\ldots}{(1-q^2)(1-q^6)(1-q^{10})(1-q^{14})\ldots}.$$

Wenn man wieder das in $\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}$ multiplicirte unendliche Product durch einen Bruch auszudrücken sucht, dessen Zähler und Nenner zu den elliptischen unendlichen Producten (1.) oder (2.) oder den daraus durch Verwandlung von q in $-q$ abgeleiteten gehören, so kann dies durch die folgenden *vier* Formeln geschehn:

IX.

$$\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots} = \frac{\Pi(1+q^{2i+2})}{\Pi(1+q^{2i+1})}$$

$$= \frac{(1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})\ldots}{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)\ldots} = \frac{\Pi(1-q^{4i+4})}{\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{2i+2})\}} \quad \ldots \quad 1.$$

$$= \frac{(1+q^2)(1+q^6)(1-q^8)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1-q^4)\ldots} = \frac{\Pi\{(1+q^{4i+2})(1-q^{8i+8})\}}{\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}} \quad \ldots \quad 2.$$

$$= \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^4)\ldots}{(1-q^2)^2(1-q^4)\ldots} = \frac{\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}}{\Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})\}} \quad \ldots \quad 3.$$

$$= \frac{(1+q)(1+q^3)(1-q^4)\ldots}{(1+q)^2(1-q^2)\ldots} = \frac{\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}}{\Pi\{(1+q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}} \quad \ldots \quad 4.$$

Hieraus ergeben sich mit Hülfe der Formeln (9 — 11.) die folgenden vier Ausdrücke von $\sqrt[4]{k}$:

X.

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\cdot\frac{1-q^4-q^8+q^{20}+\cdots}{1+q-q^2-q^5-\cdots} = \frac{\sqrt{2}\,.\sqrt[8]{q}\,\Sigma(-1)^i\,q^{6i^2+2i}}{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)}\,q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}} \quad \ldots \quad 1.$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\cdot\frac{1+q^2+q^6+q^{12}+\cdots}{1+q+q^3+q^6+\cdots} = \frac{\sqrt{2}\,.\sqrt[8]{q}\,\Sigma q^{4i^2+2i}}{\Sigma q^{2i^2+i}} \quad \ldots \quad 2.$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\cdot\frac{1-q-q^3+q^6+\cdots}{1-2q^2+2q^8-\cdots} = \frac{\sqrt{2}\,.\sqrt[8]{q}\,\Sigma(-1)^i\,q^{2i^2+i}}{\Sigma(-1)^i\,q^{2i^2}} \quad \ldots \quad 3.$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt[8]{q}\cdot\frac{1+q+q^3+q^6+\cdots}{1+2q+2q^4+\cdots} = \frac{\sqrt{2}\,.\sqrt[8]{q}\,\Sigma q^{2i^2+i}}{\Sigma q^{i^2}} \quad \ldots \quad 4.$$

Wenn man den zweiten und vierten Bruch mit einander multiplicirt, so hebt sich der Nenner des zweiten mit dem Zähler des vierten, und man erhält die Fund. S. 184 für $\sqrt{k}$ gegebne Formel. Man sieht, dafs die für $\sqrt[4]{k}$ und die für $\sqrt[4]{k'}$ gefundnen vier Brüche respective *dieselben Nenner* haben, was in den Anwendungen dieser Formeln von Wichtigkeit ist.

Von besonderm Interesse sind in diesen Formeln diejenigen Brüche, in welchen der Zähler aus dem Nenner, wie in IV. (1.), X. (2.), oder der Nenner aus dem Zähler, wie in VIII. (3.), durch Verwandlung von q in q^2 erhalten wird. Wenn man nämlich in solchem Bruche wiederholt q^2 für q substituirt, und die dadurch erhaltenen Resultate mit einander multiplicirt, so giebt die unendliche Multiplication den Zähler oder Nenner des Bruchs. Zugleich wird durch dieses Verfahren aus jedem Factor $1+q^\alpha$ ein Factor $\frac{1}{1-q^\alpha}$. Wenn daher, wie in den angeführten Fällen, diese Brüche unendlichen Producten gleich sind, welche aus Factoren $(1+q^\alpha)^{\pm\alpha}$ gebildet werden können, so kann man aus denselben sogleich auch diejenigen unendlichen Producte ableiten, welchen die Zähler und die Nenner der Brüche für sich besonders gleich werden. Diese Methode ist in der Theorie der elliptischen Functionen von grofser Wichtigkeit, indem sie dazu dient, aus den leichter zu findenden Formeln für den Modul die Factoren- und Reihenentwicklung des ganzen elliptischen Integrals abzuleiten.

Die im Vorhergehenden aufgestellten Formeln geben eine Gleichung zwischen je zwei Brüchen, durch welche man dasselbe unendliche Product ausgedrückt hat. Aus jeder dieser Gleichungen geht durch Multipliciren über Kreuz eine andere zwischen zwei Producten hervor, von denen jedes durch Multiplica-

tion zweier elliptischer unendlicher Producte oder elliptischer unendlicher Reihen gebildet wird, welche aus (1.) oder (2.) für specielle Werthe von m und n erhalten werden. Solcher Gleichungen wird es überhaupt so viele geben, als es unendliche Producte giebt, die man auf verschiedne Art in zwei elliptische unendliche Producte von der Form der unendlichen Producte (1.) oder (2.) zerfällen kann. Man wird 21 Gleichungen dieser Art aus (IV.), *zwei* neue aus (VIII.) und *zwei* andere aus (X.), ferner *eine* Gleichung aus (VI.) erhalten. Die übrigen Gleichungen, welche man noch aus (VIII.), (X.) und (V.) ableiten kann, sind in diesen enthalten.

Die Producte von der Form

$$\Sigma \pm q^{mi^2+ni} . \Sigma \pm q^{m'i^2+n'i},$$

welche sich auf jeder Seite des Gleichheitszeichens der auf die angegebene Art erhaltenen Gleichungen befinden, können durch *Doppelsummen* von der Form

$$\Sigma \pm q^{mi^2+m'k^2+ni+n'k}$$

dargestellt werden, in welchen jedem der Indices i und k die Werthe 0, ± 1, ± 2, ± 3, etc. zukommen. In den hier und weiter unten betrachteten Doppelsummen dieser Art sind $2m$ und $2n$ und eben so $2m'$ und $2n'$ ganze positive Zahlen, und zwar gleichzeitig gerade oder ungerade. Das Zeichen $\pm$ erhält in den verschiedenen Fällen Werthe von der Form

$$(-1)^i, \quad (-1)^{i+k}, \quad (-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)}, \quad (-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)+k}.$$

Nur in der einen Gleichung, welche aus den Brüchen X. (2. 4.) entspringt, haben alle Glieder in beiden Doppelsummen das Vorzeichen $+$; in diesem Falle werden die *einzelnen* Glieder der Doppelsummen identisch, wodurch die Gleichung einen ganz elementaren Character erhält. In allen übrigen sind die quadratischen Formen, in denen die Exponenten der beiden einander gleichen Doppelsummen enthalten sind, nicht äquivalent, so dafs nicht jede in der einen enthaltene Zahl nothwendig auch in der andern enthalten ist. Es müssen daher die Vorzeichen der Glieder in beiden Doppelsummen abwechselnd positiv und negativ sein, damit sich in jeder derselben alle Glieder, deren Exponenten nicht in beiden quadratischen Formen zugleich enthalten sind, gegenseitig zerstören können.

Zu den auf die angegebne Art aus den obigen Formeln abgeleiteten Gleichungen können noch *drei* andere etwas mehr verborgene hinzugefügt werden, zu welchen man durch folgende Betrachtungen gelangt.

Aus der Formel (5.) der Einleitung folgt für $m = \frac{5}{2}$, $n = \frac{3}{2}$ und für $m = \frac{5}{2}$, $n = \frac{1}{2}$,

$$\Pi\{(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+4})(1-q^{5i+5})\} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i^2+3i)},$$
$$\Pi\{(1-q^{5i+2})(1-q^{5i+3})(1-q^{5i+5})\} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i^2+i)}.$$

Die Multiplication dieser beiden Formeln ergiebt, wenn man die letzte der Gleichungen (9.) benutzt,

$$12. \qquad \Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{5i+5})\} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(5i^2+5k^2+3i+k)}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3i^2+15k^2+i+5k)}.$$

Es ist ferner

$$\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{8i+8})^2\}$$
$$= \Pi\{(1-q^{8i+1})(1-q^{8i+7})(1-q^{8i+8})\}.\Pi\{(1-q^{8i+3})(1-q^{8i+5})(1-q^{8i+8})\}$$
$$= \Pi\{(1-q^{4i+1})(1-q^{4i+3})(1-q^{4i+4})\}.\Pi\{(1+q^{16i+4})(1+q^{16i+12})(1-q^{16i+16})\},$$

und daher, wenn man nach einander in (5.) $m=4$, $n=3$; $m=4$, $n=1$; $m=2$, $n=1$, und in (6.) $m=8$, $n=4$ setzt:

$$13. \qquad \Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{8i+8})^2\} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{4i^2+4k^2+3i+k}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{2i^2+8k^2+i+4k}.$$

Ferner ist

$$\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{12i+12})^2\}$$
$$= \Pi\{(1-q^{12+1})(1-q^{12i+11})(1-q^{12i+12})\}.\Pi\{(1-q^{12i+5})(1-q^{12i+7})(1-q^{12i+12})\}$$
$$= \Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}.\Pi\{(1+q^{24i+6})(1+q^{24i+18})(1-q^{24i+24})\},$$

und daher, wenn man nach einander in (5.) $m=6$, $n=5$; $m=6$, $n=1$; $m=3$, $n=2$, und in (6.) $m=12$, $n=6$ setzt,

$$14. \qquad \Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{12i+12})^2\} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{6i^2+6k^2+5i+k}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{3i^2+12k^2+2i+6k}.$$

Diese drei Formeln sind auf analoge Art gebildet, und entsprechen respective den Zahlen 5, 8, 12. Es scheint nicht, dafs es noch mehrere ähnlich gebildete giebt.

Die hier betrachteten Doppelsummen

$$\Sigma \pm q^{mi^2+m'k^2+ni+n'k}$$

werden durch das Gesetz der Vorzeichen ihrer Glieder und durch die quadratischen Formen definirt, in welchen die Exponenten derselben enthalten sind. Der Character dieser Formen, in welchen $2m$ und $2m'$ ganze positive Zahlen sind, wird hauptsächlich von dem Producte $4mm'$ abhängen, welches man von einem quadratischen Factor, wenn es solchen hat, befreit. Ich will daher die Gleichungen, welche man zwischen zwei Doppelsummen der angegebnen Art findet, nach den Werthen, welche die von ihren quadratischen Factoren be-

freiten Zahlen $4mm'$ in der einen und der andern Doppelsumme annehmen, in verschiedne Classen theilen. Es soll hiebei mit

$$(\mu, \nu)$$

die Classe bezeichnet werden, welche alle diejenigen Gleichungen umfafst, in denen der Werth von $4mm'$ für die eine Doppelsumme μ, für die andere ν ist, oder sich von diesen Zahlen nur durch einen quadratischen Factor unterscheidet.

Unter den zwischen Doppelsummen der angegebnen Art gefundenen Gleichungen können diejenigen als von mehr elementarer Natur angesehen werden, in welchen $\mu = \nu$, oder in welchen $4mm'$ für die beiden einander gleichen Doppelsummen entweder denselben Werth oder zwei nur durch einen quadratischen Factor unterschiedene annimmt. Von dieser Art Gleichungen enthält die hier unten folgende Formelntabelle drei Classen (1, 1), (2, 2), (3, 3). Eine zu einer Classe (6, 6) gehörige Gleichung geht aus den im Vorhergehenden gefundnen Formeln nicht hervor. Die Gleichungen dieser drei Classen lassen sich alle unmittelbar beweisen, d. h. ohne dafs hiezu ein besonderer Satz der Analysis oder Arithmetik zu Hülfe genommen zu werden braucht. Wenn solche unmittelbare Verification keine neuen merkwürdigen Resultate giebt, so gewährt sie das Mittel, zu Resultaten, welche auf einem sogenannten indirecten Wege, wie hier durch die Zerfällung der unendlichen Reihen in unendliche Producte, in einem allgemeinern Zusammenhange gefunden sind, auf einem elementaren und directen Wege zu gelangen. Man bewerkstelligt solche Verification durch eine Art von Synthesis, durch welche die auf indirectem Wege gefundnen Resultate auf reine Identitäten zurückgeführt werden. Diese Synthesis ist in allen Fällen, in welchen sie möglich ist, von Interesse. Die gefundnen Identitäten geben nämlich entweder verborgne Eigenschaften der Gröfsen, die oft einem heterogenen Gebiet angehören, oder, wenn sie evident sind, einfache und directe Beweise und bisweilen neue Methoden. Übrigens sind gerade diese elementareren Gleichungen, welche den Classen (μ, μ) angehören, wichtiger Verallgemeinerungen fähig.

Die Classen, in denen μ und ν von einander verschieden sind, oder in denen die Werthe, die $4mm'$ für die beiden einander gleichen Doppelsummen annimmt, weder die nämlichen sind, noch sich blofs durch einen quadratischen Factor unterscheiden, sind auf den Fall bezüglich, wenn die Entwicklung der unendlichen Producte nur solche Glieder giebt, deren Exponenten in zwei wesentlich verschiedenen quadratischen Formen zugleich enthalten sind. Man findet aus den obigen Formeln *sechs* Classen dieser Art, welche den Com-

binationen je zweier von den Zahlen 1, 2, 3, 6 entsprechen, und aufserdem noch eine Classe, welche der Combination der Zahlen 1 und 5 entspricht, aber nur *eine* Gleichung enthält. Die hier folgende Formelntabelle wird daher *zehn* Classen Gleichungen enthalten, deren Character durch die Symbole

$$(1,\,1),\quad (2,\,2),\quad (3,\,3),\quad (1,\,2),\quad (1,\,3),$$
$$(1,\,6),\quad (2,\,3),\quad (2,\,6),\quad (3,\,6),\quad (1,\,5)$$

bezeichnet wird. Bei jeder Formel habe ich die Gleichung angemerkt, aus der sie erhalten worden ist.

[*In den unendlichen Producten sind dem Index i die Werthe* 0, 1, 2, 3 *etc., in den Doppelsummen den Indices i und k die Werthe* 0, ±1, ±2, ±3 *etc. beizulegen.*]

A. (1, 1).

1. $\Pi\{(1+q^{2i+1})^2(1-q^{4i+4})^2\}$

$= \Sigma q^{2i^2+2k^2+i+k} = \Sigma q^{i^2+4k^2+2k}$ . . . . X. 2. 4.

2. $\Pi\{(1-q^{6i+2})(1-q^{3i+3})^2(1-q^{6i+4})\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+3kk+i} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+kk+i+k)}$ . . . . IV. 1. 6.

3. $\Pi\{(1-q^{3i+1})(1-q^{3i+2})(1-q^{6i+6})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+3kk+i+2k} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+12kk+i+6k)}$ . . . . . IV. 1. 7.

4. $\Pi\{(1-q^{4i+2})^4(1-q^{4i+4})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{2ii+2kk} = \Sigma(-1)^i q^{ii+kk}$ . . . . VIII. 3. 4.

5. $\Pi\{(1-q^{4i+2})(1-q^{4i+4})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{4ii+4kk+2i} = \Sigma(-1)^k q^{2ii+2kk+i+k}$ *) . . . . B. D.

6. $\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{8i+8})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{4ii+4kk+i+3k} = \Sigma(-1)^i q^{2ii+8kk+i+4k}$ . . . . 13.

7. $\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{12i+12})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{6ii+6kk+i+5k} = \Sigma(-1)^i q^{3ii+12kk+2i+6k}$ . . . . 14.

8. $\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})^4\}$

$= \Sigma(4k+1) q^{2ii+2kk+i+k} = \Sigma(-1)^i(4k+1) q^{ii+4kk+2k}$ . . . . VI.

---

*) Die Formel (A. 5.) ergiebt sich aus der Combination der Formeln (B.) und (D.).

B. (2, 2).

1. $\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{2i+2})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i+2k)} = \Sigma(-1)^i q^{ii+2kk+k}$ ..... IV. 2. 3. V.

2. $\Pi\{(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+6})^2\}$

$= \Sigma(-1)^k q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i+4k)} = \Sigma(-1)^k q^{6ii+3kk+3i}$ .... IV. 6. 7.

C. (3, 3).

$\Pi(1-q^{2i+2})^2$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{6ii+2kk+2i} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i+2k)}$

$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i+2k)}$ .... IV. 4. 5.

D. (1, 2).

1. $\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{2i+2})^2\}$

$= \Sigma(-1)^k q^{2ii+2kk+i} = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i+2k)}$

$= \Sigma(-1)^k q^{ii+2kk+k}$ .... VIII. 2. 4. IV. 2. 4. X. 3. 4.

2. $\Pi\{(1-q^{4i+2})(1-q^{4i+4})^2\}$

$= \Sigma(-1)^k q^{2ii+2kk+i+k} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+6kk+i+2k}$

$= \Sigma(-1)^i q^{2ii+4kk+2k}$ .... IV. 2. 5. X. 2. 3.

3. $\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{2i+2})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{2ii+2kk+k} = \Sigma(-1)^i q^{ii+2kk+k}$ .... VIII. 2. 3.

E. (1, 3).

1. $\Pi(1-q^{i+1})^2$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+3kk+i+k)} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+kk+i}$ ...... IV. 1. 3.

2. $\Pi(1-q^{2i+2})^2$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+3kk+i+k} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i+2k)}$ ...... IV. 1. 2.

F. (1, 6).

1. $\Pi\{(1-q^{4i+2})^3(1-q^{4i+4})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+3kk+i+k)} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+2kk+i}$ .... IV. 1. 4.

2. $\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+2})(1-q^{4i+4})^2\}$

$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3ii+12kk+i+4k)} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{3ii+2kk+i+k}$ .... IV. 1. 5.

G. (2, 3).

1. $\Pi\{(1+q^{6i+1})(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1+q^{6i+5})(1-q^{12i+6})^3(1-q^{12i+12})^2\}$
$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)+k}q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i)} = \Sigma(-1)^k q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i)}$ . . . . IV. 4. 6.

2. $\Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1+q^{6i+3})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+12})^2\}$
$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)+k}q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i+4k)} = \Sigma(-1)^k q^{6ii+2kk+3i}$ . . . . IV. 4. 7.

3. $\Pi\{(1-q^{6i+3})^2(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+12})^2\}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{6ii+3kk+2i} = \Sigma(-1)^k q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i+2k)}$ . . . . IV. 5. 6.

4. $\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{12i+4})(1-q^{6i+5})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+12})^2\}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{6ii+3kk+2i+k} = \Sigma(-1)^k q^{6ii+2kk+3i+k}$ . . . . IV. 5. 7.

H. (2, 6).

1. $\Pi\{(1-q^{3i+1})(1-q^{3i+2})(1-q^{6i+3})^3(1-q^{6i+6})^2\}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i)} = \Sigma(-1)^k q^{\frac{1}{2}(3ii+2kk+i)}$ . . . . IV. 3. 6.

2. $\Pi\{(1-q^{6i+1})^2(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+5})^2(1-q^{6i+6})^2\}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i+4k)} = \Sigma(-1)^k q^{6ii+kk+3i}$ . . . . IV. 3. 7.

3. $\Pi\{(1+q^{6i+1})(1-q^{6i+3})(1-q^{12i+4})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+6})^2(1-q^{12i+8})\}$
$= \Sigma(-1)^k q^{\frac{1}{2}(3ii+6kk+i+2k)} = \Sigma(-1)^k q^{2ii+3kk+i}$ . . . . IV. 2. 6.

4. $\Pi\{(1-q^{6i+2})(1+q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+12})^2\}$
$= \Sigma(-1)^k q^{6ii+3kk+3i+k} = \Sigma(-1)^k q^{2ii+3kk+i+2k}$ . . . . IV. 2. 7.

I. (3, 6).

1. $\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+2})^3(1-q^{4i+4})^2\}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i)} = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)+k}q^{\frac{1}{2}(3ii+2kk+i)}$ VIII. 1. 3; 1. 4; IV. 3. 4.

2. $\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{4i+2})(1-q^{4i+4})^2\}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{\frac{1}{2}(3ii+4kk+i+2k)} = \Sigma(-1)^{i+k}q^{6ii+kk+2i}$ . . . . . X. 1. 4; IV. 3. 5.

3. $\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})^2\}$
$= \Sigma(-1)^k q^{2i^2+6k^2+i+2k} = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)}q^{\frac{1}{2}(8i^2+3k^2+4i+k)}$ . . . . X. 1. 2.

K. (1, 5).

$\Pi\{(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+2})(1-q^{5i+3})(1-q^{5i+4})(1-q^{5i+5})^2\}$
$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{\frac{1}{2}(5ii+5kk+3i+k)} = \Sigma(-1)^{i+k}q^{\frac{1}{2}(3ii+15kk+i+5k)}$ . . . . 12.

Anmerkung. Die *drei* Formeln A. (2), A. (4), A. (5) sind particuläre Fälle einer *allgemeinern* Formel. Man hat nämlich, wie sich auf den ersten Anblick ergiebt, die folgende Gleichung,

$$\Pi\{(1+q^{2mi+m-n})(1+q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})\}.\Pi\{(1-q^{2mi+m-n})(1-q^{2mi+m+n})(1-q^{2mi+2m})\}$$
$$=\Pi\{(1-q^{4mi+2m-2n})(1-q^{4mi+2m+2n})(1-q^{4mi+4m})\}.\Pi\{(1-q^{4mi+2m})^2(1-q^{4mi+4m})\},$$

woraus sich vermöge der Formeln (5.) und (6.) der Einleitung die folgende Gleichung zwischen zwei Doppelsummen ergiebt,

$$15. \quad \Sigma(-1)^k q^{m(i^2+k^2)+n(i+k)} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{2m(i^2+k^2)+2ni}.$$

Die drei Formeln A. (2), A. (4), A. (5) werden hieraus erhalten, wenn man respective $m=\frac{3}{2}$, $n=1$; $m=1$, $n=0$; $m=2$, $n=1$ setzt.

Ich will noch einiges über die Art bemerken, wie in der vorstehenden Formentabelle die unendlichen Producte ausgedrückt worden sind. Diese unendlichen Producte können nämlich auf mannichfache Art dargestellt werden, wie alle, welche durch Multiplication einfacher unendlicher Producte von der Form $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})$ oder ihrer Potenzen gebildet werden. Man bewerkstelligt ihre Transformationen, indem man die einfachen unendlichen Producte $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})$, welche ihre Factoren bilden, in mehrere ähnliche unendliche Producte zerfällt. Dies geschieht mittelst der Formel

$$16. \quad \Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta}) = \Pi(1\pm q^{p\alpha i+\beta})\,\Pi(1\pm q^{p\alpha i+\alpha+\beta})\,\Pi(1\pm q^{p\alpha i+2\alpha+\beta})\ldots$$
$$\ldots\Pi(1\pm q^{p\alpha i+(p-1)\alpha+\beta}),$$

in welcher p eine beliebige positive ganze Zahl bedeuten kann, und immer das obere oder immer das untere Zeichen zu nehmen ist. Mehrere von den unendlichen Producten, welche aus solchen Zerfällungen von von einander verschiedenen unendlichen Producten $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})$, $\Pi(1\pm q^{\alpha' i+\beta'})$, etc. hervorgehen, kann man dann bisweilen wieder umgekehrt mittelst derselben Formel in ein einziges einfaches unendliches Product zusammenziehen. Wenn aus den vorgenommnen Zerfällungen zwei Factoren $\Pi(1+q^{\alpha i+\beta})$, $\Pi(1-q^{\alpha i+\beta})$ entstehen, wird man dieselben ebenfalls in ein einziges einfaches unendliches Product $\Pi(1-q^{2\alpha i+2\beta})$ zusammenziehen können. Endlich wird man das Product $\Pi(1+q^{\alpha i+\alpha})\,\Pi(1-q^{2\alpha i+\alpha})$, welches der Einheit gleich ist, so oft dasselbe nach den geschehnen Zerfällungen angetroffen wird, fortwerfen können. Durch diese Verfahrungsarten kann man demselben Ausdruck unendlich viele Formen geben, und es werden bisweilen selbst die einfachsten Formen, welche derselbe annehmen kann, noch so verschieden unter einander sein können, dafs ihre Identität nicht sogleich in die Augen springt.

Unter den verschiednen Formen, welche die hier betrachteten unendlichen Producte durch die im Vorigen angedeuteten Zerfällungen und Zusammenziehungen erhalten, kann man einige als *Normalformen* ansehen. *Es soll ein Ausdruck*

$$\Pi\{(1\pm q^{\alpha i+\beta})^r(1\pm q^{\alpha' i+\beta'})^{r'}(1\pm q^{\alpha'' i+\beta''})^{r''}\ldots\}$$

eine Normalform haben, wenn die unendlichen Producte $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})$, $\Pi(1\pm q^{\alpha' i+\beta'})$, *etc. keine gemeinschaftlichen Factoren oder nicht solche Factoren haben, die sich nur durch die Vorzeichen der gleichnamigen Potenzen von* q *unterscheiden.* Es werden daher die arithmetischen Reihen, welche die Exponenten $\alpha i+\beta$, $\alpha' i+\beta'$, etc. bilden, wenn man der Gröfse i die Werthe 0, 1, 2, 3, etc. in inf. giebt, lauter von einander verschiedene Zahlen enthalten müssen. Hiezu ist erforderlich, *dafs keine zwei von den Zahlen* α, α', α'', *etc. relative Primzahlen sind, und, wenn* f *den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen* α *und* α' *bedeutet, die entsprechenden Zahlen* β *und* β', *durch* f *dividirt, nicht denselben Rest lassen.*

Wenn mehrere von den einfachen unendlichen Producten, deren Potenzen, mit einander multiplicirt, eine Normalform bilden, in dieselbe Potenz erhoben sind, und es möglich ist, dieselben mittelst der obigen Formel (16.) in ein einziges einfaches unendliches Product zusammenzuziehen, so wird durch diese Zusammenziehung die Normalform nicht aufhören eine solche zu sein, zugleich aber eine einfachere Gestalt gewinnen. Wenn keine solche Zusammenziehung einer Normalform mehr Statt finden kann, wird man sagen, dafs sie einen einfachsten Ausdruck hat. In solchen *einfachsten Normalformen* sind die in der Formelntabelle enthaltnen unendlichen Producte dargestellt worden. Es kann aber bisweilen *mehrere* einfachste Normalformen desselben unendlichen Productes geben, und es wird vorkommen können, dafs zwei einfachste Normalformen auch *dieselbe Anzahl* Factoren von der Form $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})^r$ haben. So wird z. B. das unendliche Product

$$\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+3})\},$$

welches bereits eine Normalform hat, in die beiden verschiednen Formen

$$\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+4})\},\qquad \Pi\{(1-q^{3i+1})(1-q^{3i+2})(1-q^{6i+3})\}$$

zusammengezogen werden können, von denen jede eine einfachste Normalform ist, und aus derselben Anzahl einfacher unendlicher Producte gebildet wird. Es ist jedoch zu bemerken, dafs die unendlichen Producte der Formelntabelle alle nur die eine dort angegebne einfachste Normalform haben.

Schätzt man die Einfachheit der Formen desselben unendlichen Products nach der Anzahl der Factoren $\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta})^r$, welche in einander multi-

plicirt werden, so werden die einfachsten Normalformen gewöhnlich nicht die an sich einfachsten Formen sein, welche das unendliche Product überhaupt annehmen kann. Solcher an sich einfachster Formen wird es für dasselbe unendliche Product in der Regel mehrere geben. Um eine an sich einfachste Form, welche keine Normalform ist, in eine Normalform zu verwandeln, sind Zerfällungen nöthig, durch welche die Anzahl der Factoren $\Pi(1 \pm q^{\alpha i+\beta})^r$ gewöhnlich sehr vermehrt wird. Es treten zwar auch anderseits wieder Vereinfachungen dadurch ein, dafs die durch die Zerfällungen ermittelten gleichen Factoren eine Potenz bilden; ferner wenn je zwei $1+q^{\alpha i+\beta}$, $1-q^{\alpha i+\beta}$ in den einen $1-q^{2\alpha i+2\beta}$ vereinigt und Producte $\Pi(1+q^{\alpha i+\alpha})\Pi(1-q^{2\alpha i+\alpha})$ fortgeworfen werden können; endlich, wenn man mittelst der oben aufgestellten Formel mehrere Factoren $\Pi(1 \pm q^{\alpha i+\beta})^r$, in denen der Exponent r derselbe ist, in einen einzigen zusammenziehen kann. Aber die Anzahl der Factoren $\Pi(1 \pm q^{\alpha i+\beta})^r$ pflegt hiedurch nicht so verringert zu werden, dafs dadurch ihre durch die erforderten Zerfällungen entstandene Vermehrung aufgewogen würde. Dessenungeachtet habe ich den unendlichen Producten der Formelntabelle die *Normalform* gegeben, weil sich aus derselben durch die blofse Substitution der Werthe von i die wirkliche Darstellung der unendlichen Producte in der Form

$$(1 \pm q^a)^r (1 \pm q^{a'})^{r'} (1 \pm q^{a''})^{r''} \ldots,$$

in welcher die Exponenten a, a', a'', etc. lauter verschiedene Werthe haben, ohne weitere Reductionen ergiebt. Ich habe es nicht für nöthig gehalten, die hiezu erforderlichen Transformationen näher auseinanderzusetzen, da sich dieselben in den einzelnen Fällen leicht ergeben. Es wird genügen, das Verfahren an einem Beispiel zu erläutern, wozu ich das unendliche Product H. (3) wählen will.

Die beiden Doppelsummen, welche in der Formel H. (3) einander gleich werden, wurden durch die Reihenentwicklung der vier elliptischen unendlichen Producte

$$\Pi\{(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+3})\}, \qquad \Pi(1-q^{2i+2}),$$
$$\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}, \qquad \Pi\{(1-q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})\}$$

gefunden, von denen das Product der beiden ersten gleich dem Product der beiden letzten ist. Um von diesen beiden einander gleichen Ausdrücken

$$\Pi\{(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+3})(1-q^{2i+2})\},$$
$$\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})(1-q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})\}$$

den ersten auf eine Normalform zu bringen, zerfällt man mittelst der Formel (16.) jeden seiner drei ersten unter dem Zeichen Π enthaltnen Factoren in *zwei*, den

vierten in ***drei*** Factoren. Hierdurch erhält man

$$\Pi\left\{\begin{matrix}(1+q^{6i+1})(1+q^{6i+4})(1+q^{6i+2})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+6})\\ \cdot(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+6})\end{matrix}\right\},$$

oder, wenn man die Gleichungen

$$(1+q^{6i+2})(1-q^{6i+2}) = 1-q^{12i+4}, \qquad (1+q^{6i+4})(1-q^{6i+4}) = (1-q^{12i+8})$$

substituirt,

$$\Pi\{(1+q^{6i+1})(1-q^{6i+3})(1+q^{6i+5})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})(1-q^{6i+6})^2\},$$

welches die dem unendlichen Producte in der Formel H. (3) gegebne Normalform ist. Das andere unendliche Product entsteht durch Multiplication der beiden unendlichen Producte

$$\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{6i+3})^2\}, \qquad \Pi\{(1-q^{4i+4})(1-q^{6i+6})\},$$

welche ursprünglich keinen Factor mit einander gemeinschaftlich haben, und daher für sich besonders transformirt werden können. Es ist

$$\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{6i+3})^2\} = \Pi\{(1+q^{6i+1})(1+q^{6i+3})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+3})^2\}$$
$$= \Pi\{(1+q^{6i+1})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+3})(1-q^{12i+6})\},$$
$$\Pi\{(1-q^{4i+4})(1-q^{6i+6})\} = \Pi\{(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+12})^2(1-q^{12i+6})\}.$$

In dieser transformirten Form erhalten die beiden unendlichen Producte den Factor $\Pi(1-q^{12i+6})$ gemeinschaftlich; ihr Product wird daher den Factor $\Pi(1-q^{12i+6})^2$ haben, welcher sich mit dem Factor $\Pi(1-q^{12i+12})^2$ in den einen $\Pi(1-q^{6i+6})^2$ vereinigen läfst. Nach dieser Reduction giebt die Multiplication der beiden vorstehenden unendlichen Producte wieder die obige Normalform. Diese Normalform hat unter dem Zeichen Π ***sechs*** Factoren von der Form $(1\pm q^{\alpha i+\beta})^r$, während die beiden ursprünglich gegebnen unendlichen Producte, welche an sich einfachste sind, nur ***vier*** dergleichen enthielten. Andere einfachste Formen desselben unendlichen Products sind

$$\Pi\{(1+q^{i+1})(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+4})(1-q^{3i+3})^2\}$$
$$= \Pi\{(1+q^{i+1})(1-q^{2i+2})(1-q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})\}$$
$$= \Pi\{(1+q^{i+1})(1-q^{2i+2})(1-q^{3i+3})(1-q^{6i+3})\}$$
$$= \Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})(1-q^{3i+3})(1-q^{6i+3})\}.$$

Verwandelt man q in $-q$, so wird die einfachste Normalform ein unendliches Product, das ebenfalls nur ***vier*** Factoren der angegebnen Art enthält,

$$\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{6i+6})^2(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})\}.$$

Ähnliche Vereinfachungen erhalten durch die Änderung von q in $-q$ mehrere in der Formeltabelle enthaltne unendliche Producte.

Wenn man in einer gegebnen Normalform

$$\Pi\{(1\pm q^{\alpha i+\beta})^{r}(1\pm q^{\alpha' i+\beta'})^{r'}(1\pm q^{\alpha'' i+\beta''})^{r''}\ldots\}$$

die Werthe von i substituirt, mufs man die einzelnen Factoren $(1\pm q^{a})^{r}$ noch so ordnen, dafs die Exponenten a der Gröfse nach auf einander folgen. Um eine Normalform zu erhalten, in welcher diese Ordnung schon in dem allgemeinen Ausdruck selbst befolgt ist, so dafs es blofs der Substitution der Werthe von i bedarf, mufs man dem unendlichen Producte die Form

$$\Pi\{(1\pm q^{Ni+P})^{s}(1\pm q^{Ni+P'})^{s'}(1\pm q^{Ni+P''})^{s''}\ldots\}$$

geben, in welcher der Coëfficient von i in allen unter dem Zeichen Π enthaltenen Factoren derselbe ist, und die Zahlen P, P', P'', etc. der Gröfse nach geordnet sind. Für den Coëfficienten von i oder N kann man die kleinste Zahl nehmen, welche durch alle Zahlen α, α', α'', etc. theilbar ist. Man erhält dann die gesuchte Form, indem man jeden der einzelnen Factoren der gegebnen Normalform,

$$\Pi(1\pm q^{\alpha i+\beta}),\qquad \Pi(1\pm q^{\alpha' i+\beta'}),\qquad \Pi(1\pm q^{\alpha'' i+\beta''}),\ \text{etc.}$$

mittelst der oben gegebnen Formel (16.) respective in $\frac{N}{\alpha}$, $\frac{N}{\alpha'}$, $\frac{N}{\alpha''}$, etc. ähnliche unendliche Producte zerfällt. Es wird daher die Anzahl aller gleichen oder verschiedenen Factoren $\Pi(1\pm q^{Ni+P})$ durch die Formel

$$\nu = N\left\{\frac{r}{\alpha}+\frac{r'}{\alpha'}+\frac{r''}{\alpha''}+\text{etc.}\right\}\ .$$

ausgedrückt. Durch diesen Coëfficienten N des Index i und die Anzahl ν der einfachen unendlichen Producte $\Pi(1\pm q^{Ni+P})$, welche die gleichen oder verschiednen Factoren des unendlichen Products bilden, wird der allgemeine Character desselben am besten bestimmt. Für das obige Beispiel war die Normalform,

$$\Pi\{(1+q^{6i+1})(1-q^{6i+3})(1-q^{12i+4})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+6})^{2}(1-q^{12i+8})\};$$

die *characteristische* Form wird

$$\Pi\left\{\begin{matrix}(1+q^{12i+1})(1-q^{12i+3})(1-q^{12i+4})(1+q^{12i+5})(1-q^{12i+6})^{2}\\ \ldots(1+q^{12i+7})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+9})(1+q^{12i+11})(1-q^{12i+12})^{2}\end{matrix}\right\},$$

und man erhält aus ihr alle Factoren $(1\pm q^{a})^{r}$ in der Ordnung, wie die Zahlen a aufeinander folgen, wenn man für i nach einander 0, 1, 2, etc. setzt.

Unter den verschiednen characteristischen Formen desselben unendlichen Productes ist diejenige die einfachste, in welcher der Coëfficient N den möglichst kleinsten Werth hat. Man erkennt dies leicht auf folgende Art. Es sei die gegebne characteristische Form

$$\Pi\{(1\pm q^{Ni+P'})(1\pm q^{Ni+Q'})(1\pm q^{Ni+R'})\,..\}^{s'}$$
$$.\Pi\{(1\pm q^{Ni+P''})(1\pm q^{Ni+Q''})(1\pm q^{Ni+R''})\,..\}^{s''}\ldots,$$

wo, wie man immer voraussetzen kann, in den Factoren jeder Horizontalreihe das Vorzeichen $\pm$ dasselbe sei, und in allen Horizontalreihen, in welchen dieses Vorzeichen dasselbe ist, die Exponenten s', s'', etc. von einander verschieden seien. Die Zahlen P', Q', R', etc., P'', Q'', etc. bedeuten hier von einander verschiedne ganze positive Zahlen, welche gröfser als 0 und gleich oder kleiner als N sind. Ist $\nu^{(k)}$ die Anzahl der Zahlen $P^{(k)}$, $Q^{(k)}$, $R^{(k)}$, etc., und bedeutet f einen sämmtlichen Zahlen N, ν', ν'', etc. gemeinschaftlichen Factor, so hat man von den Zahlen $P^{(k)}$, $Q^{(k)}$, $R^{(k)}$, etc. diejenigen auszuwählen, welche gleich oder kleiner als $\frac{N}{f}$ sind, und mufs dann aus ihnen die übrigen durch successive Addition von $\frac{N}{f}$, $\frac{2N}{f}$, .. $\frac{(f-1)N}{f}$ erhalten können. Trifft dies für jeden der Werthe des Index k zu, so kann man das unendliche Product in eine andere ähnliche Form bringen, in welcher der Coëfficient von i sich auf $\frac{N}{f}$ reducirt hat. Wenn dies aber für keinen der allen Zahlen N, ν, ν', ν'', etc. gemeinschaftlichen Factoren f gleichzeitig für alle Werthe von k gelingt, so ist die gegebne characteristische Form die einfachste. Solche *einfachste characteristische Form* giebt es immer nur eine.

Ich will im Folgenden die einfachsten characteristischen Formen der in r Formentabelle enthaltnen unendlichen Producte, nach dem Werthe des efficienten N und der Anzahl ν der gleichen oder ungleichen einfachen unlichen Producte $\Pi(1\pm q^{Ni+P})$ geordnet, zusammenstellen, und jedesmal ihren pelten oder mehrfachen Ausdruck durch elliptische unendliche Producte der n angegebnen Art hinzufügen. Ich habe gröfserer Einförmigkeit halber in n Factoren der characteristischen Formen den Potenzen von q dasselbe Vorchen — zu geben gesucht, und deshalb in einigen unendlichen Producten q in geändert. Nur bei zwei characteristischen Formen der nachstehenden Tabelle diese Einförmigkeit der Vorzeichen nicht erreicht werden können.

$N = 1.$

1. $$\Pi(1-q^{i+1})^2$$
$$=\Pi(1-q^{2i+2})\,\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}$$
$$=\Pi(1-q^{\frac12(i+1)})\,\Pi\{(1+q^{\frac12(2i+1)})(1-q^{\frac12(4i+4)})\}$$
$$=\Pi\{(1+q^{\frac12(2i+1)})(1-q^{\frac12(2i+2)})\}\,\Pi\{(1-q^{\frac12(2i+1)})(1-q^{\frac12(4i+4)})\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{ C. E.}$$

$N = 2.$

2. $$\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{2i+2})^2\}$$
$$=\Pi(1-q^{i+1})\,\Pi(1-q^{2i+2})$$
$$=\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}\,\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}$$
$$=\Pi\{(1+q^{\frac13(3i+1)})(1+q^{\frac13(3i+2)})(1-q^{\frac13(3i+3)})\}\,\Pi\{(1-q^{\frac13(6i+1)})(1-q^{\frac13(6i+5)})(1-q^{\frac13(6i+6)})\},$$
$$=\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}\,\Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})\}$$
$$=\Pi\{(1+q^{\frac12(2i+1)})(1-q^{\frac12(4i+4)})\}\,\Pi\{(1-q^{\frac12(2i+1)})(1-q^{\frac12(4i+4)})\} \quad \ldots \text{ B. D. A. (5).}$$

3. $$\Pi\{(1-q^{2i+1})^3(1-q^{2i+2})^2\}$$
$$=\Pi(1-q^{i+1})\,\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}$$
$$=\Pi\{(1+q^{\frac12(2i+1)})(1-q^{\frac12(2i+2)})\}\,\Pi(1-q^{\frac12(i+1)}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ F. (1).}$$

4. $$\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})^4\}$$
$$=\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}\,\Pi(1-q^{2i+2})^3$$
$$=\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}\,\Pi(1-q^{i+1})^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ A. (8).}$$

$N = 4.$

5. $$\Pi\{(1-q^{4i+1})(1-q^{4i+3})(1-q^{4i+4})^2\}$$
$$=\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}\,\Pi(1-q^{4i+4})$$
$$=\Pi\{(1+q^{4i+2})(1-q^{8i+8})\}\,\Pi(1-q^{i+1}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ I. (3).}$$

6. $$\Pi\{(1-q^{4i+1})(1-q^{4i+2})(1-q^{4i+3})(1-q^{4i+4})^2\}$$
$$=\Pi(1-q^{i+1})\,\Pi(1-q^{4i+4})$$
$$=\Pi(1-q^{2i+2})\,\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ F. (2).}$$

7. $$\Pi\{(1-q^{4i+1})(1-q^{4i+3})(1-q^{4i+4})\}^2$$
$$=\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}\,\Pi\{(1+q^{4i+2})(1-q^{8i+8})\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{ A. (1).}$$

8. $$\Pi\{(1-q^{4i+1})^2(1-q^{4i+2})(1-q^{4i+3})^2(1-q^{4i+4})^2\}$$
$$=\Pi(1-q^{i+1})\,\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}$$
$$=\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}\,\Pi(1-q^{4i+4}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ I. (2).}$$

9. $\Pi\{(1-q^{4i+1})(1-q^{4i+2})^3(1-q^{4i+3})(1-q^{4i+4})^2\}$

$=\Pi(1-q^{i+1})\Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})\}$

$=\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{2i+2})\}\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}$ . . . . I. (1).

$N = 8.$

10. $\Pi\{(1-q^{8i+1})(1-q^{8i+3})(1-q^{8i+5})(1-q^{8i+7})(1-q^{8i+8})^2\}$

$=\Pi\{(1-q^{8i+1})(1-q^{8i+7})(1-q^{8i+8})\}\Pi\{(1-q^{8i+3})(1-q^{8i+5})(1-q^{8i+8})\}$

$=\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}\Pi\{(1+q^{8i+4})(1-q^{16i+16})\}$ . . . . A. (6).

$N = 6.$

11. $\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})^2\}$

$=\Pi(1-q^{2i+2})\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}$

$=\Pi(1-q^{i+1})\Pi\{(1+q^{6i+3})(1-q^{12i+12})\}$ . . . . A. (3).

12. $\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+3})^3(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})^2\}$

$=\Pi(1-q^{i+1})\Pi\{(1-q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})\}$

$=\Pi\{(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+3})\}\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}$ . . . . H. (1).

13. $\Pi\{(1-q^{6i+1})^2(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+5})^2(1-q^{6i+6})^2\}$

$=\Pi(1-q^{i+1})\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}$

$=\Pi\{(1+q^{6i+3})(1-q^{12i+12})\}\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}$ . . . . H. (2).

$N = 12.$

14. $\Pi\{(1-q^{12i+1})(1-q^{12i+5})(1-q^{12i+7})(1-q^{12i+11})(1-q^{12i+12})^2\}$

$=\Pi\{(1-q^{12i+1})(1-q^{12i+11})(1-q^{12i+12})\}\Pi\{(1-q^{12i+5})(1-q^{12i+7})(1-q^{12i+12})\}$

$=\Pi\{(1+q^{12i+6})(1-q^{24i+24})\}\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}$ . . . A. (7).

15. $\Pi\{(1-q^{12i+3})^2(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+9})^2(1-q^{12i+12})^2\}$

$=\Pi(1-q^{4i+4})\Pi\{(1-q^{6i+3})^2(1-q^{6i+6})\}$

$=\Pi\{(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+3})\}\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}$ . . . . G. (3).

16. $\Pi\{(1-q^{12i+2})(1-q^{12i+3})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+9})$
$\times(1-q^{12i+10})(1-q^{12i+12})^2\}$

$=\Pi(1-q^{2i+2})\Pi\{(1-q^{6i+3})(1-q^{12i+12})\}$

$=\Pi\{(1+q^{6i+1})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}$ . . . . H. (4).

17. $\Pi\{(1-q^{12i+1})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+5})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+7})(1-q^{12i+8})$
$\times(1-q^{12i+11})(1-q^{12i+12})^2\}$

$=\Pi(1-q^{4i+4})\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}$

$=\Pi\{(1+q^{6i+3})(1-q^{12i+12})\}\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}$ . . . . G. (4).

in deren beiden Doppelsummen für i und k nur solche positive oder negative ganze Zahlen zu setzen sind, für welche $i+k$ ungerade ist; ferner die Gleichung

$$18.\qquad \Pi(1-q^{2i+2})^2 = \Sigma q^{i(6i+1)+k(2k+1)} - \Sigma q^{(2i+1)(3i+2)+k(2k+1)},$$

wo man in den beiden Doppelsummen für i und k nur solche positive oder negative ganze Zahlen zu setzen hat, für welche $i+k$ gerade ist. Diese letztre Formel gilt aber wegen (17.) auch, wenn man für i und k alle *beliebigen* positiven oder negativen ganzen Zahlen annimmt. Setzt man darin $-q$ für q, so erhält man

$$19.\qquad \Pi(1-q^{2i+2})^2 = \Sigma(-1)^{i+k} q^{i(6i+1)+k(2k+1)} - \Sigma(-1)^{i+k} q^{(2i+1)(3i+2)+k(2k+1)}.$$

Die Formeln (18.) und (19.) geben eine *fünfte* und *sechste* Darstellung der Entwicklung von $\Pi(1-q^{2i+2})^2$ durch Doppelsummen.

Ähnliche Betrachtungen kann man in Bezug auf die *dritte* Darstellung der Entwicklung des unendlichen Products

$$\Pi\{(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+12})^2\} = \Sigma(-1)^k q^{3i^2+6k^2+i+k}$$

anstellen, in welcher nur solche Potenzen von q vorkommen können, deren Exponent durch 3 theilbar ist, so dafs es hinreicht, die Doppelsumme nur auf solche Werthe von i und k auszudehnen, *für welche $i+k$ durch 3 theilbar ist,* und dieselbe Doppelsumme in den beiden Fällen *verschwinden mufs,* wenn man sie nur über solche Werthe von i und k erstreckt, *für welche $i+k$ durch 3 dividirt den Rest 1 oder den Rest 2 läfst.*

Alle im Vorhergehenden gefundnen Resultate ergaben sich aus der einen Fundamentalformel,

$$(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\,..\,(1-qz)(1-q^3z)(1-q^5z)\,..\,(1-qz^{-1})(1-q^3z^{-1})(1-q^5z^{-1})\,..$$
$$= 1-q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})-q^9(z^3+z^{-3})+\,..$$

Sie wurden als unmittelbare Folge von Gleichungen gefunden, welche aus dieser Formel hervorgehen, wenn man in ihr für $\pm q$ und $\pm z$ ganze positive Potenzen von q setzt. Selbst die zum Beweise der Formel A. (8) erforderliche Gleichung

$$\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\,..\}^3 = 1-3q+5q^3-7q^6+9q^{10}-\,..$$

folgt aus derselben Fundamentalformel, wenn man $z=(1+\varepsilon)q$ annimmt, und, nachdem man mit ε dividirt hat, $\varepsilon=0$ macht, wonach man nur noch q für q^2

zu setzen hat. Aber es lassen sich aus derselben Fundamentalformel noch einige andere Resultate, durch welche das System der im Vorigen gefundnen Gleichungen zwischen Doppelsummen vervollständigt werden kann, ableiten, wenn man für z gewisse imaginäre Wurzeln der Einheit setzt.

Gleichungen zwischen *drei* Doppelsummen.

Man kann der in der Einleitung aufgestellten Fundamentalgleichung die folgenden Formen geben:

$$\alpha)\quad \Pi\{(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+1}z)(1+q^{2i+1}z^{-1})\} = \Sigma q^{i^2}z^i,$$

$$\beta)\quad (z+z^{-1})\Pi\{(1-q^{i+1})(1+q^{i+1}z^2)(1+q^{i+1}z^{-2})\} = \Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)}z^{2i+1},$$

$$\gamma)\quad (z-z^{-1})\Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}z^2)(1-q^{i+1}z^{-2})\} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(i^2+i)}z^{2i+1},$$

wo, wie immer, für den Index i unter dem Zeichen Π die Werthe $0, 1, 2, \ldots \infty$ und unter dem Zeichen Σ die Werthe $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm\infty$ zu nehmen sind. Die Formel $\beta)$ wird aus $\alpha)$ erhalten, wenn man respective $\sqrt{q}$ und $\sqrt{q}.z^2$ für q und z setzt und mit z dividirt. Die Formel $\gamma)$ folgt aus $\alpha)$, wenn man $z\sqrt{-1}$ für z setzt und mit $\sqrt{-1}$ dividirt.

Ich will jetzt in diesen allgemeinen Formeln für z primitive 3[te], 5[te], 8[te] und 12[te] Wurzeln der Einheit setzen, und bei Aufsuchung von unendlichen Producten, welche sich auf doppelte Art in zwei elliptische zerfällen lassen, unter die Zahl der letztern auch diejenigen aufnehmen, welche für die angegebnen Werthe von z aus $\alpha) - \gamma)$ erhalten werden. Die Gleichungen, zu welchen man auf diesem Wege gelangt, werden sich von den oben mitgetheilten dadurch unterscheiden, dafs sie nicht mehr zwischen nur zwei, sondern zwischen drei oder einer gröfsern Zahl Doppelsummen Statt finden. Obgleich einige dieser Resultate sich aus den früher gefundnen zusammensetzen lassen, so habe ich sie doch deshalb für bemerkenswerth gehalten, weil sie mehrere derselben in einer einzigen Formel umfassen, zu welcher man durch dieselbe Methode der doppelten Zerfällung gelangt, welche auf jene Formeln geführt hat. Es beruht dies auf der Eigenschaft der elliptischen Transcendente $\Sigma q^{i^2}z^i$, dafs sie, wenn man für z Wurzeln der Einheit setzt, in mehrere Reihen zerlegt werden kann, welche aus derselben Transcendente erhalten werden, wenn man darin, wie in den frühern Untersuchungen, für q und z Potenzen von q setzt. Ich werde zur gröfsern Deutlichkeit einige elementare Eigenschaften der 3eckigen und 5eckigen Zahlen, auf welchen die Zerlegungen

Vermöge der Gleichung (27.) kann man die Gleichung (24.) auch so darstellen:

$$\Pi\frac{(1-q^{i+1})(1+q^{3i+3})}{1+q^{i+1}} = \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)} - 2\Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}.$$

Wenn man die unendlichen Producte (23.) und (24.) von ihren Nennern befreit, und ihnen ihre einfachste oder ihre Normal- oder ihre characteristische Form giebt, so erhält man

$$29.\quad \Pi\frac{(1-q^{2i+2})(1+q^{6i+3})}{1+q^{2i+1}} = \Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})(1+q^{6i+3})\}$$
$$= \Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{4i+4})(1-q^{12i+6})\}$$
$$= \Pi\{(1-q^{12i+1})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+5})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+7})(1-q^{12i+8}) \times (1-q^{12i+11})(1-q^{12i+12})\}$$
$$= \Sigma q^{9i^2} - \Sigma q^{(3i+1)^2},$$

$$30.\quad \Pi\frac{(1-q^{i+1})(1+q^{3i+3})}{1+q^{i+1}} = \Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})\}$$
$$= \Pi\{(1-q^{2i+2})(1-q^{6i+1})^2(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+5})^2\}$$
$$= \Pi\{(1-q^{6i+1})^2(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+5})^2(1-q^{6i+6})\}$$
$$= \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)} - \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} = \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)} - 2\Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}.$$

Andere Darstellungen dieser unendlichen Producte werde ich weiter unten geben.

Von den Formeln (23.), (24.), (25.) ist die letzte, welche mit der *Euler*schen übereinkommt, oben noch auf eine andere Art, welche von der im Vorigen gebrauchten wesentlich verschieden ist, aus der allgemeinen Formel abgeleitet worden. Nach den beiden Methoden erhält man (25.) aus der Formel γ), indem man entweder für z eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit setzt und mit $\sqrt{(-3)}$ dividirt, oder indem man für q und z respective q^9 und q^3 setzt und mit $-q^3$ multiplicirt. In ähnlicher Weise kann man auch zu den beiden andern Formeln (23.) und (24.), welche durch Substitution einer imaginären Cubikwurzel der Einheit für z erhalten wurden, durch eine Combination der früher gefundnen Formeln gelangen, welche aus der Fundamentalformel dadurch abgeleitet worden waren, dafs man für q und z Potenzen von q gesetzt hat. Ich will diese zweite Beweisart hier mittheilen, weil man daraus desto leichter erkennen wird, ob und auf welche Art die aus den Formeln (23.) und (24.) folgenden Gleichungen zwischen Doppelsummen aus den früher gefundnen erhalten werden können.

Von den oben aus der Fundamentalformel abgeleiteten Formeln wähle ich, um die Formeln (23.) und (24.) dadurch zu beweisen, die Formeln IV. (6.) und IV. (7.),

$$31. \quad \begin{cases} \Pi(1+q^{i+1}) = \dfrac{1}{\Pi(1-q^{2i+1})} = \dfrac{\Sigma q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}}{\Sigma(-1)^i q^{3i^2}}, \\ \Pi(1+q^{i+1}) = \dfrac{1}{\Pi(1-q^{2i+1})} = \dfrac{\Sigma q^{6i^2+3i}}{\Sigma(-1)^i q^{3i^2+2i}}. \end{cases}$$

Multiplicirt man mit den Nennern der Brüche, und setzt $-q^3$ für q, so erhält man, nachdem man die zweite Gleichung noch mit q multiplicirt,

$$32. \quad \begin{cases} \Sigma q^{9i^2} = \Pi(1+q^{6i+3}).\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2-i)} q^{\frac{3i}{2}(3i+1)}, \\ \Sigma q^{(3i+1)^2} = \Pi(1+q^{6i+3}).\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+1)}. \end{cases}$$

Zieht man diese beiden Gleichungen von einander ab, so kann der in $\Pi(1+q^{6i+3})$ multiplicirte Factor in den einfachern Ausdruck $\Sigma(-1)^i q^{2i^2+i}$ zusammengezogen werden. Setzt man nämlich in (21.) $z=1$, so erhält man

$$33. \quad \Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)} = 2\Sigma q^{\frac{3i}{2}(3i+1)} + \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)},$$

oder, vermöge (26.) und (27.),

$$34. \quad \Sigma q^{2i^2+i} = \Sigma q^{\frac{3i}{2}(3i+1)} + \Sigma q^{(3i+1)(6i+1)},$$

und hieraus, wenn man $-q$ für q setzt,

$$35. \quad \Sigma(-1)^i q^{2i^2+i} = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2-i)} q^{\frac{3i}{2}(3i+1)} - \Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+1)}.$$

Mit Hülfe dieser Formel erhält man aus den Gleichungen (32.), wenn man die zweite von der ersten abzieht,

$$36. \quad \Sigma q^{9i^2} - \Sigma q^{(3i+1)^2} = \Pi(1+q^{6i+3})\Sigma(-1)^i q^{2i^2+i}.$$

Substituirt man hierin die häufig im Vorhergehenden angewandte Formel,

$$\Sigma(-1)^i q^{2i^2+i} = \Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\},$$

welche sich aus (α.) ergiebt, wenn man darin respective q^2 und $-q$ für q und z setzt, so folgt die Formel (29.).

Die Formel (30.) findet man aus denselben Gleichungen (31.) auf folgende Weise. Setzt man in denselben q^3 für q, so erhält man

$$37. \quad \begin{cases} \Sigma q^{\frac{3i}{2}(3i+1)} = \Pi(1+q^{3i+3}).\Sigma(-1)^i q^{9i^2}, \\ \Sigma q^{(3i+1)(6i+1)} = \Pi(1+q^{3i+3}).\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2}, \end{cases}$$

und hieraus, da $\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2} = \Sigma(-1)^i q^{(3i-1)^2}$,

$$38. \quad \Sigma q^{\frac{3i}{2}(3i+1)} - 2\Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}$$
$$= \Pi(1+q^{3i+3})\{\Sigma(-1)^i q^{9i^2} - \Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2} - \Sigma(-1)^i q^{(3i-1)^2}\}$$
$$= \Pi(1+q^{3i+3})\Sigma(-1)^i q^{i^2}.$$

Substituirt man hierin die ebenfalls sehr häufig im Vorhergehenden angewandte Formel,

$$39. \quad \Sigma(-1)^i q^{i^2} = \Pi\{(1-q^{2i+2})(1-q^{2i+1})^2\} = \Pi\frac{1-q^{i+1}}{1+q^{i+1}},$$

welche aus (1.) für $z=-1$ folgt, so erhält man die Formel (30.).

Für den hier vorliegenden Zweck, Gleichungen zwischen Doppelsummen von der Form

$$\Sigma \pm q^{\alpha i^2+\beta k^2+\gamma i+\delta k+\varepsilon}$$

zu finden, kommt es darauf an, die elliptischen unendlichen Producte (29.) und (30.) mit solchen andern elliptischen unendlichen Producten zu multipliciren, dafs das unendliche Product, welches man durch diese Multiplication erhält, sich noch auf eine andere Art in zwei elliptische unendliche Producte zerfällen läfst, oder, was dasselbe ist, ***die unendlichen Producte*** (29.) ***und*** (30.) ***als Brüche darzustellen, deren Nenner ein elliptisches unendliches Product und deren Zähler das Product zweier elliptischen unendlichen Producte ist.*** Die Formeln III. führen mit Leichtigkeit zu mehreren solchen Darstellungen. Wenn man nämlich die unendlichen Producte (29.) und (30.) auf folgende Art ausdrückt,

$$\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}.\Pi(1+q^{6i+3}),$$
$$\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}.\Pi(1+q^{3i+3}),$$

so sind die ersten Factoren bereits elliptische unendliche Producte, und es kommt nur noch darauf an, die zweiten Factoren

$$\Pi(1+q^{6i+3}), \qquad \Pi(1+q^{3i+3})$$

als Brüche darzustellen, deren Zähler und Nenner elliptische unendliche Producte sind. Dies geschieht aber mittelst der Formeln III. für jedes dieser beiden unendlichen Producte auf 7 verschiedne Arten. Man erhält für $\Pi(1+q^{6i+3})$ ***sieben*** solcher Brüche, wenn man in III. $-q^3$ für q setzt und alle Brüche umkehrt, und eine gleiche Anzahl für $\Pi(1+q^{3i+3})$, wenn man in III. selber q^3 für q substituirt. Es ergeben sich hiernach aus (36.) und (38.) ***vierzehn*** Gleichungen zwischen Doppelsummen. Bezeichnet man nämlich jeden der 7 Brüche in IV. mit $\frac{f(q)}{\varphi(q)}$, so folgt aus (36.):

$$f(-q^3)\{\Sigma q^{9i^2}-\Sigma q^{(3i+1)^2}\} = \varphi(-q^3)\Sigma(-1)^i q^{2i^2+i},$$

und aus (38.),

$$\varphi(q^3)\{\Sigma q^{\frac{3i}{2}(3i+1)}-2\Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}\} = f(q^3)\Sigma(-1)^i q^{i^2}.$$

Es wird aber nicht nöthig sein, diese 14 Gleichungen besonders aufzustellen, da sie keine wesentlich neuen Resultate geben. Denn durch dasselbe Verfahren, durch welches im Vorhergehenden die Formeln (36.) und (38.) aus den Formeln (32.) und (37.) abgeleitet worden sind, welche ihrerseits aus den Formeln IV. (6.) und IV. (7.) folgten, müssen sich auch die aus den Formeln (36.), (38.) und IV. (1.) — (7.) folgenden 14 Gleichungen zwischen Doppelsummen aus denjenigen Formeln der obigen Tabelle ergeben, welche durch Combination der Formeln IV. (6.) und IV. (7.) unter sich und mit den übrigen Formeln IV. (1.) — (5.) erhalten worden sind.

Man kann aber die unendlichen Producte (29.) und (30.) noch auf andere Arten als solche Brüche darstellen, deren Nenner ein elliptisches unendliches Product und deren Zähler das Product zweier elliptischen unendlichen Producte ist, und diese Darstellungen werden zu Resultaten führen, welche in den Gleichungen der obigen Formelntabelle nicht enthalten sind. Es ist nämlich

$$\Pi\frac{(1-q^{2i+2})(1+q^{6i+3})}{1+q^{2i+1}} = \Sigma q^{9i^2} - \Sigma q^{(3i+1)^2}$$

$$= \frac{\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}.\Pi(1-q^{4i+4})}{\Pi(1-q^{12i+12})}$$

$$= \frac{\Pi(1-q^{2i+2}).\Pi\{1-q^{6i+1})(1+q^{6i+2})(1+q^{6i+3})(1+q^{6i+4})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}}{\Pi\{(1+q^{6i+3})(1-q^{6i+6})\}}$$

$$= \frac{\Pi(1-q^{i+1}).\Pi\{(1+q^{6i+2})(1+q^{6i+4})(1-q^{6i+6})\}}{\Pi(1-q^{3i+3})}$$

$$= \frac{\Pi(1-q^{2i+2}).\Pi(1-q^{6i+6})}{\Pi\{(1+q^{6i+1})(1+q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}},$$

woraus, wenn man für die elliptischen unendlichen Producte ihre Entwicklungen setzt, die folgenden Gleichungen erhalten werden,

$$40. \quad \Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})(1+q^{6i+3})\}$$

$$= \Sigma q^{9i^2} - \Sigma q^{(3i+1)^2} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{3i^2+2i}.\Sigma(-1)^i q^{6i^2+2i}}{\Sigma(-1)^i q^{18i^2+6i}}$$

$$= \frac{\Sigma(-1)^i q^{3i^2+i}.\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2-i)} q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}}{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)} q^{\frac{3}{2}(3i^2+i)}} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}.\Sigma q^{3i^2+i}}{\Sigma(-1)^i q^{\frac{3}{2}(3i^2+i)}}$$

$$= \frac{\Sigma(-1)^i q^{3i^2+i}.\Sigma(-1)^i q^{9i^2+3i}}{\Sigma q^{3i^2+2i}}.$$

Es ist ferner

$$\Pi\frac{(1-q^{i+1})(1+q^{3i+3})}{1+q^{i+1}} = \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)} - \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)}$$

$$= \frac{\Pi(1-q^{i+1}).\Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})\}}{\Pi(1-q^{6i+6})} = \frac{\Pi(1-q^{i+1}).\Pi(1-q^{3i+3})}{\Pi\{(1+q^{3i+1})(1+q^{3i+2})(1-q^{3i+3})\}},$$

woraus

$$41.\quad \Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})\}$$

$$= \Sigma q^{\frac{3}{2}(3i^2+i)} - \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)} = \Sigma q^{\frac{3}{2}(3i^2+i)} - 2\Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}$$

$$= \frac{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}.\Sigma(-1)^i q^{3i^2+2i}}{\Sigma(-1)^i q^{3(3i^2+i)}} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}.\Sigma(-1)^i q^{\frac{3}{2}(3i^2+i)}}{\Sigma q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}}$$

folgt. Aus den Formeln (40.) und (41.) ergeben sich durch Multiplication mit den Nennern die unten folgenden Gleichungen zwischen Doppelsummen. Da in den Zählern der Brüche (40.) der Factor $\Sigma(-1)^i q^{2i^2+i}$, in den Zählern der Brüche (41.) der Factor $\Sigma(-1)^i q^{2i^2}$ nicht vorkommt, so müssen diese Gleichungen von denen, welche auf die oben angegebne Art aus (36.) und (38.) abgeleitet werden können, wesentlich verschieden werden.

Der Zähler des letzten Bruchs in (40.) wird aus dem Zähler des letzten Bruchs in (41.) erhalten, wenn man darin q^2 für q setzt. Es ergeben sich daher für denselben aus (40.) und (41.) drei oder, wenn man noch in (40.) $-q$ für q setzt, vier verschiedene Darstellungen durch Doppelsummen, wobei man diejenige nicht mitrechnet, welche aus der doppelten Form der in (41.) mit dem Minuszeichen behafteten Summe folgt. Die hieraus erhaltenen Gleichungen gehören zur Classe (3, 3), die übrigen aus (40.) und (41.) folgenden zur Classe (2, 2). Sie können den zu diesen Classen gehörigen Formeln der obigen Tabelle angeschlossen werden, obgleich sie sich von ihnen dadurch unterscheiden, dafs sie jede eine Gleichung zwischen *drei* Doppelsummen geben. Die unendlichen Producte in den folgenden Formeln sind die Zähler der Ausdrücke, welche die Brüche (40.) und (41.) ergaben; nur sind diese Producte, wie in der obigen Formeltabelle, durch ihre Normalformen ausgedrückt.

XI.

B. (2, 2).

$$3.\quad \Pi\{(1-q^{6i+1})(1-q^{6i+5})(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+6})(1-q^{12i+8})(1-q^{12i+12})^2\}$$

$$= \Sigma(-1)^k q^{9i^2+18k^2+6k} - \Sigma(-1)^k q^{(3i+1)^2+18k^2+6k} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{3i^2+6k^2+2i+2k}$$

4. $\Pi\{(1-q^{6i+1})(1+q^{6i+3})(1-q^{6i+5})(1-q^{6i+6})^2(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})\}$

$$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(k^2+k)}q^{9i^2+\frac{3}{2}(3k^2+k)} - \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(k^2+k)}q^{(3i+1)^2+\frac{3}{2}(3k^2+k)}$$

$$= \Sigma(-1)^{i+\frac{1}{2}(k^2-k)}q^{3i^2+\frac{3}{2}k^2+i+\frac{1}{2}k}$$

5. $\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{6i+6})^2(1-q^{12i+4})(1-q^{12i+8})\}$

$$= \Sigma(-1)^k q^{9i^2+\frac{3}{2}(3k^2+k)} - \Sigma(-1)^k q^{(3i+1)^2+\frac{3}{2}(3k^2+k)} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{3}{2}i^2+3k^2+\frac{1}{2}i+k}$$

6. $\Pi\{(1-q^{6i+1})^2(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+3})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+5})^2(1-q^{6i+6})^2\}$

$$= \Sigma(-1)^k q^{\frac{3}{2}(3i^2+i)+3(3k^2+k)} - 2\,\Sigma(-1)^k q^{(3i+1)(6i+1)+3(3k^2+k)}$$

$$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{\frac{3}{2}i^2+3k^2+\frac{1}{2}i+2k}.$$

C. (3, 3).

2. $\Pi\{(1-q^{6i+2})(1-q^{6i+4})(1-q^{6i+6})^2\}$

$$= \Sigma q^{9i^2+3k^2+2k} - \Sigma q^{(3i+1)^2+3k^2+2k}$$

$$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{9i^2+3k^2+2k} + \Sigma(-1)^{i+k}q^{(3i+1)^2+3k^2+2k}$$

$$= \Sigma q^{3(3i^2+i)+3k^2+k} - \Sigma q^{(3i+1)(3i+2)+3k^2+k}$$

$$= \Sigma q^{3(3i^2+i)+3k^2+k} - 2\,\Sigma q^{2(3i+1)(6i+1)+3k^2+k}$$

$$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{3i^2+9k^2+i+3k}.$$

Man kann durch Combination der Formeln (36.) und (38.) noch eine Gleichung zwischen *fünf* Doppelsummen ableiten. Multiplicirt man nämlich die Formeln (36.) und (38.) mit einander, nachdem man in der ersten $-q$ für q gesetzt hat, und bemerkt, dafs $\Pi(1+q^{3i+3})\Pi(1-q^{6i+3})=1$, so erhält man

42. $\Sigma(-1)^i q^{i^2+2k^2+k}$

$$= \{\Sigma(-1)^i q^{9i^2} + \Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2}\}\{\Sigma q^{\frac{1}{2}i(3i+1)} - 2\,\Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}\}.$$

Diese Formel läfst sich aber auf die Gleichung B. (2) zurückführen. Setzt man nämlich für $\Sigma(-1)^i q^{i^2}$, Σq^{2i^2+i} die äquivalenten, blofs durch andere Gruppirung der Glieder unterschiednen Ausdrücke,

$$\Sigma(-1)^i q^{9i^2} - 2\,\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2}, \qquad \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)} + \Sigma q^{(3i+1)(6i+1)},$$

von denen der erstere aus (20.) für $z=-1$ folgt, und der zweite durch die Formel (34.) gegeben wird, so wird die Doppelsumme links vom Gleichheitszeichen

$$\{\Sigma(-1)^i q^{9i^2} - 2\,\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2}\}\{\Sigma q^{\frac{1}{2}i(3i+1)} + \Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}\},$$

und es kommt daher die Gleichung (42.) auf die folgende zurück,

$$\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2+\frac{1}{2}k(3k+1)} = \Sigma(-1)^i q^{9i^2+(3k+1)(6k+1)},$$

welche aus B. (2.) erhalten wird, wenn man darin q^3 für q setzt und mit q multiplicirt.

II. $z =$ einer imaginären 5ten Wurzel der Einheit.

Ich will jetzt in der Formel (β.) für z nach einander zwei *imaginäre nicht reciproke 5te Wurzeln der Einheit* setzen, und die daraus hervorgehenden Gleichungen mit einander multipliciren. Wenn man in der Gleichung (β.),

$$(z-z^{-1})\Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}z^2)(1-q^{i+1}z^{-2})\} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}i(i+1)} z^{2i+1},$$

für den Index i unter dem Summenzeichen nach einander $5i$, $-(5i+1)$, ferner $-(5i+2)$, $5i+1$, endlich $5i+2$ setzt, wodurch alle Werthe von i erschöpft werden, so verwandelt sich dieselbe in die folgende,

$$43.\qquad (z-z^{-1})\Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}z^2)(1-q^{i+1}z^{-2})\}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}i(i+1)}(z^{10i+1}-z^{-(10i+1)}) + \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)}(z^{-(10i+3)}-z^{10i+3})$$
$$+\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+2)(5i+3)} z^{10i+5}.$$

Setzt man $-i-1$ für i, so erleidet die letzte Summe keine weitere Aenderung, als dafs die Gröfse $(-1)^i z^{10i+5}$ unter dem Summenzeichen in $-(-1)^i z^{-(10i+5)}$ übergeht; man kann daher für diese Summe auch

$$\tfrac{1}{2}\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+2)(5i+3)}(z^{10i+5}-z^{-(10i+5)})$$

setzen, woraus man sieht, dafs dieselbe verschwindet, wenn z einer beliebigen 5ten Wurzel der Einheit gleich wird. Bedeutet daher σ eine imaginäre 5te Wurzel der Einheit, und setzt man in (43.)

$$z = \sigma,$$

so erhält man nach Division mit $\sigma-\sigma^{-1}$,

$$44.\qquad \Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}\sigma^2)(1-q^{i+1}\sigma^{-2})\}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}i(5i+1)} + (\sigma+\sigma^{-1})\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)}.$$

Setzt man hierin σ^2 für σ, so ergiebt sich

$$\Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{i+1}\sigma)(1-q^{i+1}\sigma^{-1})\}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}i(5i+1)} + (\sigma^2+\sigma^{-2})\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)}.$$

Multiplicirt man beide Formeln mit einander, und bemerkt, dafs sowohl die Summe als das Product von $\sigma+\sigma^{-1}$ und $\sigma^2+\sigma^{-2}$ gleich -1 ist, so findet man

$$45.\qquad \Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{5i+5})\} = \Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}\Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}(3i^2+i)}$$
$$= \{\Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}i(5i+1)}\}^2 - \Sigma(-1)^i q^{\frac{5}{2}i(5i+1)}\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)} - \{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)}\}^2.$$

oder die zur Classe (1, 5) gehörige Gleichung,

$$46.\quad \Pi\{(1-q^{i+1})(1-q^{5i+5})\} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(3i^2+15k^2+i+5k)}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{5}{2}i(5i+1)+\frac{5}{2}k(5k+1)} - \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{5}{2}i(5i+1)+\frac{1}{2}(5k+1)(5k+2)}$$
$$- \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(5i+1)(5i+2)+\frac{1}{2}(5k+1)(5k+2)}.$$

In der ersten der drei Summen rechts vom Gleichheitszeichen sind die Exponenten von q durch 5 theilbar, in den beiden andern lassen dieselben, durch 5 dividirt, respective die Reste 1 und 2. Wenn man daher auch die Doppelsumme links vom Gleichheitszeichen in drei andere theilt, je nachdem die Exponenten von q oder, was dasselbe ist, die Werthe von $\frac{1}{2}i(3i+1)$, durch 5 dividirt, die Reste 0, 1, 2 lassen, so zerfällt die Gleichung (46.) in drei Gleichungen, von denen jede zwischen Doppelsummen Statt hat, in denen die Exponenten von q, durch 5 dividirt, dieselben Reste lassen. Je nachdem i die Werthe $5i$ und $-(5i+2)$; $-(5i+1)$; $5i+1$ und $5i+2$ annimmt, erhält die Zahl $\frac{1}{2}i(3i+1)$ die ihren drei Resten 0, 1, 2 entsprechenden Formen,

$$\tfrac{5}{2}i(15i+1) \text{ und } \tfrac{5}{2}(3i+1)(5i+2);\quad \tfrac{25}{2}i(3i+1)+1;$$
$$\tfrac{5}{2}i(15i+7)+2 \text{ und } \tfrac{5}{2}(3i+2)(5i+1)+2.$$

Es werden daher die sich je nach diesen drei Fällen aus (46.) ergebenden Gleichungen, wenn man im zweiten und dritten Falle respective mit q und q^2 dividirt, und hierauf überall q für q^5 setzt, die nachstehenden. Die den Doppelsummen gleichen unendlichen Producte, welche ich beigefügt habe, ergeben sich leicht aus dem Fundamentaltheorem.

XII.

$$1.\quad \Pi\{(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+2})(1-q^{5i+3})(1-q^{5i+4})(1-q^{5i+5})^2\}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{5}{2}(3i^2+i)+\frac{1}{2}(3k^2+k)} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(5i^2+5k^2+i+3k)}$$

$$2.\quad \Pi\{(1-q^{5i+2})(1-q^{5i+3})(1-q^{5i+5})\}^2$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k}\{q^{\frac{1}{2}(15i^2+3k^2+i+k)} + q^{\frac{1}{2}((3i+1)(5i+2)+3k^2+k)}\} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(5i^2+5k^2+i+k)}$$

$$3.\quad \Pi\{(1-q^{5i+1})(1-q^{5i+4})(1-q^{5i+5})\}^2$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k}\{q^{\frac{1}{2}(15i^2+3k^2+7i+k)} - q^{\frac{1}{2}((3i+2)(5i+1)+3k^2+k)}\} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(5i^2+5k^2+3i+3k)}.$$

Die erste dieser Formeln ist dieselbe, wie die oben in der Formelntabelle aufgestellte, welche dort durch eine ganz verschiedne Methode gefunden worden ist.

Die Formel XII. (1.) ergab sich im Vorhergehenden aus (46.) durch die Bemerkung, dafs, wenn man dem i den Werth $-(5i+1)$ giebt, die

5eckigen Zahlen $\frac{1}{2}i(3i+1)$ die Form $\frac{25}{2}i(3i+1)+1$ erhalten. Dies giebt den Satz:

Wenn man von den 5eckigen Zahlen, welche durch 5 dividirt 1 übrig lassen, 1 abzieht, so geht der Rest nicht blofs durch 5, sondern auch durch 25 auf, und man erhält nach Division mit 25 wieder 5eckige Zahlen.

Werden die unter der Form $\frac{1}{2}(3i^2-i)$ enthaltenen Zahlen in 2 Classen getheilt, je nachdem i positive oder negative Werthe annimmt (von denen die erste Classe die eigentlichen 5eckigen Zahlen umfafst, deren Name aber, wie im Vorhergehenden, auch auf die andere Classe ausgedehnt zu werden pflegt): so kann man den vorstehenden Satz näher so bestimmen, ***dafs, wenn man von jeder von beiden Classen 5eckiger Zahlen diejenigen nimmt, welche durch 5 dividirt 1 übrig lassen, von denselben 1 abzieht und den Rest durch 25 dividirt, die sämmtlichen 5eckigen Zahlen der andern Classe erhalten werden.***

Der vorstehende Satz ist dem oben für die 3eckigen Zahlen bemerkten analog. In beiden Fällen werden diejenigen 3- und 5eckigen Zahlen betrachtet, welche um 1 vermindert respective durch 3 und 5 aufgehn; zieht man von ihnen 1 ab, so lassen sich die Reste respective durch 3^2 und 5^2 theilen. Es werden ferner nach geschehner Division respective die sämmtlichen 3- und 5eckigen Zahlen erhalten. Wenn man das umgekehrte Verfahren anwendet, und aus 3- und 5eckigen Zahlen durch Multiplication mit 9 und 25 und Addition der Einheit immer andere 3- und 5eckige Zahlen ableitet, so erhält man den Satz, ***dafs, wenn A eine beliebige 3- oder 5eckige Zahl ist, auch*** $\frac{1}{8}(9^n-1)+9^nA$, $\frac{1}{24}(25^n-1)+25^nA$ ***respective 3- und 5eckige Zahlen werden, von denen die letztern zu derselben oder einer andern Classe wie A gehören, je nachdem n gerade oder ungerade ist.***

Der Satz, dafs die 3- und 5eckigen Zahlen von der Form $3i+1$, $5i+1$ immer auch die Form 3^2i+1, 5^2i+1 haben, läfst sich durch folgende Betrachtungen auf alle vieleckigen Zahlen ausdehnen.

Es sei M eine $m$eckige Zahl, welche durch m dividirt den Rest 1 läfst. Ist M die $n$te $m$eckige Zahl

$$M = \tfrac{1}{2}n\{(m-2)(n-1)+2\},$$

so wird

$$\begin{aligned} M-1 &= \tfrac{1}{2}(n-1)\{(m-2)n+2\} \\ &= m\cdot\tfrac{1}{2}n(n-1)-(n-1)^2. \end{aligned}$$

Aus dieser Formel folgt, dafs, weil $M-1$ durch m theilbar ist, auch $(n-1)^2$

durch m theilbar sein mufs. Es sei

$$m = a^2 b,$$

wo a^2 das gröfste Quadrat bedeutet, durch welches m theilbar ist, und also b durch keine Quadratzahl theilbar sein darf. Es mufs dann $(n-1)^2$, welches durch $a^2 b = m$ theilbar ist, auch durch $a^2 b^2 = mb$ und daher $n-1$ durch ab theilbar sein. ***Es werden daher nur diejenigen $m$eckigen Zahlen durch $m = a^2 b$ dividirt den Rest* 1 *lassen, deren Seite* (n), *durch $ab = \frac{m}{a}$ dividirt, den Rest* 1 *läfst.*** Es sei

$$n-1 = abc,$$

so wird

$$M-1 = \tfrac{1}{2}n.a^3b^2c - a^2b^2c^2 = a^2b^2c\{\tfrac{1}{2}n.a-c\}.$$

Es sei zuerst m ***ungerade,*** so werden a und b ungerade, und wegen $n-1 = abc$, von den beiden Zahlen n und c immer die eine gerade. Es wird also $c(\frac{1}{2}na - c)$ eine ganze Zahl, und daher $M-1$ durch a^2b^2 theilbar. Es sei zweitens m ***das Doppelte einer ungeraden Zahl,*** so wird a ungerade und b ebenfalls das Doppelte einer ungeraden Zahl; es wird daher auch n ungerade, und $c(\frac{1}{2}na - c)$ für ein ungerades c nicht mehr eine ganze Zahl werden. In diesem Falle wird also $M-1$ nur durch $\frac{1}{2}a^2b^2$ theilbar. Wenn drittens m ***das Vier- oder Achtfache einer ungeraden Zahl*** ist, wird a das Doppelte einer ungeraden Zahl; es wird daher sowohl n als $\frac{1}{2}a$ ungerade, und $c(\frac{1}{2}na - c)$ für jedes c nicht blofs eine ganze Zahl, sondern auch immer gerade, und also $M-1$ durch $2a^2b^2$ theilbar. Wenn viertens m ***durch 16 theilbar*** ist, so wird a durch 4 theilbar, $c\{\frac{1}{2}na - c\}$ eine ganze Zahl, und $M-1$ durch a^2b^2 theilbar. Man erhält daher, wenn man Q für a^2b^2 setzt, den Satz: ***Wenn M eine $m$eckige Zahl ist, welche durch m dividirt den Rest* 1 *läfst, und Q das kleinste durch m theilbare Quadrat bedeutet, so wird $M-1$, wenn m das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, durch $\frac{1}{2}Q$, in allen andern Fällen durch Q, und wenn m das Vier- oder Achtfache einer ungeraden Zahl ist, immer auch durch $2Q$ theilbar.*** Wenn $a=1$, hat man $b=m$, $Q=m^2$, und daher den Satz:

> Wenn m eine durch kein Quadrat theilbare ungerade Zahl ist, und M eine $m$eckige Zahl, welche durch m dividirt den Rest 1 läfst, so wird $M-1$ auch durch m^2 theilbar sein.

Die für M und $M-1$ angegebnen Werthe zeigen, dafs immer gleichzeitig $2M$ durch n und $2(M-1)$ durch $n-1$ theilbar ist. Wenn also M

nicht blofs die zweite Meckige, sondern noch aufserdem eine vieleckige Zahl ist, so haben die beiden Zahlen $2M$ und $2(M-1)$ aufser den Factoren 2 und 1 noch andere Factoren, welche nur um 1 verschieden sind. Diese Eigenschaft kann als Definition einer vieleckigen Zahl gebraucht werden. Man beweist nämlich sehr leicht den umgekehrten Satz:

Jede Zahl M ist so oft eine vieleckige Zahl, als $2M$ einen Factor hat, welcher von einem Factor der Zahl $2(M-1)$ nur um 1 verschieden ist; wenn von den beiden um 1 verschiednen Factoren der Zahlen $2M$ und $2(M-1)$ der Factor von $2M$ der gröfsere ist, so ist M eine *eigentliche* vieleckige Zahl und dieser Factor ihre Seite, und wenn man

$$2M = ff', \quad 2(M-1) = gg', \quad f = g+1$$

hat, so wird $g'-f'+2$ die der Seite f entsprechende Eckenzahl von M.

Mit der Aufgabe, zu bestimmen, ***wie oft und auf welche Art eine gegebene Zahl eine vieleckige sein kann,*** schliefst das grofse Werk des ***Diophantus;*** doch ist ihre Lösung in den auf uns gekommnen Handschriften abgebrochen, vielleicht vom Verfasser selbst unvollendet gelassen.

III. $z =$ einer primitiven 8ten oder 16ten Wurzel der Einheit.

Bezeichnet ϱ eine primitive 16te, $\sigma = \varrho^2$ eine primitive 8te Wurzel der Einheit, so wollen wir jetzt in den Gleichungen

$$\Pi\{(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+1}z)(1+q^{2i+1}z^{-1})\} = \Sigma q^{i^2} z^i,$$

$$(z+z^{-1})\Pi\{(1-q^{i+1})(1+q^{i+1}z^2)(1+q^{i+1}z^{-2})\} = \Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)} z^{2i+1},$$

in der ersten nach einander $z = \sigma$, $z = -\sigma$, in der zweiten nach einander $z = \varrho$, $z = \varrho^5$ setzen, und die beiden jedesmal erhaltnen Formeln mit einander multipliciren.

Man kann den rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Reihen die folgende Form geben:

47. $$\Sigma q^{i^2} z^i = \Sigma q^{16i^2} z^{4i} + \Sigma q^{(4i+1)^2}(z^{4i+1} + z^{-(4i+1)}) + \tfrac{1}{2}\Sigma q^{(4i+2)^2}(z^{4i+2} + z^{-(4i+2)}),$$

48. $$\Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)} z^{2i+1} = \tfrac{1}{2}\Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)}(z^{2i+1} + z^{-(2i+1)}) = \Sigma q^{2i(4i+1)}(z^{8i+1} + z^{-(8i+1)}) + \Sigma q^{(2i+1)(4i+1)}(z^{8i+3} + z^{-(8i+3)}).$$

Die beiden Summen rechts vom zweiten Gleichheitszeichen in der Formel (48.) werden aus der Summe $\Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)} z^{2i+1}$ erhalten, wenn man dem Index i respective die Formen $4i$ und $-(4i+1)$, $4i+1$ und $-(4i+2)$ giebt.

Da

$$\varrho^{8i} = \sigma^{4i} = (-1)^i,\quad \varrho^4+\varrho^{-4} = \sigma^2+\sigma^{-2} = 0,\quad \varrho^2+\varrho^{-2} = \sigma+\sigma^{-1} = \sqrt{2},$$

$$\varrho^3+\varrho^{-3} = (\varrho+\varrho^{-1})\{\varrho^2+\varrho^{-2}-1\} = (\varrho+\varrho^{-1})(\sqrt{2}-1),$$

so folgt aus (47.) für $z=\sigma$ und aus (48.) für $z=\varrho$, wenn man letztere Gleichung mit $\varrho+\varrho^{-1}$ dividirt,

49. $$\Pi\{(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+1}\sigma)(1+q^{2i+1}\sigma^{-1})\} = \Sigma\sigma^i q^{i^2}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{16i^2} + \sqrt{2}\,\Sigma(-1)^i q^{(4i+1)^2}$$

50. $$\Pi\{(1-q^{i+1})(1+q^{i+1}\sigma)(1+q^{i+1}\sigma^{-1})\} = \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{\varrho^{2i+1}+\varrho^{-(2i+1)}}{\varrho+\varrho^{-1}}q^{\frac{1}{2}(i^2+i)}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{2i(4i+1)} + (\sqrt{2}-1)\Sigma(-1)^i q^{(2i+1)(4i+1)}.$$

Setzt man in diesen Gleichungen ϱ^5 für ϱ und also $-\sigma$ für σ, so ändert sich in den Ausdrücken rechts blofs das Zeichen von $\sqrt{2}$. Man erhält daher durch Multiplication je zweier durch diese Änderung aus einander abgeleiteten Formeln,

51. $$\Pi\{(1-q^{2i+2})^2(1+q^{8i+4})\}$$
$$= \{\Sigma(-1)^i q^{16i^2}\}^2 - 2\{\Sigma(-1)^i q^{(4i+1)^2}\}^2$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{16(i^2+k^2)} - 2q^2\Sigma(-1)^{i+k} q^{16(i^2+k^2)+8(i+k)}$$

52. $$\Pi\{(1-q^{i+1})^2(1+q^{4i+4})\}$$
$$= \{\Sigma(-1)^i q^{2i(4i+1)}\}^2 - 2\Sigma(-1)^i q^{2i(4i+1)}.\Sigma(-1)^i q^{(2i+1)(4i+1)} - \{\Sigma(-1)^i q^{(2i+1)(4i+1)}\}^2$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{8(i^2+k^2)+2(i+k)} - q^2\Sigma(-1)^{i+k} q^{8(i^2+k^2)+6(i+k)} - 2q\Sigma(-1)^{i+k} q^{8(i^2+k^2)+2i+6k}.$$

Die beiden unendlichen Producte kann man jedes in zwei *elliptische* unendliche Producte zerfällen, und erhält auf diese Weise für die vorstehenden Ausdrücke noch andere Darstellungen durch Doppelsummen. Man hat nämlich

53. $$\Pi\{(1-q^{2i+2})^2(1+q^{8i+4})\} = \Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})\}.\Pi\{(1-q^{8i+8})(1-q^{16i+8})\}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{2i^2}.\Sigma(-1)^i q^{8i^2} = \{\Sigma q^{8i^2} - 2\Sigma q^{2(4i+1)^2}\}\Sigma(-1)^i q^{8i^2}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{8(i^2+k^2)} - 2q^2\Sigma(-1)^i q^{8(i^2+4k^2)+16k}$$

54. $$\Pi\{(1-q^{i+1})^2(1+q^{4i+4})\} = \Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\}.\Pi\{(1-q^{4i+2})(1-q^{8i+8})\}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{i^2}.\Sigma(-1)^i q^{2i(2i+1)} = \{\Sigma q^{4i^2} - 2\Sigma q^{(4i+1)^2}\}\Sigma(-1)^i q^{4i^2+2i}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{4(i^2+k^2)+2i} - 2q\Sigma(-1)^i q^{4(i^2+4k^2)+2i+8k}.$$

Wenn man die Formeln (51.) und (53.) mit einander vergleicht, und die Reihen, in denen die Exponenten von q die Form $8i$ und in denen sie die Form $8i+2$ haben, besonders gleich setzt; ferner in den so erhaltenen Gleichungen q für q^8 setzt, nachdem man die zweite derselben zuvor mit q^2 dividirt hat,

so kommt man auf die bereits früher gefundnen Gleichungen A. (1) und A. (4) der Formelntabelle.

Ebenso zerfällt die durch Vergleichung von (52.) und (54.) erhaltene Gleichung in zwei Gleichungen, wenn man die Reihen, in denen die Exponenten von q gerade und in denen sie ungerade sind, besonders einander gleich setzt. Wenn man die zweite dieser Gleichungen durch q dividirt, und hierauf q für q^2 setzt, so ergiebt sich die Formel A. (6). Wenn man dagegen in der ersten von diesen Gleichungen q für $-q^2$ setzt, so erhält man eine neue Formel,

$$55. \qquad \Sigma q^{4(i^2+k^2)+i+k} + \Sigma q^{4(i^2+k^2)+3(i+k)+1} = \Sigma q^{2(i^2+k^2)+k}.$$

Man wird aber weiter unten sehen, dafs diese Gleichung in einer allgemeineren enthalten ist, welche unmittelbar aus der Fundamentalformel fliefst.

IV. $z =$ einer primitiven 24ten Wurzel der Einheit.

Setzt man in (21.) unter den Zeichen Σ für i nach einander $2i$ und $-(2i+1)$, so erhält man

$$56. \qquad (z+z^{-1})\Pi\{(1-q^{i+1})(1+q^{i+1}z^2)(1+q^{i+1}z^{-2})\} = \Sigma q^{\frac{1}{2}i(i+1)}z^{2i+1}$$
$$= \Sigma q^{\frac{3}{2}i(3i+1)}(z^{6i+1}+z^{-(6i+1)}) + \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)}z^{6i+3}$$
$$= \Sigma q^{3i(6i+1)}(z^{12i+1}+z^{-(12i+1)}) + \Sigma q^{(3i+1)(6i+3)}(z^{12i+5}+z^{-(12i+5)})$$
$$+ \Sigma q^{(3i+1)(6i+1)}(z^{12i+3}+z^{-(12i+3)}).$$

Es bedeute jetzt ϱ eine primitive 24ste Wurzel der Einheit, welche in der vorstehenden Gleichung für z gesetzt werden soll. Da

$$\varrho^{12i} = (-1)^i, \quad \varrho^6+\varrho^{-6} = 0, \quad \varrho^4+\varrho^{-4} = 1, \quad \varrho^2+\varrho^{-2} = \sqrt{3},$$
$$\varrho^3+\varrho^{-3} = (\varrho+\varrho^{-1})(\varrho^2+\varrho^{-2}-1) = (\varrho+\varrho^{-1})(\sqrt{3}-1),$$
$$\varrho^5+\varrho^{-5} = (\varrho+\varrho^{-1})(\varrho^4+\varrho^{-4}-\varrho^2-\varrho^{-2}+1) = (\varrho+\varrho^{-1})(2-\sqrt{3}),$$

so folgt aus (56.) für $z = \varrho$ und nach Division mit $\varrho+\varrho^{-1}$,

$$57. \qquad \Pi\{(1-q^{i+1})(1+q^{i+1}\varrho^2)(1+q^{i+1}\varrho^{-2})\}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{3i(6i+1)} + (2-\sqrt{3})\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+3)} + (\sqrt{3}-1)\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+1)}.$$

Setzt man ϱ^7 für ϱ, so geht $\sqrt{3}$ und ϱ^2 in $-\sqrt{3}$ und $-\varrho^2$ über. Man erhält daher aus (57.) eine zweite Formel, wenn man darin gleichzeitig ϱ^2 und $\sqrt{3}$ in $-\varrho^2$ und $-\sqrt{3}$ verwandelt. Durch Multiplication beider Formeln ergiebt sich, da

$$(1-\varrho^4 x)(1-\varrho^{-4} x) = \frac{1+x^3}{1+x},$$

die folgende,

$$58. \quad \Pi\frac{(1-q^{i+1})^2(1+q^{6i+6})}{1+q^{2i+2}}$$

$$= \{\Sigma(-1)^i q^{3i(6i+1)}+(2-\sqrt{3})\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+3)}+(-1+\sqrt{3})\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+1)}\}$$
$$.\{\Sigma(-1)^i q^{3i(6i+1)}+(2+\sqrt{3})\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+3)}+(-1-\sqrt{3})\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)(6i+1)}\}.$$

Anderseits folgt aus (56.), wenn man für x eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit und dann q^2 für q setzt,

$$\Pi\frac{(1-q^{2i+2})(1+q^{6i+6})}{1+q^{2i+2}} = \Sigma q^{3i(3i+3)} - \Sigma q^{(3i+1)(3i+2)}$$
$$= \Sigma q^{3i(3i+1)} - 2\Sigma q^{(6i+1)(6i+2)}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})\} = \Sigma(-1)^i q^{i^2} = \Sigma(-1)^i q^{9i^2} - 2\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2},$$

so erhält man das unendliche Producte (58.) noch auf eine andere Art als Product zweier Reihen ausgedrückt,

$$59. \quad \Pi\frac{(1-q^{i+1})^2(1+q^{6i+6})}{1+q^{2i+2}}$$

$$= \{\Sigma q^{3i(3i+1)} - 2\Sigma q^{(6i+1)(6i+2)}\}\{\Sigma(-1)^i q^{9i^2} - 2\Sigma(-1)^i q^{(3i+1)^2}\}.$$

Wenn man in (58.) und (59.) die angedeutete Multiplication ausführt, indem man das Product zweier Summen immer durch eine Doppelsumme ersetzt, so giebt die Vergleichung dieser beiden Formeln eine Gleichung zwischen *zehn* Doppelsummen. Diese Gleichung zerfällt in drei einfachere, wenn man die Doppelsummen besonders einander gleich setzt, in welchen die Exponenten von q respective die Formen $3i$, $3i+1$ und $3i+2$ haben. Wenn man in diesen Gleichungen $-q$ für q^3 setzt, nachdem man respective die zweite und dritte Gleichung durch q und q^2 dividirt hat, so kommt die dritte auf die Gleichung A. (1) zurück, und es werden die beiden andern Gleichungen,

$$60. \quad \Sigma q^{6(i^2+k^2)+i+3k} + \Sigma q^{6(i^2+k^2)+5i+3k+1} = \Sigma q^{3(i^2+k^2)+i+2k}$$

$$61. \quad \Sigma q^{6(i^2+k^2)+i+k} - 4\Sigma q^{6(i^2+k^2)+i+5k+1} + \Sigma q^{6(i^2+k^2)+5(i+k)+2}$$
$$= \Sigma q^{3i^2+3k^2+i} - 4\Sigma q^{3i^2+12k^2+2i+6k+1}.$$

Je nachdem die Zahl i gerade $=2i$ oder ungerade $=-(2i+1)$ ist, verwandelt sich $\frac{1}{2}(3i^2+i)$ in $6i^2+i$ oder in $(2i+1)(3i+1) = 6i^2+5i+1$.

Hieraus folgt, dafs man in (60.) die beiden Doppelsummen links vom Gleichheitszeichen in die eine

$$60^*. \qquad \Sigma q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)+6k^2+3k} = \Sigma q^{3(i^2+k^2)+i+2k}$$

zusammenziehen kann. Zufolge A. (7.) werden in (61.) die zweiten Doppelsummen auf den beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleich. Die Gleichung (61.) wird dadurch auf die folgende reducirt,

$$62. \qquad \Sigma q^{6(i^2+k^2)+i+k} + \Sigma q^{6(i^2+k^2)+5(i+k)+2} = \Sigma q^{3i^2+3k^2+i}.$$

Wir werden im Folgenden sehen, dafs auch die Gleichungen (60*.) und (62.) in allgemeineren Formeln enthalten ist.

Allgemeinere zur Classe (1, 1) gehörige Gleichungen zwischen Doppelsummen.

Ich will jetzt zeigen, wie man unmittelbar aus den Fundamentalformeln *drei* allgemeine Gleichungen zwischen Doppelsummen ableiten kann, in welchen die Gröfsen q und z, welche sie enthalten, beide beliebig bleiben. Diese zur Classe (1, 1) gehörigen Gleichungen werden die Formeln A. (1) — (7) der Formelntabelle, so wie die im Vorhergehenden gefundenen Gleichungen (55.), (60*.) und (62.) als besondere Fälle umfassen. Eine dieser Formeln kommt mit derjenigen, welche ich in der Anmerkung zur Formelntabelle mitgetheilt habe, überein, wenn man für q und z beliebige Potenzen von q setzt, was dasselbe ist, als wenn diese Gröfsen ihre völlige Allgemeinheit beibehalten.

Man erhält zwei von diesen allgemeinen Gleichungen, wenn man die beiden Formeln

$$\Pi\{(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+1}z)(1+q^{2i+1}z^{-1})\} = \Sigma q^{i^2}z^i,$$
$$\Pi\{(1-q^{2i+2})(1-q^{2i+1}z)(1-q^{2i+1}z^{-1})\} = \Sigma(-1)^i q^{i^2}z^i,$$

ferner die beiden Formeln

$$\Pi\{(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+1}z^2)(1+q^{2i+1}z^{-2})\} = \Sigma q^{i^2}z^{2i},$$
$$(z+z^{-1})\Pi\{(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+2}z^2)(1+q^{2i+2}z^{-2})\} = \Sigma q^{i^2+i}z^{2i+1}$$

mit einander multiplicirt. Man kann nämlich jedes der beiden unendlichen Producte, welche man nach geschehener Multiplication erhält, noch auf eine andere Art in zwei elliptische unendliche Producte zerfällen, von denen nur das eine die Gröfse z enthält, und erhält hiedurch die beiden allgemeinen Formeln:

63. $$\Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})\}.\Pi\{(1-q^{4i+4})(1-q^{4i+2}z^2)(1-q^{4i+2}z^{-2})\}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k}q^{2i^2+2k^2}z^{2k} = \Sigma(-1)^i q^{i^2+k^2}z^{i+k}$$

64. $$\Pi\{(1+q^{2i+1})(1-q^{4i+4})\}.(z+z^{-1})\Pi\{(1-q^{i+1})(1+q^{i+1}z^2)(1+q^{i+1}z^{-2})\}$$
$$= \Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)+2k^2+k}z^{2i+1} = \Sigma q^{i^2+k^2+i}z^{2i+2k+1}.$$

Da $\Sigma q^{\frac{1}{2}(k^2+k)} = 2\Sigma q^{2k^2+k}$, so wird die erste Doppelsumme in (64.)

$$\tfrac{1}{2}\Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+k^2+i+k)}z^{2i+1};$$

vertauscht man in diesem Ausdruck die Indices i und k, und setzt hierauf wieder $2\Sigma q^{2k^2+k}$ für $\Sigma q^{\frac{1}{2}(k^2+k)}$, so erhält man

$$\Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)+2k^2+k}z^{2k+1} = \Sigma q^{i^2+k^2+i}z^{2i+2k+1},$$

oder, wenn man mit z dividirt und dann z für z^2 setzt,

64*. $$\Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)+2k^2+k}z^i = \Sigma q^{\frac{1}{2}(i^2+i)+2k^2+k}z^k = \Sigma q^{i^2+k^2+i}z^{i+k}.$$

Die beiden Formeln (63.) und (64*.) umfassen sämmtliche Formeln A. (1) — (7) und die im Vorigen gefundne Formel (60*.). Setzt man nämlich in (63.) für q und z nach einander

$$q^{\frac{3}{2}},\ q^{\frac{1}{2}};\quad q,\ 1;\quad q^2,\ q,$$

so erhält man die Formeln A. (2)*), (4), (5). Setzt man ferner in (64*.) $-q^{-1}$ für z und für q nach einander q^3, q^4, q^6, so erhält man die Formeln A. (3), (6), (7); setzt man in derselben Formel q^{-1} für z und q^2 für q, so erhält man A. (1); endlich, wenn man q^{-1} für z und q^3 für q setzt, die Formel (60*.). Die Formel (63.) verwandelt sich in die oben S. 90 gegebne, wenn man für q und z beliebige Potenzen von q setzt.

Eine dritte allgemeine Formel kann man auf folgende Art aus der Fundamentalformel ableiten.

Man setze in der Formel

$$\Pi\{(1-q^{2i+2})(1+q^{2i+1}z)(1+q^{2i+1}z^{-1})\} = \Sigma q^{i^2}z^i$$

für q nach einander die Werthe $q\sqrt{-1}$ und $-q\sqrt{-1}$, und multiplicire die beiden hiedurch erhaltenen Gleichungen. Da

$$\Pi(1-q^{2i+2}) = \Pi(1-q^{4i+2})\Pi(1-q^{4i+4}),$$
$$\Sigma(\sqrt{-1})^{i^2}q^{i^2}z^i = \Sigma q^{4i^2}z^{2i} + \sqrt{-1}\,\Sigma q^{(2i+1)^2}z^{2i+1},$$

---

*) In dieser Formel ist in der zweiten Doppelsumme für $3ii+kk$ zu lesen $3ii+3kk$.

so findet man auf diese Weise,

$$\Pi\{(1+q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})\}.\Pi\{(1-q^{4i+4})(1+q^{4i+2}z^2)(1+q^{4i+2}z^{-2})\}$$
$$=\Sigma q^{2i^2}.\Sigma q^{2i^2}z^{2i} = \{\Sigma q^{4i^2}z^{2i}\}^2+\{\Sigma q^{(2i+1)^2}z^{2i+1}\}^2,$$

oder, wenn man wieder für jedes Product zweier Reihen eine Doppelsumme und zugleich q, z für q^2, z^2 setzt,

$$65.\quad \Pi\{(1+q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})^2(1+q^{2i+1}z)(1+q^{2i+1}z^{-1})\}$$
$$=\Sigma q^{i^2+k^2}z^i = \Sigma q^{2i^2+2k^2}z^{i+k}+\Sigma q^{2(i^2+k^2)+2(i+k)+1}z^{i+k+1}.$$

Setzt man in dieser allgemeinen Formel wieder q^2 für q und giebt der Gröfse z den Werth q^{-1}, setzt man ferner rechts vom Gleichheitszeichen $-i$ und $-k$ für i und k, so erhält man die obige Formel (55.). Setzt man dagegen in der zweiten Doppelsumme rechts $-i-1$ und $-k-1$ für i und k, wodurch sich z^{i+k+1} in $z^{-(i+k+1)}$ ändert, und hierauf q^3 und q für q und z; so erhält man die obige Formel (62.). Diese particulären Formeln (55.) und (62.) waren dadurch gefunden worden, dafs in den Fundamentalformeln für z primitive 16te und 24te Wurzeln der Einheit gesetzt wurden, während im Vorhergehenden die allgemeine Formel (65.) aus denselben Fundamentalformeln dadurch abgeleitet worden ist, dafs man für q die Gröfse $q\sqrt{-1}$ setzte, welche Methoden wesentlich von einander verschieden sind.

Neue Gleichungen zwischen Doppelsummen, welche aus den der Transformation der 3ten und 7ten Ordnung angehörenden Modulgleichungen hervorgehen.

Zu den zahlreichen in den vorhergehenden Untersuchungen aus einer und derselben Fundamentalformel abgeleiteten Gleichungen zwischen Doppelsummen will ich noch einige hinzufügen, welche aus einer andern Quelle fliefsen, nämlich aus den *Modulgleichungen* oder den algebraischen Gleichungen zwischen den Moduln zweier elliptischen Integrale, welche in einander transformirt werden können. Unter den unendlich vielen Gleichungen dieser Art können jedoch nur die auf die Transformation der 3ten und der 7ten Ordnung bezüglichen zu dem vorliegenden Zweck angewendet werden. Diese nehmen ihre einfachste Form an, wenn man die erstere zwischen den *Quadratwurzeln* und die letztere zwischen den *Biquadratwurzeln* der Moduln und ihrer Complemente aufstellt. Es wird nämlich die erstere eine *lineäre* Gleichung zwischen dem Product der Quadratwurzeln des gegebnen und transformirten Moduls und dem Product der Quadratwurzeln ihrer Complemente; die letztere eine *lineäre* Gleichung zwischen

dem Product der Biquadratwurzeln des gegebnen und transformirten Moduls und dem Product der Biquadratwurzeln ihrer Complemente. Ich habe in den *Fundamentis* S. 184 die Quadratwurzel des Moduls und seines Complements durch gebrochne Functionen von q ausgedrückt, welche denselben Nenner haben, und oben S. 82 und 83 dasselbe in Bezug auf ihre Biquadratwurzel gethan, und zwar auf *vier* verschiedene Arten. Setzt man in diesen Ausdrücken q^n für q, so verwandeln sie sich nach der von mir aufgestellten Theorie der Transformation der elliptischen Functionen respective in die Ausdrücke der Quadrat- und Biquadratwurzel des durch eine Transformation der $n$ten Ordnung transformirten Moduls und seines Complements. Wenn man daher in dem Ausdrucke der Quadratwurzel des Moduls und seines Complements q^3 für q und in den Ausdrücken ihrer Biquadratwurzel q^7 für q setzt, so wird man alle in die beiden Modulgleichungen eingehenden Gröfsen durch q ausgedrückt haben, und zwar werden die beiden Producte, zwischen denen eine lineäre Gleichung gegeben ist, durch Brüche ausgedrückt werden, welche denselben Nenner haben. Die beiden Zähler derselben und ihr gemeinschaftlicher Nenner werden Doppelsummen von der hier betrachteten Art, und es wird daher durch Multiplication mit dem gemeinschaftlichen Nenner jedesmal eine Gleichung zwischen diesen drei Doppelsummen erhalten. In mehreren dieser Gleichungen trifft es sich jedoch, dafs die allgemeinen Glieder zweier von diesen Doppelsummen nur im Vorzeichen verschieden sind, und sich daher in eines zusammenziehen lassen. In diesen Fällen erhält man aus den beiden Modulgleichungen Gleichungen zwischen nur zwei Doppelsummen, doch wird in der einen das allgemeine Gesetz der Vorzeichen einen complicirteren Ausdruck haben. Die Modulgleichung, die sich auf die Transformation 3ter Ordnung bezieht, führt zu einer zur Classe C. oder (3, 3) gehörenden Formel. Die auf die Transformation 7ter Ordnung bezügliche Modulgleichung führt durch Combination der verschiednen Ausdrücke, die ich oben für die Biquadratwurzel des Moduls und seines Complementes gegeben habe, zu 16 Formeln, die sich aber, wenn man diejenigen ausschliefst, die in den übrigen enthalten sind, auf 7 zurückführen lassen, von denen 3 der Classe (7, 7), 2 der Classe (7, 14) und 2 der Classe (21, 42) angehören.

I. $n = 3$.

Wenn man durch eine Transformation 3ter Ordnung oder durch eine Substitution von der Form

$$\sin\psi = \frac{a\sin\varphi + b\sin\varphi^3}{1 + c\sin\varphi^2}$$

die Integrale

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)}}, \quad \int \frac{d\psi}{\sqrt{(1-\lambda^2\sin\psi^2)}}$$

in einander transformiren kann, so findet zwischen den beiden Moduln k und λ und ihren Complementen $k'=\sqrt{(1-k^2)}$, $\lambda'=\sqrt{(1-\lambda^2)}$ die einfache Gleichung

$$\sqrt{(k'\lambda')}+\sqrt{(k\lambda)} = 1$$

Statt, welche zuerst von *Legendre* in seinem „Traité des Fonctions Elliptiques" aufgestellt worden ist. Substituirt man in den in den Fundamentis gegebnen Ausdrücken von $\sqrt{k}$ und $\sqrt{k'}$,

$$\sqrt{k} = \frac{2\{\sqrt[4]{q}+\sqrt[4]{q^9}+\sqrt[4]{q^{25}}+..\}}{1+2q+2q^4+2q^9+..} = \frac{2\sqrt[4]{q}\,\Sigma q^{4i^2+2i}}{\Sigma q^{i^2}},$$

$$\sqrt{k'} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+..}{1+2q+2q^4+2q^9+..} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{i^2}}{\Sigma q^{i^2}},$$

für q die Gröfse q^3, so erhält man

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2\sqrt[4]{q^3}\,\Sigma q^{3(4i^2+2i)}}{\Sigma q^{3i^2}}, \quad \sqrt{\lambda'} = \frac{\Sigma(-1)^i q^{3i^2}}{\Sigma q^{3i^2}}.$$

Wenn man diese Ausdrücke in die Modulgleichung substituirt, so ergiebt sich die folgende Formel, welcher ich das den Doppelsummen gleiche unendliche Product in seiner Normalform beigefügt habe,

XIII.

$$4q\Pi\{(1+q^{12i+2})(1+q^{12i+6})^2(1+q^{12i+10})(1-q^{24i+8})(1-q^{24i+16})(1-q^{24i+24})^2\}$$
$$= \Sigma\{1-(-1)^{i+k}\}\,q^{i^2+3k^2} = 4\Sigma q^{4i^2+12k^2+2i+6k+1}.$$

Diese Formel gehört der Classe (3, 3) oder C. an, und kann den oben gegebnen Formeln dieser Classe hinzugefügt werden.

Die in XIII. links vom Gleichheitszeichen befindliche Doppelsumme besitzt die Eigenschaft, dafs wenn von ihr blofs diejenigen Glieder, deren Exponent durch 3 aufgeht, genommen werden, für welche i die Form $3i$ annimmt, und in denselben q für q^3 gesetzt wird, man auf die ursprüngliche Doppelsumme wieder zurückkommt. Dieselbe Eigenschaft läfst sich auch von der hinter dem letzten Gleichheitszeichen befindlichen leicht erweisen. Um nämlich alle Glieder, deren Exponent durch 3 theilbar ist, zu erhalten, hat man in derselben unter dem Zeichen Σ nur $-(3i+1)$ für i zu setzen, wodurch sich $4i^2+2i+1$ in $12i^2+18i+3$ verwandelt; setzt man hierauf q für q^3 und vertauscht die In-

dices i und k, so kommt man auf den ursprünglichen Ausdruck zurück. Es giebt daher die besondere Vergleichung derjenigen Glieder der Gleichung XIII., deren Exponent durch 3 theilbar ist, wieder dieselbe Gleichung XIII., nur dafs in ihr q^3 für q steht.

Will man in XIII. die Glieder der Doppelsummen besonders mit einander vergleichen, deren Exponent, durch 3 dividirt, den Rest 1 läfst, so hat man in der Doppelsumme links $\pm(3i+1)$ für i zu setzen, in der Doppelsumme rechts dagegen mufs man dem Index i die Formen $3i$ und $3i+1$ geben. Wenn man dann noch mit $2q$ dividirt und q für q^3 setzt, ferner auf beiden Seiten die Indices i und k vertauscht, so erhält man

$$\Sigma(1+(-1)^{i+k})q^{3i^2+3k^2+2k} = 2\Sigma q^{4i^2+12k^2+2i+2k}+2\Sigma q^{4i^2+12k^2+2i+10k+2}.$$

Die beiden Doppelsummen rechts kann man in eine zusammenziehen. Da nämlich $12k^2+10k+2=(2k+1)(6k+2)$, so sind $12k^2+2k$ und $12k^2+10k+2$ die beiden Formen, welche die Zahl $k(3k+1)$ annimmt, je nachdem k gerade $=2k$ oder ungerade $=-(2k+1)$ wird. Man kann daher statt der vorstehenden Gleichung einfacher die folgende setzen, bei welcher ich zugleich das den Doppelsummen gleiche unendliche Product in seiner Normalform beigefügt habe:

$$2\Pi\{(1+q^{12i+2})^2(1+q^{12i+10})^2(1-q^{12i+12})^2(1+q^{24i+4})(1+q^{24i+20})(1-q^{48i+16})(1-q^{48i+32})\}$$
$$= \Sigma(1+(-1)^{i+k})q^{i^2+3k^2+2k} = 2\Sigma q^{4i^2+3k^2+2i+k}.$$

Wie diese Gleichung aus der Gleichung XIII. folgt, so wird sich auch umgekehrt aus ihr die Gleichung XIII. ergeben. Wenn nämlich $q<1$ und $f(q)$ eine Function, welche für $q=0$ verschwindet, und durch $f(q)$ eine andere Function $\varphi(q)$ mittelst der Gleichung

$$f(q) = f(q^3)+q\varphi(q^3)$$

definirt wird, so wird umgekehrt $\varphi(q)$ aus $f(q)$ durch die unendliche Reihe

$$q\varphi(q^3)+q^3\varphi(q^9)+q^9\varphi(q)^{27}+q^{27}\varphi(q^{81})+\text{etc.} = f(q)$$

bestimmt. Bezeichnet man eine der beiden Doppelsummen in XIII. mit $f(q)$, so wird die auf derselben Seite des Gleichheitszeichens befindliche Doppelsumme in der aus XIII. abgeleiteten Gleichung $\frac{1}{2}\varphi(q)$; und da immer auch $f(q)$ durch $\varphi(q)$ bestimmt ist, so folgt, dafs wenn die beiden Doppelsummen der letzteren Gleichung einander gleich sind, auch die beiden Doppelsummen in XIII. einander gleich sein müssen.

II. $n = 7$.

In dem 12ten Bande des *Crelle*schen Journals S. 173 hat Herr Dr. *Gützlaff* die algebraische Transformation der 7ten Ordnung untersucht, und die auf diese Transformation bezügliche Modulgleichung auf die einfache Form

$$\sqrt[4]{(k'\lambda')} + \sqrt[4]{(k\lambda)} = 1$$

gebracht. Jede der beiden Gröfsen $\sqrt[4]{k}$ und $\sqrt[4]{k'}$ habe ich oben durch *vier* verschiedene Brüche ausgedrückt. Es ist nämlich

66.
$$\begin{cases} a) & \sqrt[4]{k} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\,\Sigma(-1)^i q^{6i^2+2i}}{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)} q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}}, \qquad \sqrt[4]{k'} = \dfrac{\Sigma(-1)^i q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}}{\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)} q^{\frac{1}{2}(3i^2+i)}}, \\ b) & \sqrt[4]{k} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\,\Sigma q^{4i^2+2i}}{\Sigma q^{2i^2+i}}, \qquad \sqrt[4]{k'} = \dfrac{\Sigma(-1)^i q^{2i^2+i}}{\Sigma q^{2i^2+i}}, \\ c) & \sqrt[4]{k} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\,\Sigma(-1)^i q^{2i^2+i}}{\Sigma(-1)^i q^{2i^2}}, \qquad \sqrt[4]{k'} = \dfrac{\Sigma(-1)^i q^{i^2}}{\Sigma(-1)^i q^{2i^2}}, \\ d) & \sqrt[4]{k} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\,\Sigma q^{2i^2+i}}{\Sigma q^{i^2}}, \qquad \sqrt[4]{k'} = \dfrac{\Sigma(-1)^i q^{2i^2}}{\Sigma q^{i^2}}, \end{cases}$$

wo die neben einander gestellten Brüche denselben Nenner haben.

Wenn man in diesen Ausdrücken für q die Gröfse q^7 setzt, so erhält man 4 verschiedne Brüche für jede der beiden Gröfsen $\sqrt[4]{\lambda}$ und $\sqrt[4]{\lambda'}$, welche wieder respective dieselben Nenner haben. Man substituire jetzt beliebige dieser Ausdrücke von $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$, $\sqrt[4]{\lambda}$, $\sqrt[4]{\lambda'}$ für diese Gröfsen in die Modulgleichung, *indem man jedoch für $\sqrt[4]{k}$ und $\sqrt[4]{k'}$ und eben so für $\sqrt[4]{\lambda}$ und $\sqrt[4]{\lambda'}$ gleichzeitig immer nur diejenigen Brüche setzt, welche denselben Nenner haben.* Es werden dann jedesmal auch die Ausdrücke von $\sqrt[4]{(k\lambda)}$ und $\sqrt[4]{(k'\lambda')}$ einen gemeinschaftlichen Nenner haben, und es wird sich durch Multiplication mit demselben jedesmal eine Gleichung zwischen drei Doppelsummen ergeben.

Bezeichnet man die aus den Formeln $a)$, $b)$, $c)$, $d)$ durch Verwandlung von q in q^7 hervorgehenden Formeln respective mit $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$, so ergeben sich auf die angegebne Art aus der einen Modulgleichung 16 Gleichungen zwischen Doppelsummen, welche dadurch erhalten werden, dafs man jede der Formeln $a)$, $b)$, $c)$, $d)$ mit jeder der Formeln $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$ combinirt. Diese Gleichungen werden zu Classen gehören, von denen in den vorhergehenden Untersuchungen noch kein Beispiel gefunden war. Es geben nämlich die Combinationen

$$a\alpha,\ b\beta,\ c\gamma,\ d\delta \quad \text{Gleichungen der Classe } (7, 7);$$

$$\left.\begin{matrix} a\beta,\ a\gamma,\ a\delta \\ b\alpha,\ c\alpha,\ d\alpha \end{matrix}\right\} \quad - - - - - - - \quad (21, 42);$$

$$\left.\begin{matrix} b\gamma,\ b\delta,\ c\delta \\ c\beta,\ d\beta,\ d\gamma \end{matrix}\right\} \quad - - - - - - - \quad (7, 14).$$

Diese Gleichungen lassen sich jedoch, wenn man nur die wesentlich verschiednen von ihnen betrachten will, auf eine viel geringere Anzahl zurückführen. Es werden nämlich die aus den Combinationen $d\delta$; $b\delta$, $d\beta$, $d\gamma$; $a\delta$, $d\alpha$ hervorgehenden Gleichungen respective aus den durch die Combinationen $c\gamma$; $b\gamma$, $c\beta$, $c\delta$; $a\gamma$, $c\alpha$ gefundnen durch blofse Verwandlung von q in $-q$ erhalten. Es ergiebt sich ferner bei näherer Untersuchung, dafs die aus den Combinationen $b\gamma$, $a\beta$, $a\gamma$ entspringenden Gleichungen respective in den durch die Combinationen $c\beta$, $b\alpha$, $c\alpha$ gefundnen enthalten sind und aus ihnen dadurch abgeleitet werden können, dafs man die Glieder, deren Exponent durch 7 aufgeht, besonders mit einander vergleicht. Ich werde daher in dem folgenden Tableau nur die 7 aus den Combinationen

$$a\alpha,\ b\beta,\ c\gamma;\ c\beta,\ c\delta;\ b\alpha,\ c\alpha$$

hervorgehenden Gleichungen zusammenstellen, aus denen die übrigen folgen. Die diesen Gleichungen hinzugefügten unendlichen Producte habe ich in einer einfachen, nicht in der Normalform dargestellt, da in diesen Fällen das allgemeine Glied der Normalform eine sehr grofse Factorenanzahl umfafst.

XIV.

L. (7, 7).

1. $$2q\Pi\{(1+q^{12i+4})(1+q^{12i+8})(1-q^{12i+12})(1+q^{84i+28})(1+q^{84i+56})(1-q^{84i+84})\}$$
$$= \Sigma\{(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+k^2+i+k)} - (-1)^{i+k}\}\, q^{\frac{1}{2}(3i^2+21k^2+i+7k)}$$
$$= 2\Sigma(-1)^{i+k} q^{6i^2+42k^2+2i+14k+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad a,\ \alpha$$

2. $$2q\Pi\{(1+q^{8i+2})(1+q^{8i+6})(1-q^{8i+8})(1+q^{56i+14})(1+q^{56i+42})(1-q^{56i+56})\}$$
$$= \Sigma\{1-(-1)^{i+k}\}\, q^{2i^2+14k^2+i+7k} = 2\Sigma q^{4i^2+28k^2+2i+14k+1} \quad \ldots \quad b,\ \beta$$

3. $$\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})(1-q^{14i+7})^2(1-q^{14i+14})\}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{i^2+7k^2}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{2i^2+14k^2} - 2\Sigma(-1)^{i+k} q^{2i^2+14k^2+i+7k+1} \quad \ldots\ldots \quad c,\ \gamma$$

M. (7, 14).

1. $\Pi\{(1-q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})(1+q^{28i+7})(1+q^{28i+21})(1-q^{28i+28})\}$
$= \Sigma(-1)^i q^{2i^2+14k^2+7k}$
$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{i^2+14k^2+7k} + 2\Sigma(-1)^i q^{2i^2+28k^2+i+14k+1}$ . . . . . . c, β

2. $2q\Pi\{(1-q^{2i+1})(1-q^{4i+4})(1+q^{14i+7})(1-q^{28i+28})\}$
$= 2\Sigma(-1)^i q^{2i^2+14k^2+i+7k+1}$
$= \Sigma(-1)^i q^{2i^2+7k^2} - \Sigma(-1)^{i+k} q^{i^2+14k^2}$ . . . . c, δ

N. (21, 42).

1. $2q\Pi\{(1+q^{4i+2})(1-q^{8i+8})(1-q^{28i+28})\}$
$= \Sigma\{(-1)^{\frac{1}{2}(k^2-k)} - (-1)^{i+k}\} q^{\frac{1}{2}(4i^2+21\lambda^2+2i+7k)}$
$= 2\Sigma(-1)^k q^{4i^2+42k^2+2i+14k+1}$ . . . . b, a

2. $\Pi\{(1-q^{2i+1})^2(1-q^{2i+2})(1-q^{7i+7})$
$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(k^2-k)+i} q^{\frac{1}{2}(4i^2+21k^2+7k)} - 2\Sigma(-1)^{i+k} q^{2i^2+42k^2+i+14k+1}$
$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{\frac{1}{2}(2i^2+21k^2+7k)}$ . . . . c, a

Wenn man in den drei Gleichungen L. und der Gleichung M. (2) die Glieder besonders vergleicht, deren Exponenten, durch 7 dividirt, respective die Reste 2, 6, 0, 0 lassen, so wird man wieder auf ähnliche Gleichungen zurückgeführt. Aus dieser Eigenschaft lassen sich, wie die folgenden Betrachtungen zeigen, ähnlich wie in I., besondre Formen schliefsen, welche die durch die Doppelsummen ausgedrückten Reihen haben müssen.

1. Die Zahl $\frac{1}{2}(3i^2+i)$ erhält die Form $7i+2$ nur für die Werthe von i, welche die Form $7i+1$ haben. Setzt man $7i+1$ für i, so verwandelt sich $\frac{1}{2}(3i^2+i+10)$ in $\frac{7}{2}(21i^2+7i+2)$ und $6i^2+2i+6$ in $7(42i^2+14i+2)$, und es erhält $(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)}$ den entgegengesetzten Werth. Wenn man daher in der Gleichung L. (1) nach Multiplication mit q^6 nur die Glieder beibehält, deren Exponent durch 7 theilbar ist, und in denselben q für q^7 setzt, ferner mit $-q$ dividirt und die Indices i und k vertauscht, so werden auf beiden Seiten der Gleichung wieder die ursprünglichen Doppelsummen erhalten werden. Bezeichnet man daher die auf den beiden Seiten von L. (1) befindlichen Doppelsummen mit $f(q)$, so wird

$$f(q) = -q^2 f(q^7) + f_1(q),$$

wo $f_1(q)$ eine Function von q ist, in welcher kein Exponent die Form $7i+2$

hat. Aus dieser Gleichung ergiebt sich umgekehrt $f(q)$ durch $f_1(q)$ mittelst der Formel,

$$f(q) = f_1(q) - q^2 f_1(q^7) + q^{\frac{1}{3}(7^2-1)} f_1(q^{7^2}) - q^{\frac{1}{3}(7^3-1)} f_1(q^{7^3}) + \text{etc.}$$

Das Characteristische dieser Form der Reihe $f(q)$ besteht darin, dafs, wenn man den Theil derselben, welcher die Glieder umfafst, deren Exponent durch 7^m dividirt den Rest $\frac{1}{3}(7^m-1)$, aber nicht auch durch 7^{m+1} dividirt den Rest $\frac{1}{3}(7^{m+1}-1)$ läfst, durch $(-1)^m q^{\frac{1}{3}(7^m-1)} f_1(q^{7^m})$ ausdrückt, die Function $f_1(q)$ für jedes m dieselbe bleibt, und die Glieder der Reihe $f(q)$ enthält, deren Exponent durch 7 dividirt nicht den Rest 2 läfst.

In der Gleichung L. (1) ist die Doppelsumme hinter dem zweiten Gleichheitszeichen eine ungerade Function von q; man beweist leicht, dafs dies auch mit der Doppelsumme vor diesem Gleichheitszeichen der Fall ist, indem der Factor $(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+k^2+i+k)} - (-1)^{i+k} = 0$ ist, so oft der Exponent $\frac{1}{2}(3i^2+21k^2+i+7k)$ gerade ist. Weil hier die Function $f(q)$ eine ungerade ist, mufs auch $f_1(q)$ eine ungerade Function sein.

2. Man multiplicire die Gleichung L. (2) mit q, und behalte blofs die Glieder, deren Exponent durch 7 aufgeht, was dadurch geschieht, dafs man $-(7i+2)$ für i substituirt, wodurch $2i^2+i+1$ sich in $7(14i^2+7i+1)$ verwandelt. Setzt man hierauf q für q^7 und dividirt mit q, so erhält man nach Vertauschung der Indices wieder auf beiden Seiten der Gleichung die ursprünglichen Doppelsummen. Bezeichnet man daher die Doppelsummen in L. (2) mit $f(q)$ und mit $f_1(q)$ die Glieder von $f(q)$, in welchen kein Exponent die Form $7n+6$ hat, so wird

$$f(q) = q^6 f(q^7) + f_1(q).$$

Man erhält hieraus für $f(q)$ die Form

$$f_1(q) + q^6 f_1(q^7) + q^{7^2-1} f_1(q^{7^2}) + q^{7^3-1} f_1(q^{7^3}) + \text{etc.} = f(q).$$

Das Characteristische dieser Form besteht darin, dafs wenn man die Glieder von $qf(q)$, deren Exponent durch 7^m, nicht aber durch 7^{m+1} aufgeht, durch den Ausdruck $q^{7^m} f_1(q^{7^m})$ darstellt, die Function $qf_1(q)$ für jedes m dieselbe bleibt, und die Glieder der Reihe $qf(q)$ enthält, deren Exponent nicht durch 7 aufgeht.

3. Die beiden Doppelsummen in L. (3) gehen in sich selbst über, wenn man in den Gliedern, deren Exponent durch 7 theilbar ist, q für q^7 setzt. Hieraus folgt, dafs sie die Form

$$f_1(q) + f_1(q^7) + f_1(q^{7^2}) + \text{etc.}$$

haben, wo $f_1(q)$ eine Reihe bedeutet, in der kein Exponent durch 7 theilbar ist. Bezeichnet man daher den Theil derselben, welcher die Glieder umfafst, deren Exponent durch 7^m, aber nicht durch 7^{m+1} aufgeht, mit $f_1(q^{7^m})$, so bleibt $f_1(q)$ für jedes m dieselbe Function.

4. Betrachtet man in M. (2) diejenigen Glieder, deren Exponent durch 7 theilbar ist, setzt in ihnen $-q$ für q^7, und kehrt alle Zeichen um, so kommt man wieder auf die ursprünglichen Doppelsummen zurück. Bezeichnet man daher diese Doppelsummen mit $f(q)$, und umfafst mit $f_1(q)$ die Glieder derselben, die einen durch 7 theilbaren Exponenten haben, so mufs die Gleichung

$$f(q) = -f(-q^7)+f_1(q)$$

Statt finden, woraus

$$f(q) = f_1(q)-f_1(-q^7)+f_1(q^{7^2})-f_1(-q^{7^3})+\text{etc.}$$

folgt. Diese Formel zeigt, dafs wenn man in $f(q)$ alle Glieder, deren Exponenten durch 7^m, aber nicht durch 7^{m+1} theilbar sind, durch den Ausdruck $(-1)^m f_1((-1)^m q^{7^m})$ umfafst, $f_1(q)$ für jedes m unverändert bleibt.

Man kann noch aus andern Darstellungen der Modulgleichung Gleichungen zwischen Doppelsummen ableiten, welche aber in den im Vorhergehenden aufgestellten Formeln enthalten sein werden, weshalb die folgenden Andeutungen genügen mögen. Die Gröfsen

$$\sqrt[4]{k'},\quad \sqrt[4]{k},\quad \sqrt{k'},\quad \sqrt[4]{(kk')},\quad \sqrt{k}$$

lassen sich durch Brüche darstellen, welche alle denselben Nenner Σq^{i^2} haben, während die Zähler Reihen ähnlicher Art sind. Für $\sqrt[4]{(kk')}$ erhält man einen solchen Bruch, wenn man den Werth von $\sqrt[4]{k}$ aus (66. c) mit dem Werthe von $\sqrt[4]{k'}$ aus (66. d) multiplicirt. Fügt man aus (66.) die mit dem Nenner Σq^{i^2} behafteten Ausdrücke der andern 4 Gröfsen hinzu, so erhält man

67. $$\begin{cases} \sqrt[4]{k'} = \dfrac{\Sigma(-1)^i q^{2i^2}}{\Sigma q^{i^2}}, & \sqrt[4]{k} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\,\Sigma q^{2i^2+i}}{\Sigma q^{i^2}}, \\ \sqrt{k'} = \dfrac{\Sigma(-1)^i q^{i^2}}{\Sigma q^{i^2}}, \quad \sqrt[4]{(kk')} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt[8]{q}\,\Sigma(-1)^i q^{2i^2+i}}{\Sigma q^{i^2}}, & \sqrt{k} = \dfrac{2\sqrt[4]{q}\,\Sigma q^{4i^2+2i}}{\Sigma q^{i^2}}. \end{cases}$$

Bedeutet λ irgend einen transformirten Modul, so folgt hieraus, dafs, so oft man zwischen den 36 Gröfsen, welche aus der Multiplication von 1, $\sqrt[4]{k'}$, $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt{k'}$, $\sqrt[4]{(kk')}$, $\sqrt{k}$ mit 1, $\sqrt[4]{\lambda'}$, $\sqrt[4]{\lambda}$, $\sqrt{\lambda'}$, $\sqrt[4]{(\lambda\lambda')}$, $\sqrt{\lambda}$ erhalten werden, eine lineäre Gleichung hat, sich aus derselben auch eine Gleichung zwischen Doppelsummen der hier betrachteten Art ergiebt. Multiplicirt man z. B. die Modul-

gleichung $\sqrt[4]{(k'\lambda')}+\sqrt[4]{(k\lambda)} = 1$ mit $\sqrt[4]{(k'\lambda')}$ oder mit $\sqrt[4]{(k\lambda)}$ und substituirt in den hieraus entstehenden Gleichungen,

$$\sqrt{(k'\lambda')}+\sqrt[4]{(k'k\lambda'\lambda)} = \sqrt[4]{(k'\lambda')}, \qquad \sqrt[4]{(k'k\lambda'\lambda)}+\sqrt{(k\lambda)} = \sqrt[4]{(k\lambda)}$$

die Formeln (67.), so erhält man nach Multiplication mit dem gemeinschaftlichen Nenner $\Sigma q^{i^2}\Sigma q^{7i^2}$ Gleichungen zwischen Doppelsummen, die mit den obigen L. (2), (3) übereinkommen. Ob es aufser den hier gegebnen Beispielen noch andere Modulgleichungen giebt, welche als lineäre Gleichungen zwischen den angegebnen 35 Gröfsen dargestellt werden können, bezweifle ich. Wenigstens scheint die zur Transformation 5ter Ordnung gehörige Modulgleichung,

$$\sqrt[4]{(k\lambda)}\{\sqrt{k}-\sqrt{\lambda}\} = \sqrt[4]{(k'\lambda')}\{\sqrt{\lambda'}-\sqrt{k'}\},$$

die ich in den „Fund. Theor. F. Ellipt. S. 69" gegeben habe, welche man auch auf die beiden folgenden Arten darstellen kann,

$$\sqrt{k}-\sqrt{\lambda} = \sqrt[4]{(k'\lambda')}\{\sqrt{(k\lambda')}+\sqrt{(k'\lambda)}\},$$
$$\sqrt{\lambda'}-\sqrt{k'} = \sqrt[4]{(k\lambda)}\{\sqrt{(k\lambda')}+\sqrt{(k'\lambda)}\},$$

auf keine solche Form gebracht werden zu können.

Ich will jetzt alle zwischen Doppelsummen gefundnen Gleichungen, welche in der obigen Formeltabelle und in den Formeln XI—XIV. enthalten sind, in einer *zweiten Formeltabelle* zusammenstellen, dabei aber zugleich durch Substitution einer Potenz von q für q selbst und durch Multiplication mit einer Potenz von q die Exponenten auf die Form

$$m(\alpha i+\beta)^2+n(\gamma k+\delta)^2$$

bringen, was für jede der in derselben Gleichung enthaltnen Doppelsummen durch dieselbe Substitution und Multiplication bewerkstelligt werden kann. Die Formen der Exponenten habe ich in Klammern übergeschrieben, wobei gemeinschaftliche Factoren von m und n fortgelassen sind. Die Gleichungen A. 1—6. der ersten Formeltabelle und die Formeln (55.), (62.), (64.) habe ich durch die allgemeinen Formeln, in denen sie enthalten sind, ersetzt.

Zweite Formelntabelle.

Allgemeine Gleichungen zwischen Doppelsummen.

1. $$\Pi\{(1-q^{2i+2})^2(1-q^{4i+2}z^2)(1-q^{4i+2}z^{-2})\}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{i^2+k^2} z^{i+k} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{2(i^2+k^2)} z^{2k}$$

2. $$(z+z^{-1})\Pi\{(1-q^{16i+16})^2(1+q^{8i+8}z^2)(1+q^{8i+8}z^{-2})\}$$
$$= \Sigma q^{2[(2i+1)^2+4k^2]} z^{2(i+k)+1} = \Sigma q^{(2i+1)^2+(4k+1)^2} z^{2i+1}$$

3. $$\Pi\{(1+q^{4i+2})^2(1-q^{4i+4})^2(1+q^{4i+2}z^2)(1+q^{4i+2}z^{-2})\}$$
$$= \Sigma q^{2(i^2+k^2)} z^{2i} = \Sigma q^{4(i^2+k^2)} z^{2(i+k)} + \Sigma q^{(2i+1)^2+(2k+1)^2} z^{2(i+k+1)}.$$

Particuläre Gleichungen zwischen Doppelsummen, deren Exponenten ähnliche quadratische Formen haben.

$$[xx+yy]$$

$$q^2\Pi\{(1-q^{16i+8})^2(1-q^{16i+16})^4\}$$
$$= \Sigma(4k+1) q^{(4i+1)^2+(4k+1)^2} = \Sigma(-1)^i(4k+1) q^{2[4i^2+(4k+1)^2]}.$$

$$[xx+2yy]$$

1. $$q^9\Pi\{(1-q^{144i+72})(1-q^{144i+144})^2\}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{3[(6i+1)^2+2(6k+1)^2]} = \Sigma(-1)^k q^{(6i+1)^2+8(3k+1)^2}$$
$$= \Sigma(-1)^k q^{9[(4i+1)^2+8k^2]}$$

2. $$q^3\Pi\{(1-q^{24i+24})(1-q^{36i+6})(1-q^{36i+30})(1-q^{36i+36})\}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{3(6i+1)^2+54k^2} - \Sigma(-1)^i q^{3(6i+1)^2+6(3k+1)^2}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{(6i+1)^2+2(3k+1)^2}$$

3. $$q^3\Pi\{(1-q^{48i+24})(1-q^{96i+96})(1+q^{144i+72})^2(1-q^{144i+144})\}$$
$$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)} q^{3(6i+1)^2+216k^2} - \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)} q^{3(6i+1)^2+24(3k+1)^2}$$
$$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2-i)+k} q^{(6i+1)^2+2(6k+1)^2}$$

4. $$q^3\Pi\{(1-q^{48i+24})(1-q^{144i+144})^2(1-q^{288i+96})(1-q^{288i+192})\}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{3(6i+1)^2+216k^2} - \Sigma(-1)^i q^{3(6i+1)^2+24(3k+1)^2}$$
$$= \Sigma(-1)^i q^{(6i+1)^2+2(6k+1)^2}$$

5. $$q^9\Pi\{(1-q^{24i+24})(1-q^{144i+24})(1-q^{144i+120})(1-q^{144i+144})\}$$
$$= \Sigma(-1)^k q^{3(6i+1)^2+6(6k+1)^2} - 2\Sigma(-1)^k q^{27(4i+1)^2+6(6k+1)^2}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{(6i+1)^2+2(6k+1)^2}.$$

$$[xx+3yy]$$

1. $$q^4 \Pi(1-q^{48i+48})^2$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{4[(6i+1)^2+12k^2]} = \Sigma(-1)^k q^{(6i+1)^2+3(4k+1)^2}$$
$$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)+k} q^{(6i+1)^2+3(4k+1)^2}$$

2. $$q^4 \Pi\{(1-q^{72i+24})(1-q^{72i+48})(1-q^{72i+72})^2\}$$
$$= \Sigma q^{4[(3i+1)^2+27k^2]} - \Sigma q^{4[(3i+1)^2+3(3k+1)^2]}$$
$$= \Sigma q^{(6i+1)^2+3(6k+1)^2} - 2\Sigma q^{(6i+1)^2+27(4k+1)^2}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{(6i+1)^2+3(6k+1)^2}$$

3. $$4q^4 \Pi\{(1+q^{16i+8})(1-q^{32i+32})(1+q^{48i+24})(1-q^{96i+96})\}$$
$$= \Sigma\{1-(-1)^{i+k}\} q^{4(i^2+3k^2)} = 4\Sigma q^{(4i+1)^2+3(4k+1)^2}.$$

$$[xx+7yy]$$

1. $$2q^{32} \Pi\{(1+q^{288i+96})(1+q^{288i+192})(1-q^{288i+288})(1+q^{2016i+672})(1+q^{2016i+1344})(1-q^{2016i+2016})\}$$
$$= \Sigma\{(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+k^2+i-k)} - (-1)^{i+k}\} q^{(6i+1)^2+7(6k+1)^2}$$
$$= 2\Sigma(-1)^{i+k} q^{4[(6i+1)^2+7(6k+1)^2]}$$

2. $$2q^8 \Pi\{(1+q^{64i+16})(1+q^{64i+48})(1-q^{64i+64})(1+q^{448i+112})(1+q^{448i+336})(1-q^{448i+448})\}$$
$$= \Sigma\{1-(-1)^{i+k}\} q^{(4i+1)^2+7(4k+1)^2} = 2\Sigma q^{2[(4i+1)^2+7(4k+1)^2]}$$

3. $$\Pi\{(1-q^{16i+8})^2(1-q^{16i+16})(1-q^{112i+56})^2(1-q^{112i+112})\}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{16(i^2+7k^2)} - 2\Sigma(-1)^{i+k} q^{(4i+1)^2+7(4k+1)^2}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{8(i^2+7k^2)}.$$

Particuläre Gleichungen zwischen Doppelsummen, deren Exponenten in wesentlich verschiedenen quadratischen Formen enthalten sind.

$$[xx+yy,\ xx+2yy]$$

$$q^6 \Pi\{(1+q^{96i+48})(1-q^{96i+96})^2\}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{6[(4i+1)^2+16k^2]} = \Sigma(-1)^k q^{3[(4i+1)^2+(4k+1)^2]}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{2[(6i+1)^2+2(6k+1)^2]} = \Sigma(-1)^k q^{6[(4i+1)^2+8k^2]}.$$

$$[xx+yy,\ xx+3yy]$$

$$q^4\,\Pi(1-q^{48i+48})^2$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{2[(6i+1)^2+(6k+1)^2]}$$
$$= \Sigma(-1)^{i} q^{(6i+1)^2+3(4k+1)^2} = \Sigma(-1)^{i+k} q^{4[(6i+1)^2+12k^2]}\ ^{*)}.$$

$$[xx+yy,\ xx+6yy]$$

$$q^2\,\Pi\{(1-q^{96i+48})^3(1-q^{96i+96})^2\}$$
$$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)+k} q^{(6i+1)^2+(6k+1)^2}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{2[(6i+1)^2+24k^2]}.$$

$$[xx+yy,\ 2xx+3yy]$$

$$q^5\,\Pi\{(1-q^{48i+24})(1-q^{96i+48})(1-q^{96i+96})^2\}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{(6i+1)^2+4(6k+1)^2}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{2(6i+1)^2+3(4k+1)^2}.$$

$$[xx+2yy,\ xx+3yy]$$

1. $$q\,\Pi\{(1+q^{48i+24})(1-q^{48i+48})(1-q^{72i+72})(1-q^{144i+72})\}$$
$$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)+k} q^{(6i+1)^2+72k^2}$$
$$= \Sigma(-1)^{k} q^{(6i+1)^2+48k^2}$$

2. $$q^9\,\Pi\{(1-q^{96i+48})^2(1-q^{96i+96})(1+q^{144i+72})(1-q^{288i+288})\}$$
$$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)+k} q^{(6i+1)^2+8(3k+1)^2}$$
$$= \Sigma(-1)^{i} q^{3[16i^2+3(4k+1)^2]}$$

3. $$q^4\,\Pi\{(1-q^{72i+72})(1-q^{144i+72})(1-q^{96i+96})\}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{4[(6i+1)^2+18k^2]}$$
$$= \Sigma(-1)^{k} q^{(6i+1)^2+3(4k+1)^2}$$

4. $$q^{12}\,\Pi\{(1-q^{96i+96})(1-q^{144i+24})(1-q^{144i+120})(1-q^{144i+144})\}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{4[(6i+1)^2+2(3k+1)^2]}$$
$$= \Sigma(-1)^{i} q^{3[(4i+1)^2+3(4k+1)^2]}.$$

---

*) In der entsprechenden Formel der ersten Formelntabelle ist für $\Pi(1-q^{+1})^2$ zu lesen $\Pi(1-q^{i+1})^2$.

$$[xx+2yy,\ xx+6yy]$$

1. $$q\,\Pi\{(1-q^{72i+24})(1-q^{72i+48})(1-q^{144i+72})^3(1-q^{144i+144})^2\}$$
$$=\Sigma(-1)^{i+k}q^{(6i+1)^2+72k^2}$$
$$=\Sigma(-1)^{k}q^{(6i+1)^2+24k^2}$$

2. $$q^9\,\Pi\{(1-q^{24i+24})(1-q^{144i+24})(1-q^{144i+120})(1-q^{144i+144})\}$$
$$=\Sigma(-1)^{i+k}q^{(6i+1)^2+8(3k+1)^2}$$
$$=\Sigma(-1)^{k}q^{9(4i+1)^2+24k^2}$$

3. $$q^3\,\Pi\{(1+q^{48i+24})(1-q^{72i+72})(1-q^{96i+96})(1-q^{144i+72})\}$$
$$=\Sigma(-1)^{k}q^{(6i+1)^2+2(6k+1)^2}$$
$$=\Sigma(-1)^{k}q^{3[(4i+1)^2+24k^2]}.$$

$$[xx+2yy,\ 2xx+3yy]$$

$$q^{11}\,\Pi\{(1-q^{48i+48})(1+q^{144i+72})(1-q^{288i+288})\}$$
$$=\Sigma(-1)^{k}q^{9(4i+1)^2+2(6k+1)^2}$$
$$=\Sigma(-1)^{i}q^{8(3i+1)^2+3(4k+1)^2}.$$

$$[xx+3yy,\ xx+6yy]$$

1. $$q\,\Pi\{(1-q^{48i+24})(1-q^{96i+48})^3(1-q^{96i+96})^2\}$$
$$=\Sigma(-1)^{i+k}q^{(6i+1)^2+48k^2}$$
$$=\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)+k}q^{(6i+1)^2+24k^3}$$

2. $$q^4\,\Pi\{(1-q^{48i+24})^2(1-q^{96i+48})(1-q^{96i+96})^2\}$$
$$=\Sigma(-1)^{i+k}q^{(6i+1)^2+3(4k+1)^2}$$
$$=\Sigma(-1)^{i+k}q^{4[(6i+1)^2+6k^2]}$$

3. $$q^7\,\Pi\{(1+q^{48i+24})(1-q^{96i+96})^2\}$$
$$=\Sigma(-1)^{i}q^{4(6i+1)^2+3(4k+1)^2}$$
$$=\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(i^2+i)}q^{(6i+1)^2+6(4k+1)^2}.$$

$$[xx+yy,\ xx+5yy]$$

1. $$q^{30}\,\Pi\{(1-q^{120i+120})(1-q^{600i+600})\}$$
$$=\Sigma(-1)^{i+k}q^{3[(10i+1)^2+(10k+3)^2]}$$
$$=\Sigma(-1)^{i+k}q^{5[(6i+1)^2+5(6k+1)^2]}$$

2. $$q^6 \Pi \{(1-q^{600i+240})(1-q^{600i+360})(1-q^{600i+600})\}^2$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{3[(10i+1)^2+(10k+1)^2]}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{(30i+1)^2+5(6k+1)^2} + \Sigma(-1)^{i+k} q^{(30i+11)^2+5(6k+1)^2}$$

3. $$q^{54} \Pi \{(1-q^{600i+120})(1-q^{600i+480})(1-q^{600i+600})\}^2$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{3[(10i+3)^2+(10k+3)^2]}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{(30i+7)^2+5(6k+1)^2} - \Sigma(-1)^{i+k} q^{(30i+13)^2+5(6k+1)^2}.$$

$[xx+7yy,\ xx+14yy$ und $2xx+7yy]$

1. $$q^7 \Pi \{(1-q^{32i+16})^2(1-q^{32i+32})(1+q^{224i+56})(1+q^{224i+168})(1-q^{224i+224})\}$$
$$= \Sigma(-1)^{i} q^{16i^2+7(4k+1)^2}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{8i^2+7(4k+1)^2} + 2\Sigma(-1)^{i} q^{(4i+1)^2+14(4k+1)^2}$$

2. $$q^8 \Pi \{(1-q^{16i+8})(1-q^{32i+32})(1+q^{112i+56})(1-q^{224i+224})\}$$
$$= 2\Sigma(-1)^{i} q^{(4i+1)^2+7(4k+1)^2}$$
$$= \Sigma(-1)^{i} q^{16i^2+56k^2} - \Sigma(-1)^{i+k} q^{8i^2+112k^2}.$$

$[3xx+7yy,\ 3xx+14yy]$

$$2q^{34} \Pi \{(1+q^{96i+48})(1-q^{192i+192})(1-q^{672i+672})\}$$
$$= \Sigma \{(-1)^{\frac{1}{2}(k^2-k)} - (-1)^{i+k}\} q^{3(4i+1)^2+7(6k+1)^2}$$
$$= 2\Sigma(-1)^{k} q^{2[3(4i+1)^2+14(6k+1)^2]}.$$

$[3xx+7yy,\ 6xx+7yy]$

$$q^7 \Pi \{(1-q^{48i+24})^2(1-q^{48i+48})(1-q^{168i+168})\}$$
$$= \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(k^2-k)+i} q^{48i^2+7(6k+1)^2} - 2\Sigma(-1)^{i+k} q^{3(4i+1)^2+28(6k+1)^2}$$
$$= \Sigma(-1)^{i+k} q^{24i^2+7(6k+1)^2}.$$

8.

Über die Reduction der quadratischen Formen auf die kleinste Anzahl Glieder.

(Gelesen in der Berliner Akademie der Wissenschaften am 9ten November 1848.)

Die quadratischen Formen von einer beliebigen Anzahl Variabeln können durch lineäre Substitutionen, deren Determinante ± 1 ist, auf unendlich viel Arten in andere *äquivalente* verwandelt werden. Man kann die Coëfficienten, welche die Substitutionen enthalten, zur *Reduction* der Form benutzen. Im Allgemeinen pflegt man bei Reduction der Functionen vor allem bemüht zu sein, die Argumente, von welchen die Functionen abhängen, auf die möglich kleinste Anzahl zu bringen, und dieselben dann in möglichst enge Gränzen einzuschliefsen. Bei der Reduction der quadratischen Formen hat man nur den letztern Gesichtspunct verfolgt, und unter allen Formen, welche einer gegebenen äquivalent sind, diejenige als die *reducirte Form* betrachtet, deren Coëfficienten in solchen Gränzen eingeschlossen sind, dafs keine andere äquivalente Form denselben Gränzbedingungen genügen kann. Es ist gleichwohl auch hier von Interesse, nach der kleinsten Anzahl Glieder zu fragen, auf welche jede quadratische Form von einer gegebnen Anzahl Variabeln gebracht werden kann.

Es ist einleuchtend, dafs bei den quadratischen Formen von zwei Variabeln, oder den *binären* quadratischen Formen, keine derartige Reduction möglich ist, oder im Allgemeinen keines ihrer drei Glieder wird zum Verschwinden gebracht werden können. *Die quadratischen Formen von mehr als 2 Variabeln dagegen können immer auf eine kleinere Anzahl Glieder gebracht werden.* Während die Anzahl der Glieder der *vollständigen* quadratischen Formen mit der Zahl der Variabeln wie die *dreieckigen* Zahlen 1, 3, 6, 10, 15 etc. wächst, wird diese Anzahl bei den *auf die kleinste Anzahl der Glieder reducirten quadratischen Formen* wie die *ungeraden* Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 etc. wachsen; so dafs man bei quadratischen Formen

von 3, 4, 5 etc. Variabeln resp. 1, 3, 6 etc. Coëfficienten zum Verschwinden bringen kann.

Man kann nämlich für jede gegebene quadratische Form von n Variabeln eine *äquivalente Form* finden, welche aufser den Quadraten derselben nur noch $n-1$ Producte enthält, und zwar diejenigen, welche bei einer angenommenen Reihenfolge der Variabeln durch Multiplication jeder Variable in die *nächst folgende* erhalten werden. Man wird also jede quadratische Form von n Variabeln auf eine andere äquivalente der folgenden Art,

$$a w w + a_1 w w_1 + a_2 w_1 w_1 + a_3 w_1 w_2 + a_4 w_2 w_2$$
$$+ a_5 w_2 w_3 + a_6 w_3 w_3 + \dots + a_{2n-3} w_{n-2} w_{n-1} + a_{2n-2} w_{n-1} w_{n-1},$$

reduciren können.

Das Mittel zur Bewerkstelligung solcher Reduction der quadratischen Formen von mehr als 2 Variabeln besteht darin, dafs man für gegebene lineäre Ausdrücke,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \dots + \alpha_i x_i,$$

in welchen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_i$ ganze Zahlen sind, einen einzigen Term $f.u$ einführt, in welchem f den gemeinschaftlichen Theiler von $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_i$ bedeutet, oder dafs man für $x_1, x_2 \dots x_i$ ein anderes äquivalentes System Gröfsen von der Beschaffenheit einführt, dafs wenn u eine derselben und f der gröfste gemeinschaftliche Theiler von $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_i$ ist, die Gleichung

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \dots \alpha_i x_i = f.u$$

erhalten wird.

Man nennt hiebei zwei Systeme Gröfsen *äquivalent*, welche auf solche Art von einander abhängen, dafs wenn für die Gröfsen eines der beiden Systeme *beliebige* ganze Zahlen gesetzt werden, immer auch die Gröfsen des andern Systems ganze Zahlen werden. Wenn zwei Systeme Gröfsen in diesem Sinne äquivalent sein sollen, müssen die Gröfsen des einen Systems lineäre Functionen des andern sein; es müssen ferner die Coëfficienten dieser Functionen ganze Zahlen und ihre Determinante $= 1$ sein. Es werden dann auch umgekehrt immer die Gröfsen des andern Systems lineäre Functionen des ersteren, deren Coëfficienten ganze Zahlen sind, und die Determinante dieser Coëfficienten wird wieder $= 1$ werden. Man sieht leicht die Möglichkeit ein, für $x_1, x_2, \dots x_i$ äquivalente Systeme von der verlangten Beschaffenheit

zu finden und ich werde hiefür bei einer andern Gelegenheit mehrere Methoden angeben *).

Nach diesen Bemerkungen ist es sehr leicht, eine gegebene quadratische Form in eine andere äquivalente von der angegebnen Beschaffenheit zu reduciren.

Es sei nämlich V eine quadratische Form von n Variabeln, x_1, x_2, .. x_n und darin das Aggregat der in x_n multiplicirten Glieder

$$x_n(a_1x_1+a_2x_2\;..+a_{n-1}x_{n-1})+a_nx_n^2.$$

Für x_1, x_2, .. x_{n-1} führe man ein äquivalentes System Gröfsen x_1', x_2', .. x_{n-1}' von der Beschaffenheit ein, dafs

$$a_1x_1+a_2x_2\;..+a_{n-1}x_{n-1}=f_1x_{n-1}',$$

wo f_1 den gemeinschaftlichen Theiler von a_1, a_2, .. a_{n-1} bedeutet. Man erhält dann

$$V=a_nx_n^2+f_1x_nx_{n-1}'+V_1,$$

wo V_1 eine quadratische Form der $n-1$ Gröfsen x_1', x_2', .. x_{n-1}' ist. Es sei in V_1 das Aggregat der in x_{n-1}' multiplicirten Glieder,

$$x_{n-1}'(a_1'x_1'+a_2'x_2'\;..+a_{n-2}'x_{n-2}')+a_{n-1}'x_{n-1}'^2.$$

Für x_1', x_2', .. x_{n-2}' führe man ein äquivalentes System Gröfsen x_1'', x_2'', .. x_{n-2}'' von der Beschaffenheit ein, dafs

$$a_1'x_1'+a_2'x_2'\;..+a_{n-2}'x_{n-2}'=f_2.x_{n-2}'',$$

wo f_2 den gröfsten gemeinschaftlichen Theiler von a_1', a_2', .. a_{n-2}' bedeutet. Man erhält dann

$$V=a_nx_n^2+f_1x_nx_{n-1}'+a_{n-1}'x_{n-1}'^2+f_2x_{n-1}'x_{n-2}''+V_2,$$

wo V_2 eine quadratische Form der $n-2$ Gröfsen x_1'', x_2'' .... x_{n-2}'' ist.

*) Schwieriger ist die Aufgabe, wenn man die Coëfficienten der gesuchten Ausdrücke gewissen Gränzbedingungen unterwirft, welche die Aufgabe zu einer weniger unbestimmten machen. Die hiezu erforderlichen Algorithmen, welche ich seit längerer Zeit zum Gegenstande meiner Untersuchungen gemacht habe, sind von der gröfsten Wichtigkeit für die Arithmetik, so wie für die Analysis überhaupt. Wendet man sie auf die Auflösung der Gleichungen von höherem als dem 2ten Grade an, so werden diese Algorithmen periodisch und geben die entsprechenden complexen Zahlen, deren Norm der Einheit gleich ist, auf ähnliche Art wie dies bei der Anwendung der Algorithmen der Kettenbrüche auf die Auflösung der quadratischen Gleichungen der Fall ist.

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man zuletzt

$$V = a_n x_n^2 + a'_{n-1} x'^{\,2}_{n-1} + a''_{n-2} x''^{\,2}_{n-2} \,.\,.\, + a_1^{(n-1)} x_1^{(n-1)\,2}$$
$$+ f_1 x_n x'_{n-1} + f_2 x'_{n-1} x''_{n-2} + f_3 x''_{n-2} x'''_{n-3} \,.\,.$$
$$+ f_{n-1} x_2^{(n-2)} x_1^{(n-1)},$$

welches eine Form der Variabeln

$$x_n, \quad x'_{n-1}, \quad x''_{n-2}, \,.\,.\, \quad x_2^{(n-2)}, \quad x_1^{(n-1)}$$

von der verlangten reducirten Art ist.

9.

Sur la rotation d'un corps

Extrait d'une lettre adressée à l'académie des sciences de Paris

(lu dans la séance du 30 juillet 1849).

Le problème de la rotation d'un corps solide quelconque, qui n'est sollicité par aucune force accélératrice, est susceptible d'être résolu par des formules nouvelles si élégantes et si parfaites, que je ne peux m'empêcher de les communiquer à votre illustre Académie. Ce sont les fonctions Θ et H que j'ai introduites dans l'analyse des fonctions elliptiques, c'est-à-dire les fonctions

$$\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots,$$

$$H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - 2\sqrt[4]{q^{49}}\sin 7x + \ldots,$$

au moyen desquelles je suis parvenu à exprimer, de la manière la plus simple, les neuf cosinus eux-mêmes qu'il s'agit, dans ce problème, de déterminer en fonctions du temps. En effet, x étant une variable proportionnelle au temps, on trouve les cosinus des angles qui, à chaque instant, déterminent la position des axes principaux du corps, égaux à des fractions qui ont cette fonction Θ pour commun dénominateur, les neuf numérateurs étant, abstraction faite de facteurs constants, la même fonction Θ, dans laquelle seulement x se trouve augmenté d'une constante imaginaire. Quel que soit le degré d'exactitude auquel on voudra pousser les calculs, on n'aura guère à prendre plus de trois ou quatre termes de ces séries, excepté les cas extrêmes. On doit donc regarder ces cosinus comme exprimés par des quantités finies, et même par des quantités finies très-simples. Si l'on veut résoudre le problème du mouvement elliptique d'une planète par de semblables formules définitives qui ont le temps sous le signe cos ou sin, on a, comme on sait, des séries beaucoup moins convergentes, et des coefficients beaucoup plus compliqués.

La rotation en question se compose de *deux rotations périodiques*, et dont les périodes, en général, sont incommensurables entre elles. Pour avoir une idée nette et claire de ce mouvement, il faut supposer aux axes des x et y, dans le plan invariable, un certain mouvement rotatoire uniforme,

et rapporter la position du corps à ces axes mobiles et à l'axe fixe des z perpendiculaire au plan invariable. Or, étant posé,

$$x = \alpha x' + \beta y' + \gamma z'$$
$$y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z'$$
$$z = \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z',$$

les axes des x', y', z' étant les axes principaux du corps, et les axes des x et y, comme on vient de dire, des axes mobiles tournoyant uniformément, avec une vitesse déterminée, dans le plan invariable, les neuf quantités α, β, etc., seront des fonctions du temps *périodiques*. Avant de donner leurs valeurs en fonctions du temps, il faut convenir des notations suivantes:

Soient, h la force vive, l le moment de rotation dans le plan invariable, A, B, C les trois moments d'inertie relatifs aux axes des x', y', z', et supposons, pour fixer les idées, que, B étant le moment moyen, l'on ait

$$Bh > l^2, \quad A > B > C.$$

Dans le cas de $Bh < l^2$, on supposera $A < B < C$.

Le module des transcendantes elliptiques qui entreront dans les formules données ci-dessous, sera

$$k = \sqrt{\frac{A-B}{B-C}} \cdot \sqrt{\frac{l^2 - Ch}{Ah - l^2}},$$

d'où

$$k' = \sqrt{(1-k^2)} = \sqrt{\frac{A-C}{B-C}} \cdot \sqrt{\frac{Bh - l^2}{Ah - l^2}}.$$

Faisons, comme dans mon ouvrage sur les fonctions elliptiques,

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\beta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\beta)}}, \quad K' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\beta}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\beta)}}, \quad q = e^{-\frac{\pi K'}{K}};$$

soit de plus $K' - a$ une intégrale elliptique de première espèce, dont le sinus de l'amplitude, par rapport au module complémentaire k', est

$$\sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}} = \sin\operatorname{am}(K' - a, k'),$$

ou, étant mis

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}},$$

soit

$$a = \int_\beta^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\beta}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\beta)}}.$$

Soit t le temps, et

$$u = nt + \tau,$$

τ étant une constante arbitraire, et de plus

$$n = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}.$$

Aux fonctions Θu et Hu dont j'ai fait usage dans les *Fundamenta,* je joins les fonctions

$$\Theta_1(u) = \Theta(K-u), \quad H_1(u) = H(K-u);$$

de sorte qu'on a

$$\sqrt{k}\sin\operatorname{am}u = \frac{Hu}{\Theta u}, \quad \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\operatorname{am}u = \frac{H_1(u)}{\Theta u}, \quad \frac{1}{\sqrt{k'}}\varDelta\operatorname{am}u = \frac{\Theta_1(u)}{\Theta u}.$$

Cela posé, et étant $i=\sqrt{-1}$, *on aura le tableau suivant des valeurs des neuf quantités* α, β, *etc.*,

$$\alpha = -\frac{\Theta_1(0)[H(u+ia)+H(u-ia)]}{2H_1(ia)\Theta u}, \quad \alpha' = \frac{\Theta_1(0)[H(u+ia)-H(u-ia)]}{2iH_1(ia)\Theta u},$$

$$\beta = -\frac{\Theta(0)[H_1(u-ia)+H_1(u+ia)]}{2H_1(ia)\Theta u}, \quad \beta' = -\frac{\Theta(0)[H_1(u-ia)-H_1(u+ia)]}{2iH_1(ia)\Theta u},$$

$$\gamma = \frac{H_1(0)[\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)]}{2iH_1(ia)\Theta u}, \quad \gamma' = \frac{H_1(0)[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)]}{2H_1(ia)\Theta u};$$

$$\alpha'' = -\frac{\Theta(ia)H_1 u}{H_1(ia)\Theta u}, \quad \beta'' = \frac{\Theta_1(ia)Hu}{H_1(ia)\Theta u}, \quad \gamma'' = \frac{H(ia)\Theta_1(u)}{iH_1(ia)\Theta u}.$$

Les vitesses de rotation autour des axes des x, y, z seront:

$$\frac{f[\Theta_1(u-ia)-\Theta_1(u+ia)]}{2iH_1(ia)\Theta u}, \quad -\frac{f[\Theta_1(u-ia)+\Theta_1(u+ia)]}{2H_1(ia)\Theta u}, \quad \frac{h}{l},$$

où

$$f = n\sqrt{(kk')}\,\Theta_1(0).$$

Les axes des x et des y ayant, dans le plan invariable, un mouvement de rotation uniforme autour du point fixe, dans le sens du choc primitif appliqué au corps, l'angle proportionel au temps qu'ils décriront dans un intervalle t du temps, sera $nn't$, où la constante n' est

$$n' = \frac{1}{A-C}\left[C\frac{d\log H(ia)}{da} - A\frac{d\log\Theta(ia)}{da}\right].$$

Mettant

$$x = \frac{\pi u}{2K} = \frac{\pi(nt+\tau)}{2K}, \quad b = \frac{a}{K'},$$

où $b<1$, on aura d'après la définition des fonctions Θ etc.,

$$\tfrac{1}{2}[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)] = 1-q^{1-b}(1+q^{2b})\cos 2x+q^{4-2b}(1+q^{4b})\cos 4x-\ldots,$$
$$\frac{1}{2i}[\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)] = q^{1-b}(1-q^{2b})\sin 2x-q^{4-2b}(1-q^{4b})\sin 4x+\ldots,$$
$$\tfrac{1}{2}[H(u+ia)+H(u-ia)] = q^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}b}[(1+q^{b})\sin x-q^{2-b}(1+q^{3b})\sin 3x+\ldots],$$
$$\frac{1}{2i}[H(u+ia)-H(u-ia)] = q^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}b}[(1-q^{b})\cos x-q^{2-b}(1-q^{3b})\cos 3x+\ldots],$$
$$\tfrac{1}{2}[H_1(u-ia)+H_1(u+ia)] = q^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}b}[(1+q^{b})\cos x+q^{2-b}(1+q^{3b})\cos 3x+\ldots],$$
$$\frac{1}{2i}[H_1(u-ia)-H_1(u+ia)] = q^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}b}[(1-q^{b})\sin x+q^{2-b}(1-q^{3b})\sin 3x+\ldots],$$
$$\tfrac{1}{2}[\Theta_1(u-ia)+\Theta_1(u+ia)] = 1+q^{1-b}(1+q^{2b})\cos 2x+q^{4-2b}(1+q^{4b})\cos 4x+\ldots,$$
$$\frac{1}{2i}[\Theta_1(u-ia)-\Theta_1(u+ia)] = q^{1-b}(1-q^{2b})\sin 2x+q^{4-2b}(1-q^{4b})\cos 4x+\ldots.$$

Dans les deux premières et les deux dernières formules, les premiers termes qui suivent ceux qu'on a écrits, sont de l'ordre de la quantité q^{9-3b}; dans les quatre autres formules, ces termes sont de l'ordre de la quantité q^{6-2b}: ceux-ci ajoutés, on n'aura rejeté que les termes respectivement de l'ordre des quantités q^{16-4b} et q^{12-3b}. En mettant ou $b=0$ ou $x=0$, on aura le développement des autres fonctions qui entrent dans les formules établies ci-dessus et dont l'argument est u ou ia. On a, d'ailleurs

$$\Theta_1(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}, \quad \Theta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}, \quad H_1(0) = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}}.$$

Si la quantité q et le module k sont très-proches de l'unité, on se servira des transformations suivantes, par lesquelles les fonctions qui se rapportent au module k sont changées en d'autres qui se rapportent à son complément k', d'où suit que la quantité q sera remplacée par la quantité extrêmement petite $q' = e^{\frac{\pi^2}{\log q}}$,

$$\begin{aligned}
\Theta(u+ia) &= igH[u-i(K'-a)] = g'H_1(a-iu, k') \\
&= g''\Theta_1[a+i(K-u), k'] \\
H(u+ia) &= ig\Theta[u-i(K'-a)] = ig'H(a-iu, k') \\
&= g''\Theta[a+i(K-u), k'] \\
H_1(u+ia) &= g\Theta_1[u-i(K'-a)] = g'\Theta(a-iu, k') \\
&= -ig''H[a+i(K-u), k'] \\
\Theta_1(u+ia) &= gH_1[u-i(K'-a)] = g'\Theta_1(a-iu, k') \\
&= g''H_1[a+i(K-u), k']
\end{aligned}$$

où

$$g = e^{-\frac{\pi}{4K}(K'-2a+2iu)}, \quad g' = \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{-\frac{\pi}{4KK'}(u+ia)^2}, \quad g'' = \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{-\frac{\pi}{4KK'}(K-u-ia)^2}.$$

Par cette transformation, les formules perdent leur caractère périodique, comme cela est bien propre à des formules par lesquelles doit être exprimé un mouvement extrêmement lent et dont la période est d'une durée quasi-infinie.

On peut aussi développer les valeurs fractionnaires des neuf cosinus α, β, etc., en séries très-simples et assez convergentes, quoique dépourvues de cette convergence extraordinaire dont jouissent le dénominateur et les numérateurs des fractions mêmes. On obtient ces développements en se servant des formules suivantes:

$$\text{(1.)} \qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{i[\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)]}{2H(ia)\,\Theta u}$$

$$= \frac{2q^{\frac12 b}}{1-q^b} - 2(q^{-\frac12 b}-q^{\frac12 b})\Big[\frac{q(1+q^2)\cos 2x}{(1-q^{2-b})(1-q^{2+b})} + \frac{q^2(1+q^4)\cos 4x}{(1-q^{4-b})(1-q^{4+b})} + \dots\Big];$$

$$\text{(2.)} \qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)}{2H(ia)\,\Theta u}$$

$$= 2(q^{-\frac12 b}+q^{\frac12 b})\Big[\frac{q(1-q^2)\sin 2x}{(1-q^{2-b})(1-q^{2+b})} + \frac{q^2(1-q^4)\sin 4x}{(1-q^{4-b})(1-q^{4+b})} + \dots\Big];$$

$$\text{(3.)} \qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{H(u+ia)+H(u-ia)}{2\Theta(ia)\,\Theta u}$$

$$= 2(q^{-\frac12 b}+q^{\frac12 b})\Big[\frac{\sqrt{(q(1-q))}\sin x}{(1-q^{1-b})(1-q^{1+b})} + \frac{\sqrt{(q^3(1-q^3))}\sin 3x}{(1-q^{3-b})(1-q^{3+b})} + \dots\Big];$$

$$\text{(4.)} \qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{H(u+ia)-H(u-ia)}{2i\Theta(ia)\,\Theta u}$$

$$= 2(q^{-\frac12 b}-q^{\frac12 b})\Big[\frac{\sqrt{(q(1+q))}\cos x}{(1-q^{1-b})(1-q^{1+b})} + \frac{\sqrt{(q^3(1+q^3))}\cos 3x}{(1-q^{3-b})(1-q^{3+b})} + \dots\Big];$$

$$\text{(5.)} \qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{H_1(u-ia)+H_1(u+ia)}{2\Theta_1(ia)\,\Theta u}$$

$$= 2(q^{-\frac12 b}+q^{\frac12 b})\Big[\frac{\sqrt{(q(1+q))}\cos x}{(1+q^{1-b})(1+q^{1+b})} + \frac{\sqrt{(q^3(1+q^3))}\cos 3x}{(1+q^{3-b})(1+q^{3+b})} + \dots\Big];$$

$$\text{(6.)} \qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{H_1(u-ia)-H_1(u+ia)}{2i\Theta_1(ia)\,\Theta u}$$

$$= 2(q^{-\frac12 b}-q^{\frac12 b})\Big[\frac{\sqrt{(q(1+q))}\sin x}{(1+q^{1-b})(1+q^{1+b})} + \frac{\sqrt{(q^3(1+q^3))}\sin 3x}{(1+q^{3-b})(1+q^{3+b})} + \dots\Big];$$

$$\text{(7.)} \qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\,\frac{\Theta_1(u-ia)+\Theta_1(u+ia)}{2H_1(ia)\,\Theta u}$$

$$= \frac{2q^{\frac12 b}}{1+q^b} + 2(q^{-\frac12 b}+q^{\frac12 b})\Big[\frac{q(1+q^2)\cos 2x}{(1+q^{2-b})(1+q^{2+b})} + \frac{q^2(1+q^4)\cos 4x}{(1+q^{4-b})(1+q^{4+b})} + \dots,\Big];$$

$$(8.)\quad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\frac{\Theta_1(u-ia)-\Theta_1(u+ia)}{2iH_1(ia)\,\Theta u}$$
$$= 2(q^{-\frac{1}{2}b}-q^{\frac{1}{2}b})\left[\frac{q(1-q^2)\sin 2x}{(1+q^{2-b})(1+q^{2+b})}+\frac{q^2(1-q^4)\sin 4x}{(1+q^{4-b})(1+q^{4+b})}+\cdots\right];$$

$$(9.)\quad H_1(0)\,\Theta(0)\frac{H_1(u)}{\Theta u}=\frac{2kK}{\pi}\cos\operatorname{am}u=\frac{4\sqrt{q}\cos x}{1+q}+\frac{4\sqrt{q^3}\cos 3x}{1+q^3}+\cdots;$$

$$(10.)\quad H_1(0)\,\Theta_1(0)\frac{Hu}{\Theta u}=\frac{2kK}{\pi}\sin\operatorname{am}u=\frac{4\sqrt{q}\sin x}{1-q}+\frac{4\sqrt{q^3}\sin 3x}{1-q^3}+\cdots;$$

$$(11.)\quad \Theta(0)\,\Theta_1(0)\frac{\Theta_1(u)}{\Theta u}=\frac{2K}{\pi}\Delta\operatorname{am}u=1+\frac{4q\cos 2x}{1+q^2}+\frac{4q^2\cos 4x}{1+q^4}+\cdots.$$

Quant aux facteurs constants par lesquels il faut multiplier les formules précédentes pour obtenir les valeurs des neuf cosinus, j'observe qu'on a

$$\frac{\Theta(ia)}{H_1(ia)}=\sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{1}{\cos\operatorname{am}(ia)}=\sqrt{\frac{k'}{k}}\sqrt{\frac{A(l^2-Ch)}{(A-C)l^2}}$$
$$\frac{\Theta_1(ia)}{H_1(ia)}=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\Delta\operatorname{am}(ia)}{\cos\operatorname{am}(ia)}=\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{B(l^2-Ch)}{(B-C)l^2}}$$
$$\frac{H(ia)}{iH_1(ia)}=\frac{\sqrt{k'}\operatorname{tang}\operatorname{am}(ia)}{i}=\sqrt{k'}\sqrt{\frac{C(Ah-l^2)}{(A-C)l^2}}.$$

Les huit formules (1.) .. (8.) sont nouvelles et d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques; j'ai remarqué dans une lettre à Mr. *Hermite* (Mathematische Werke Vol. I. pg. 357) que, par leur moyen, on parvient, de la manière la plus aisée et la plus directe, aux formules de la transformation inverse et de la division des fonctions elliptiques.

On trouvera des séries analogues pour les valeurs des six quantités

$$\frac{\alpha}{\alpha''},\quad \frac{\alpha'}{\alpha''},\quad \frac{\beta}{\beta''},\quad \frac{\beta'}{\beta''},\quad \frac{\gamma}{\gamma''},\quad \frac{\gamma'}{\gamma''},$$

ou pour les tangentes des angles que les projections des axes des x', y', z' sur les plans des x, z et des y, z forment avec l'axe des z.

Pour les recherches générales et analytiques, il conviendra presque toujours de faire usage des formules fractionnaires. Ces formules remarquables pourront, dans le problème de la rotation, servir de point de départ pour résoudre des questions analogues à celles que *M. Gaufs* a traitées dans sa *Theoria motus corp. coel. etc.* par rapport au mouvement elliptique et hyperbolique.

Les mêmes formules donnent une nouvelle manière d'exprimer par trois quantités les neuf cosinus des angles que forment entre eux deux systèmes d'axes de coordonnées rectangulaires. Ces trois quantités sont ici les deux arguments u et a, et le module k; ou, si l'on veut, les quantités x, b, q.

Démonstration *).

Exposé des notations dont on fait usage et des formules par lesquelles le problème est réduit aux quadratures.

Faisons voir à présent comment on peut tirer les résultats précédents des formules connues et dont on trouve la démonstration dans les traités de Mécanique. Pour plus de commodité, on a emprunté ces formules au Traité de Mécanique de M. *Poisson*. On ne s'est écarté des notations de cet auteur que dans la définition des axes des x et des y, lesquels, chez M. *Poisson*, sont supposés fixes dans le plan invariable et qui ont été supposés ici faire dans ce plan, autour du point fixe, une rotation uniforme, dans le sens de la rotation initiale du corps. On supposera, avec M. *Poisson*, que l'axe des x parvient dans la direction de l'axe des y, après une rotation de 90^0, faite dans le même sens; de sorte que, d'après la notation employée dans nos formules, les quantités désignées par x et y dans le Traité de M. *Poisson*, devront être remplacées, par

$$\cos\Psi(t-t_0).x - \sin\Psi(t-t_0).y$$
$$\cos\Psi(t-t_0).y + \sin\Psi(t-t_0).x,$$

Ψ et t_0 désignant des quantités constantes.

J'observe encore que la lettre k désignant dans le Traité de M. *Poisson* le moment principal, a été remplacé ici par l, k étant employé comme module des fonctions elliptiques qui entrent dans nos formules.

Nommons donc,

x', y', z' les coordonnées parallèles aux axes principaux du corps;

A, B, C les moments du corps par rapport à ces axes, et dont B soit le moment moyen;

ψ l'angle que l'intersection du plan des x', y', et du plan invariable, fait avec une droite fixe, menée dans ce dernier plan par le point fixe;

φ l'angle que cette intersection fait avec l'axe des x';

---

*) On a cru faire plaisir aux géomètres, en ajoutant la démonstration des formules précédentes, laquelle n'avait pas été donnée dans la lettre à l'Académie de Paris. On a changé les directions des axes des x et des y dans les directions opposées, afin qu'elles s'accordent parfaitement avec celles qui ont été supposées dans la Mécanique de M. *Poisson*. En outre, on a corrigé quelques fautes qui s'étaient glissées dans les formules relatives à la détermination de l'axe instantané de rotation.

ϑ l'angle que l'axe des z' fait avec une droite perpendiculaire au plan invariable, laquelle sera prise pour l'axe dec z;

p, q, r les vitesses de rotation autour des axes des x', y', z'.

Connaissant les angles ψ, φ, ϑ, on déterminera la direction des axes des x', y', z', de la manière suivante. Supposons que le plan invariable soit horizontal et menons à ce plan une verticale, par le point fixe O, dirigée en bas ou dans le sens de la pesanteur. Soit OA la droite fixe prise à l'arbitraire dans le plan invariable; soient OB, OC, OD trois autres droites dans le même plan, telles que les angles BOA, BOC, BOD, comptés dans le même sens dans lequel le choc primitif a fait tourner le corps, soient respectivement égaux a ψ, φ, $\varphi+\frac{1}{2}\pi$. Faisons tourner le plan et la perpendiculaire qu'on lui a menée, supposée fixement liée avec lui, autour de la droite OB, de manière que la partie adjacente à OB et dirigée dans le même sens dans lequel les trois angles ψ, φ, $\varphi+\frac{1}{2}\pi$ ont été comptés, s'élève, au commencement de son mouvement, au dessus du plan horizontal. Quand le plan et l'axe perpendiculaire au plan, auront décrit l'angle ϑ, les directions qu'occuperont alors les droites OC et OD, et l'axe perpendiculaire au plan, seront celles des axes des x', y', z'. La direction de la verticale, perpendicnlaire au plan invariable, sera prise pour l'axe des z. (*Poisson* Méc. II. p. 62—64.)

Les quantités p, q, r sont liées entre elles par les deux équations,

$$1.\qquad \begin{cases} Ap^2+Bq^2+Cr^2 = h \\ A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2 = l^2; \end{cases}$$

les mêmes quantités sont liées avec le temps, par les formules différentielles,

$$2.\qquad dt = \frac{A}{B-C}\frac{dp}{qr} = -\frac{B}{A-C}\frac{dq}{rp} = \frac{C}{A-B}\frac{dr}{pq};$$

l'angle ψ s'obtient au moyen d'une autre formule différentielle,

$$3.\qquad d\psi = \frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}\,l\,dt;$$

enfin les angles ϑ et φ sont données par les formules algébriques,

$$4.\qquad \frac{Ap}{l} = -\sin\vartheta\sin\varphi,\quad \frac{Bq}{l} = -\sin\vartheta\cos\varphi,\quad \frac{Cr}{l} = \cos\vartheta.$$

Les quantités h et l sont des constantes arbitraires; deux autres constantes arbitraires entreront dans les formules du problème par l'intégration des équations (2.) et (3.). (*P.* M. II. 139—144.)

Limites des quantités p, q, r.

Substituant les valeurs (1.), de h et de l^2, on voit que les deux constantes,

$$(A-C)(Ah-l^2), \qquad (A-C)(l^2-Ch)$$

sont positives, parceque, B étant moyen entre A et C, les quantités $A-B$ et $B-C$ ont le même signe que $A-C$. Comme on est maître de choisir pour A le plus grand ou le plus petit moment, supposons que l'on ait fait l'un ou l'autre choix, selon que $Bh-l^2$ est positif ou négatif. Il suit de là, que les six constantes,

$$A-C, \quad A-B, \quad B-C,$$
$$Ah-l^2, \quad Bh-l^2, \quad l^2-Ch$$

auront toutes le même signe, ou que le produit de deux d'entre elles sera toujours positif. J'observe que quand on employera, dans les calculs suivants, le signe ambigu $\pm$ ou $\mp$, on supposera toujours que le signe supérieur ait lieu, lorsque $Bh > l^2$, et le signe inférieur, dans le cas contraire. On prendra les radicaux toujours avec le signe positif, de sorte qu'on devra mettre, par exemple,

$$\frac{1}{A-C}\sqrt{\frac{(A-C)(Ah-l^2)}{C}} = \pm\sqrt{\frac{Ah-l^2}{C(A-C)}}.$$

Exprimons p^2 et r^2 par q^2, on aura

$$5. \quad \begin{cases} p^2 = \dfrac{l^2-Ch-B(B-C)q^2}{A(A-C)} \\[2ex] r^2 = \dfrac{Ah-l^2-B(A-B)q^2}{C(A-C)}. \end{cases}$$

On voit par là, que q^2 doit être plus petit que la plus petite des deux quantités,

$$\frac{l^2-Ch}{B(B-C)} \quad \text{et} \quad \frac{Ah-l^2}{B(A-B)}.$$

Or comme, suivant la supposition faite, la différence

$$\frac{Ah-l^2}{A-B} - \frac{l^2-Ch}{B-C} = \frac{(A-C)(Bh-l^2)}{(A-B)(B-C)}$$

est positive, on aura

$$\frac{Ah-l^2}{B(A-B)} > \frac{l^2-Ch}{B(B-C)} > q^2.$$

Nous verrons que q^2 peut atteindre la valeur limite, pour laquelle la quantité p s'évanouit; mais la quantité r ne saura jamais s'évanouir et conservera, par suite, toujours le même signe. Comme le choix de ce signe est arbitraire, supposons que r ait le même signe que $Bh-l^2$ ou $A-C$.

Sur la marche que suivent les variables p, q, r, avec le temps croissant, et comment le mouvement proposé se compose de deux mouvements périodiques.

Nommons q' la limite supérieure de q,

$$q' = \sqrt{\frac{l^2 - Ch}{B(B-C)}},$$

et supposons qu'à un certain temps, le signe de p soit négatif. Le signe de dq sera alors positif ou q croissant, à cause de la formule,

$$dq = -\frac{(A-C)rp.dt}{B},$$

et de ce que l'élément du temps, est toujours positif. Le facteur p ne pouvant changer de signe avant de s'évanouir, q devra continuer à croître jusqu'à ce qu'on ait, $p=0$, et par suite, $q=+q'$.

A cause de la formule

$$dp = \frac{(B-C)qr\,dt}{A},$$

et parceque $q=q'$ est positif, on aura alors dp positif; donc p devant continuer à croître, changera de signe, en passant du négatif au positif. La quantité q, par suite, commencera à décroître, dq devenant négatif, et elle devra continuer à décroître tant que p reste positif. Au contraire, p devra continuer à croître, tant que q, en décroissant, à partir de sa limite supérieure $+q'$, restera positif. Lorsque q s'évanouit, en passant du positif au négatif, p aura atteint sa limite supérieure

$$p' = \sqrt{\frac{l^2 - Ch}{A(A-C)}},$$

et devra commencer à décroître, dp devenant négatif. Lorsque p, en décroissant, atteint la valeur zéro et repasse au négatif, la variable q, en décroissant aussi, atteint sa limite inférieure $-q'$, et recommencera à croître jusqu'à ce qu'elle soit parvenue à sa limite supérieure $+q'$, et lorsqu'elle, dans cette marche, en s'évanouissant, repassera au positif, la variable p, de son côté, aura atteint sa limite inférieure $-p'$. C'est ainsi que les variables p et q, avec le temps croissant, passent et repassent, d'une de leurs limites à l'autre, de manière que, q prenant successivement les valeurs,

$$\ldots\quad -q',\quad 0,\quad +q',\quad 0,\quad -q',\quad +q',\quad \ldots$$

la quantité p obtiendra les valeurs correspondantes,

$$\ldots\quad 0,\quad -p',\quad 0\quad +p',\quad 0,\quad -p',\quad \ldots$$

La limite inférieure de r, est

$$r^0 = \pm\sqrt{\frac{Bh-l^2}{C(B-C)}},$$

la limite supérieure,

$$r' = \pm\sqrt{\frac{Ah-l^2}{B(A-B)}},$$

et l'on démontre aisément qu'aux valeurs précédentes de p et q, correspondent les valeurs de la quantité r,

$$\ldots\ r',\ r^0,\ r',\ r^0,\ r',\ r^0,\ r',\ \ldots$$

Supposons que le temps dans lequel la variable q croit ou décroit d'une de ses limites à l'autre, soit égal à T; supposons de plus que, pendant que q croit constamment d'une valeur indéfinie q jusqu'à sa limite supérieure q' ou décroit constamment de q' à q, le temps t ait augmenté de la quantité $\tau - t$; on aura

$$m\int_{-q'}^{q'}\frac{dq}{pr} = m\int_{q'}^{-q'}\frac{dq}{pr} = T$$

$$m\int_{q}^{q'}\frac{dq}{pr} = m\int_{q'}^{q}\frac{dq}{pr} = \tau - t,$$

où l'on a posé $m = -\frac{B}{A-C}$. Généralement, la quantité pr ayant, pour la même valeur de q, des valeurs opposées, selon que q est croissant ou décroissant, il sera toujours permis d'échanger entre elles les deux limites de l'intégrale. On aura donc successivement,

$$m\int_{q}^{q'}\frac{dq}{pr} = \tau - t$$

$$m\int_{q'}^{q}\frac{dq}{pr} = \tau - t$$

$$m\int_{q}^{-q'}\frac{dq}{pr} = m\int_{q'}^{-q'}\frac{dq}{pr} - m\int_{q'}^{q}\frac{dq}{pr} = T - (\tau - t)$$

$$m\int_{-q'}^{q}\frac{dq}{pr} = m\int_{-q'}^{q'}\frac{dq}{pr} - m\int_{q}^{q'}\frac{dq}{pr} = T - (\tau - t),$$

où l'on suppose toujours, que la variable q croit ou décroit constamment, en passant d'une limite de l'intégrale à l'autre. La variable q étant retournée à sa valeur primitive et à l'état de croître, elle recommencera de nouveau les mêmes tours et retours, et l'on retrouvera, pour les différents intervalles, les mêmes valeurs de l'intégrale que précédemment.

Ajoutant successivement, au temps t correspondant à la valeur primitive

de q, les différentes intégrales dont on vient de donner les valeurs, on aura le tableau suivant, des valeurs correspondantes du temps t et de la variable q,

$$\begin{array}{cccccccc} q, & q', & q, & -q', & q, & q', & q, & \ldots \\ t, & \tau, & 2\tau-t, & \tau+T, & t+2T, & \tau+2T, & 2\tau+2T-t, & \ldots \end{array}$$

On voit par ce tableau que, le temps ayant augmenté de la quantité $2T$, la variable q sera retournée à la même valeur et aura repris la même direction de sa marche. La même chose aura lieu par rapport aux quantités p et r et, par suite, comme il résulte des formules (4.), par rapport aux cosinus et sinus des angles φ et ϑ.

Venons à l'examen de l'intégrale par laquelle on a exprimé l'angle ψ,

$$\psi = -l\int\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}dt.$$

Si l'on prend la constante l avec le signe positif, cette intégrale montre que ψ décroit constamment. Considérons l'expression par laquelle, sous le signe intégral, se trouve multiplié dt, comme fonction de t, il suit, des remarques précédentes, que cette fonction reprend les mêmes valeurs quand t augmente de la constante $2T$. On aura donc, en désignant cette fonction par $F(t)$, pour deux limites quelconques de l'intégrale, t_0 et t_1,

$$\int_{t_0}^{t_1}F(t)\,dt = \int_{t_0+2T}^{t_1+2T}F(t)\,dt,$$

ou, en ajoutant aux deux membres la même intégrale étendue de t_1 à t_0+2T,

$$\int_{t_0}^{t_0+2T}F(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_1+2T}F(t)\,dt.$$

On voit, par cette formule, que l'intégrale,

$$\int_{t}^{t+2T}F(t)\,dt,$$

est indépendante de la valeur de la variable t ou que cette intégrale est une quantité constante positive que nous désignerons par

$$\frac{2T\Psi}{l} = \int_{t}^{t+2T}\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}dt.$$

Supposons que la valeur $\psi = 0$, corresponde au temps $t = t_0$, on aura

$$-l\int_{t_0}^{t}\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}dt = \psi$$

$$-l\int_{t_0}^{t+2T}\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}dt = -l\int_{t_0}^{t}\frac{Ap^2+Bp^2}{A^2p^2+B^2p^2}dt - l\int_{t}^{t+2T}\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}dt$$

$$= \psi - 2T\Psi.$$

Donc, toutes les fois que le temps augmentera de la quantité constante $2T$, l'angle ψ décroîtra de la quantité constante $2T\Psi$. De là suit que, faisant

$$\psi' = \psi + \Psi(t - t_0),$$

l'angle ψ' ne change pas du tout de valeur, quand le temps augmente de la constante $2T$, ou que ψ', de même que les quantités p, q, r, et les cosinus et sinus des angles φ et ϑ, est une fonction du temps *périodique* et qui jouit de la même période que ces quantités, $2T$.

Supposons que, dans le plan invariable, une droite, que je désignerai par (x), tourne uniformément, et avec une vitesse angulaire Ψ, autour du point fixe, dans le même sens dans lequel les angles ψ décroissent ou dans lequel se fait la rotation du corps autour de l'axe des z. Supposons de plus que, pour le temps $t = t_0$, cette droite coïncide avec la droite fixe, à partir de laquelle l'angle ψ est compté. Dans un temps indéfini t, la droite (x) fera avec la droite fixe, un angle égal à

$$-\Psi(t - t_0).$$

Donc, ψ étant l'angle que l'intersection du plan des x', y' et du plan invariable, fait avec la droite fixe, la même intersection fera avec la droite mobile (x), un angle égal à

$$\psi + \Psi(t - t_0) = \psi'.$$

On pourra donc, indifféremment, déterminer cette intersection, ou par l'angle ψ qu'elle fait avec la droite fixe, ou par l'angle ψ' qu'elle fait avec la droite mobile (x).

Soit fixement liée avec la droite (x) une autre droite (y), perpendiculaire à (x) dans le plan invariable, et dont la direction est la même que la droite (x) aurait après une rotation de 90°, faite dans le sens de son mouvement. On connaîtra, à chaque instant, la position des droites (x) et (y), puisqu'elles tournent uniformément, dans le plan invariable, autour du point fixe, dans un sens donné, et avec une vitesse angulaire donnée. A un instant quelconque, prenons les droites (x) et (y) pour axes des coordonnées x et y, et pour axe des z, la perpendiculaire menée, par le point fixe, au plan invariable. Soient x, y, z, les coordonnées d'un point quelconque du corps mobile, rapportées à ces axes; soient x', y', z', les coordonnées du même point, rapportées aux axes principaux fixes dans le corps; on aura

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' + \gamma z' \\ y &= \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z' \\ z &= \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z', \end{aligned}$$

et l'on obtiendra les expressions des neuf quantités, α, β, etc., de celles données dans la Mécanique de Mr. *Poisson* (II. pg. 64), en remplaçant seulement l'angle ψ par l'angle

$$\psi' = \psi + \Psi(t - t_0).$$

On aura donc

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos\vartheta \sin\varphi \sin\psi' + \cos\varphi \cos\psi' \\
\alpha' &= \cos\vartheta \sin\varphi \cos\psi' - \cos\varphi \sin\psi' \\
\alpha'' &= -\sin\vartheta \sin\varphi, \\
\beta &= \cos\vartheta \cos\varphi \sin\psi' - \sin\varphi \cos\psi' \\
\beta' &= \cos\vartheta \cos\varphi \cos\psi' + \sin\varphi \sin\psi' \\
\beta'' &= -\sin\vartheta \cos\varphi \\
\gamma &= \sin\vartheta \sin\psi' \\
\gamma' &= \sin\vartheta \cos\psi' \\
\gamma'' &= \cos\vartheta.
\end{aligned}$$

Les cosinus et sinus des trois angles φ, ϑ, ψ', reprenant toujours les mêmes valeurs, après un accroissement du temps égal à $2T$, on voit, par ces formules, que les neuf quantités α, β, etc., sont des fonctions du temps périodiques et jouissent toutes de la même période $2T$. Connaissant donc les positions diverses que le corps mobile prend dans un temps limité $2T$, on en connaîtra la position pour tout le temps, futur ou passé. En effet, étant donnée une des positions du corps, correspondante à un temps t, pour en déterminer la position correspondante au temps $t + 2iT$, i étant un nombre entier quelconque, on n'aura qu'à faire tourner le corps, autour de l'axe des z, d'un angle constant égal à $2i\Psi T$, dans le sens de la rotation primitive. Le corps se trouvera dans la position correspondante au temps $t - 2iT$, après avoir fait la même rotation dans le sens opposé. On voit par là, que le mouvement du corps se compose de deux mouvements périodiques; après un temps égal à $\frac{2\pi}{\Psi}$, les droites (x) et (y), mobiles dans le plan invariable, auront repris la même position dans ce plan, l'axe des z restant toujours en repos; et après le temps $2T$, le corps aura repris la même position, par rapport aux axes des x, y, z.

Quand on est parvenu à réduire un problème aux quadratures, un grand avantage de cette réduction, consiste en ce qu'elle nous met à même de juger en général de la marche que suivent les variables. Mais il semble que l'on n'a pas assez fait ressortir cet avantage, dans tous les cas, des formules in-

tégrales, puisque si l'on a discuté cette marche des variables, ce n'a été presque toujours que dans les cas qui se prêtent aux solutions approximatives et que l'on aurait pu traiter, sans même connaître la solution générale.

Le raisonnement qu'on vient de faire sur la nature des variables qui, dans le problème proposé, déterminent à chaque instant la position du mobile, est indépendant de ce qu'on peut réduire ces variables aux fonctions elliptiques. Mais par le moyen de ces fonctions, on saura représenter ces mêmes variables par des séries périodiques simples et régulières et d'une convergence des plus rapides.

Réduction des neuf coefficients α, β etc. aux fonctions elliptiques.

Legendre, dans son Traité des Fonctions Elliptiques, a réduit les expressions du temps t et de l'angle ψ, à des intégrales elliptiques, respectivement de la première et de la troisième espèce. Les cos., sin., Δ de l'amplitude de ces intégrales, sont égaux aux cosinus des angles que les axes principaux du corps font avec l'axe des z, multipliés par des facteurs constants lesquels, comme le module et le paramètre des mêmes intégrales, sont déterminés par les moments principaux du corps et les données initiales du problème. On saura donc exprimer, réciproquement, en fonctions de t, les cosinus des angles que les axes principaux font avec l'axe des z, ou les quantités désignées ci-dessus par α'', β'', γ''. La théorie des fonctions elliptiques fait voir que ces expressions inverses peuvent être représentées par des *fractions* dont les numérateurs et le dénominateur sont des fonctions de la plus grande simplicité et lesquelles, à cause de l'extrême convergence des séries dans lesquelles elles peuvent être développées, pour toute valeur réelle ou imaginaire de leur argument, doivent être regardées, dans le calcul, comme des quantités finies, de même que les quantités algébriques, trigonométriques ou exponentielles. Par ces mêmes fonctions on a exprimé encore, d'une manière très simple, les intégrales elliptiques de la troisième espèce. On saura donc aussi exprimer l'angle ψ dépendant d'une intégrale elliptique de la troisième espèce, par ces fonctions simples et explicites du temps.

Les expressions en fonctions du temps, dont on vient de parler, des trois coefficients, α'', β'', γ'', et de l'angle ψ, ont été données par M. ***Rueb*** dans une savante thèse *) laquelle, en outre, contient plusieurs

*) Specimen inaugurale de motu gyratorio corporis rigidi nulla vi accelatrici sollicitati auct. ***Adolpho Stephano Rueb*** Roterodamensi, Trajecti ad Rhenum 1834.

développements intéressants. Ces expressions suffisent pour déterminer la position des axes principaux du mobile, correspondante à un temps quelconque. Mais on a cru que, pour avoir une solution complète, il faudra donner les fonctions du temps, par lesquelles s'expriment tous les neuf coefficients, α, β etc. En remplissant cette tâche, on est parvenu à des expressions de ces quantités, qui par leur simplicité et leur caractère analogue à celui des fonctions algébriques rationnelles, sont éminemment propres à être traitées dans le calcul, circonstance d'autant plus importante, puisque ces mêmes quantités pourront et devront être un élément fondamental de la mécanique des mobiles à trois dimensions.

Rappelons les formules (3.) que j'écrirai de la manière suivante,

$$p^2 = \frac{l^2-Ch}{A(A-C)}\left(1-\frac{B(B-C)}{l^2-Ch}q^2\right),$$

$$r^2 = \frac{Ah-l^2}{C(A-C)}\left(1-\frac{B(A-B)}{Ah-l^2}q^2\right).$$

Le facteur de q^2 étant plus grand dans la valeur de p^2 que dans celle de r^2, on fera,

$$\sqrt{\frac{B(B-C)}{l^2-Ch}}\cdot q = \sin\xi$$

$$\sqrt{\frac{B(A-B)}{Ah-l^2}}\cdot q = k\sin\xi,$$

où k est une constante plus petite que l'unité et qui est donnée par l'équation,

$$k = \sqrt{\frac{(A-B)(l^2-Ch)}{(B-C)(Ah-l^2)}},$$

d'où suit

$$k' = \sqrt{(1-k^2)} = \sqrt{\frac{(A-C)(Bh-l^2)}{(B-C)(Ah-l^2)}}.$$

Posant, de plus,

$$\Delta(\xi) = \sqrt{(1-k^2\sin^2\xi)},$$

il viendra

$$p = -\sqrt{\frac{l^2-Ch}{A(A-C)}}\cos\xi$$

$$q = \sqrt{\frac{l^2-Ch}{B(B-C)}}\sin\xi$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{Ah-l^2}{C(A-C)}}\cdot\Delta(\xi).$$

L'on a, dans ces formules, déterminé les signes de manière que l'angle ξ croit constamment avec le temps. En effet, on a vu que le signe de p doit être opposé à celui de dq, ou à celui de $\cos\xi d\xi$. Donc, pour que $d\xi$ soit toujours positif, ainsi que l'élément dt, on a dû donner à la valeur de p le signe $-$. Quant à la valeur de r, il a fallu lui donner le signe $\pm$, puisqu'on a supposé que r ait le même signe que $Bh-l^2$, et qu'on est convenu de prendre le signe supérieur ou inférieur, selon que $Bh-l^2$ est positif ou négatif.

En substituant les valeurs de p, q, r, dans la formule différentielle,

$$dt = -\frac{B}{A-C}\frac{dq}{rp},$$

il viendra

$$\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}\cdot dt.$$

Supposons que ξ s'évanouisse en même temps que ψ ou pour $t=t_0$, et faisons,

$$u = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}\cdot(t-t_0) = n(t-t_0),$$

en posant

$$n = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}.$$

On aura donc

$$\frac{d\xi}{\Delta(\xi)} = du,$$

ou, d'après la notation dont on se sert dans l'analyse des fonctions elliptiques,

$$\xi = \operatorname{am}(u),$$

et, par suite,

$$p = -\frac{l}{A}\sin\vartheta\sin\varphi = -\sqrt{\frac{l^2-Ch}{A(A-C)}}\cdot\cos\operatorname{am}u$$

$$q = -\frac{l}{B}\sin\vartheta\cos\varphi = \sqrt{\frac{l^2-Ch}{B(B-C)}}\cdot\sin\operatorname{am}u$$

$$r = \frac{l}{C}\cos\vartheta = \sqrt{\frac{Ah-l^2}{C(A-C)}}\cdot\Delta\operatorname{am}u,$$

le module des fonctions elliptiques étant la constante k dont on a donné ci-dessus la valeur.

L'angle ϑ est supposé entre 0 et 180^0, d'où suit que $\sin\vartheta$ sera toujours positif. Cet angle sera entre 0 et 90^0, si $Bh > l^2$, et entre 90^0 et 180^0, dans le cas contraire. Donc, selon que $Bh-l^2$ est positif ou négatif, l'axe

des x' doit être mené au dessous ou au dessus du plan invariable supposé horizontal.

L'intersection qu'a, au temps $t=t_0$, le plan des x', y' avec le plan invariable, est la droite fixe dans ce dernier plan, parceque pour $t=t_0$ on a supposé $\psi=0$. D'autre côté, pour $t=t_0$ ou $u=0$, on a $\cos\varphi=0$ et $\sin\vartheta\sin\varphi$ positif; par conséquence, $\sin\vartheta$ étant toujours positif, l'on doit avoir $\varphi=+\frac{1}{2}\pi$, c'est à dire, l'axe de x' fera, dans le sens convenu, l'angle $+\frac{1}{2}\pi$ avec l'intersection du plan des x', y', et du plan invariable, ou avec la droite fixe dans ce dernier plan. En augmentant cet angle, dans son plan et dans le même sens, de $\frac{1}{2}\pi$, on a la position de l'axe des y'. Cet axe fera donc avec la droite fixe dans le plan invariable, l'angle π. Donc, au temps $t=t_0$, l'axe des y' sera couché sur le plan invariable, et y prendra une position opposée à la direction de la droite fixe dans ce plan.

Pour réduire aux fonctions elliptiques, l'angle ψ, substituons d'abord dans $A^2p^2+B^2q^2$, les valeurs données ci-dessus, de p et de q. On aura par cette substitution,

$$A^2p^2+B^2q^2 = (l^2-Ch)\left\{\frac{A\cos^2\operatorname{am}u}{A-C}+\frac{B\sin^2\operatorname{am}u}{B-C}\right\}$$
$$= \frac{A(l^2-Ch)}{A-C}\left(1+\frac{C(A-B)}{A(B-C)}\sin^2\operatorname{am}u\right).$$

En faisant

$$\frac{A(B-C)}{C(A-B)} = -\sin^2\operatorname{am}(ia') = \operatorname{tang}^2\operatorname{am}(a', k'),$$

où l'on supposera a' entre 0 et K', cette expression se change dans la suivante,

$$A^2p^2+B^2q^2 = \frac{A(l^2-Ch)}{A-C}\left(1-\frac{\sin^2\operatorname{am}u}{\sin^2\operatorname{am}(ia')}\right),$$

ou, comme on a $\sin\operatorname{am}(iK'-ia) = \frac{-1}{k\sin\operatorname{am}(ia)}$, dans celle-ci,

$$A^2p^2+B^2q^2 = \frac{A(l^2-Ch)}{A-C}(1-k^2\sin^2\operatorname{am}i(K'-a')\sin^2\operatorname{am}u).$$

Donc, étant posé,

$$K'-a' = a,$$

il viendra

$$A^2p^2+B^2q^2 = \frac{A(l^2-Ch)}{A-C}(1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u).$$

On tire de là,

$$\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2} = \frac{1}{A}+\frac{A-B}{A}\cdot\frac{Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}$$
$$= \frac{1}{A}+\frac{(A-B)(A-C)}{A^2(B-C)}\frac{\sin^2\operatorname{am}u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u},$$

d'où suit

$$\psi = -l\int\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}dt$$
$$= -l\sqrt{\frac{BC}{A(B-C)(Ah-l^2)}}\cdot\left(u+\frac{(A-B)(A-C)}{A(B-C)}\int_0^u\frac{\sin^2\operatorname{am}u\,du}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u}\right).$$

Or, de ce qu'on a posé ci-dessus, l'on tire,

$$-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia) = \frac{C(A-B)}{A(B-C)},$$
$$\Delta^2\operatorname{am}(ia) = \frac{B(A-C)}{A(B-C)},$$
$$k^2\cos^2\operatorname{am}(ia) = \frac{A-B}{B-C}\left(\frac{l^2-Ch}{Ah-l^2}+\frac{C}{A}\right) = \frac{(A-B)(A-C)}{A(B-C)}\frac{l^2}{Ah-l^2},$$

et, par suite,

$$k^2\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)\Delta\operatorname{am}(ia) = \frac{\pm il(A-B)(A-C)}{A(B-C)}\sqrt{\frac{BC}{A(B-C)(Ah-l^2)}}.$$

Donc, en posant

$$\nu = \frac{l}{An} = l\sqrt{\frac{BC}{A(B-C)(Ah-l^2)}} = \pm i\frac{C}{A-C}\frac{\cos\operatorname{am}(ia)\Delta\operatorname{am}(ia)}{\sin\operatorname{am}(ia)},$$

il viendra

$$\psi = -\nu.u\pm i\int_0^u\frac{k^2\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)\Delta\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u\,du}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u}.$$

On tire la valeur de l'intégrale précédente, de la formule (*Fundamenta nova* page 146, 3.),

$$\int_0^u\frac{k^2\sin\operatorname{am}a\cos\operatorname{am}a\Delta\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}u.du}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}a\sin^2\operatorname{am}u} = \frac{d\log\Theta(a)}{da}u+\tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)},$$

dans laquelle la constante a peut avoir des valeurs quelconques, réelles ou imaginaires. En effet, il suit de cette formule, en y mettant ia au lieu de a,

$$\psi = \left(\pm\frac{d\log\Theta(ia)}{da}-\nu\right)u\pm\tfrac{1}{2}i\log\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)},$$

ou

$$\psi = -n'u\pm\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)},$$

étant posé,

$$n' = \nu \mp \frac{d \log \Theta(ia)}{da}.$$

Pour parvenir aux valeurs précédentes, des quantités p, q, r, et de l'angle ψ, il suffit de remplacer les formules de *Legendre* par celles établies dans mon ouvrage sur les fonctions elliptiques. Ces valeurs ont été données, pour la première fois, dans le beau Mémoire de M. *Rueb*. Mais, pour achever la solution du problème proposé, et pour arriver à des formules définitives, il faudra faire des calculs ultérieurs et pour lesquels les expressions trouvées précédemment, ne sont, pour ainsi dire, qu'un point de départ.

Substituant dans n' la valeur donnée ci-dessus de ν, et remarquant qu'on a

$$\frac{i \cos \operatorname{am}(ia) \Delta \operatorname{am}(ia)}{\sin \operatorname{am}(ia)} = \frac{d \log \sin \operatorname{am}(ia)}{da} = \frac{d \log H(ia)}{da} - \frac{d \log \Theta(ia)}{da},$$

on trouve

$$n' = \pm \left\{ \frac{C \, d \log H(ia)}{(A-C) \, da} - \frac{A \, d \log \Theta(ia)}{(A-C) \, da} \right\}.$$

La quantité q étant proportionelle au $\sin \operatorname{am} u$, lorsqu'elle croit constamment de sa limite inférieure à sa limite supérieure, l'argument u, croissant indéfiniment avec le temps, aura augmenté de $2K$, et, par suite, le temps $t = \frac{1}{n} u + t_0$, aura augmenté de $\frac{2K}{n}$. Or, on a ci-dessus appelé T cet intervalle du temps pendant lequel q, en croissant constamment, parvient d'une limite à l'autre; on aura donc

$$T = \frac{2K}{n}.$$

En augmentant u de $2K$ ou t de T, la fonction $\Theta(u \mp ia)$ ne change pas de valeur, donc l'angle ψ décroitra de $2n'K = nn'T$. Or, on a trouvé égale à ΨT cette quantité de laquelle ψ décroit chaque fois que le temps augmente de T, Ψ étant la vitesse angulaire de la droite (x); on aura donc

$$\Psi = nn' = \pm \left\{ \frac{nC}{A-C} \frac{d \log H(ia)}{da} - \frac{nA}{A-C} \frac{d \log \Theta(ia)}{da} \right\}.$$

Des formules données ci-dessus, l'on déduit aisément les suivantes,

$$\frac{l}{n} \cdot \frac{A-C}{AC} = \pm \frac{i \cos \operatorname{am}(ia) \Delta \operatorname{am}(ia)}{\sin \operatorname{am}(ia)} = \pm \frac{d \log \sin \operatorname{am}(ia)}{da}$$

$$\frac{l}{n} \cdot \frac{A-B}{AB} = \pm \frac{k^2 \sin \operatorname{am}(ia) \cos \operatorname{am}(ia)}{i \Delta \operatorname{am} ia} = \pm \frac{d \log \Delta \operatorname{am}(ia)}{da}$$

$$\frac{l}{n} \cdot \frac{B-C}{BC} = \pm \frac{i \cos \operatorname{am}(ia)}{\sin \operatorname{am}(ia) \Delta \operatorname{am}(ia)} = \pm \frac{d \log \cos \operatorname{am}(K-ia)}{da}.$$

La première de ces formules donne,

$$\Psi\frac{d\log\sin\mathrm{am}(ia)}{da} = \frac{l}{A}\frac{d\log H(ia)}{da} - \frac{l}{C}\frac{d\log\Theta(ia)}{da},$$

d'où l'on tire, après quelques réductions faciles, les formules remarquables,

$$\Psi - \frac{l}{A} = \mp n\frac{d\log\Theta(ia)}{da}$$

$$\Psi - \frac{l}{B} = \mp n\frac{d\log\Theta_1(ia)}{da}$$

$$\Psi - \frac{l}{C} = \mp n\frac{d\log H(ia)}{da}.$$

L'argument constant a étant entre 0 et K', les quantités,

$$-\frac{d\log\Theta(ia)}{da},\quad \frac{d\log H(ia)}{da},\quad \frac{d\log H_1(ia)}{da},\quad \frac{d\log\Theta_1(ia)}{da}$$

seront réelles et positives *). En vertu de cette remarque, on pourra conclure, des formules précédentes, que $\frac{l}{\Psi}$ est toujours contenu entre le plus grand et le plus petit moment, et que le moment moyen est toujours contenu entre $\frac{l^2}{h}$ et $\frac{l}{\Psi}$.

Posons

$$\psi' = \psi + \Psi(t-t_0) = \psi + nn'(t-t_0) = \psi + n'u,$$

l'angle ψ' sera une fonction périodique de l'argument u ou du temps t, donnée par l'équation,

$$\psi' = \frac{\pm 1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} = \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u\pm ia)}{\Theta(u\mp ia)}.$$

L'angle ψ' étant exprimé ainsi par un logarithme divisé par l'unité imaginaire, le *sine* et le *cosine* de cet angle seront des fonctions algébriques de la quantité qui se trouve sous le signe logarithmique. Les expressions du *sine* et cosine d'une intégrale elliptique de la troisième espèce et au caractère trigonométrique, telle qu'elle sert à exprimer l'angle ψ', seront donc plus simples que celle de l'intégrale même. Or ce ne sont presque jamais les angles eux mêmes, mais leurs sines et cosines, dont on fait usage dans les calculs analytiques. En passant de l'expression logarithmique, de l'intégrale, aux ex-

*) C'est ce qui est clair par rapport à la troisième et la quatrième de ces quantités; par rapport à la première, on le démontre en développant $\Theta(ia)$ en produit infini, et par rapport à la deuxième, en la ramenant à la première par la formule, $\frac{d\log H(ia)}{da} = \frac{\pi}{2K} - \frac{d\log\Theta(ia')}{da'}$.

pressions de son sine et cosine, on aura donc réuni le double avantage, d'avoir des expressions algébriques, et d'avoir les expressions des quantités mêmes qui entrent dans le calcul. C'est ainsi qu'on franchit véritablement la barrière devant laquelle on a coutume de s'arrêter dans les cas nombreux où l'on parvient à ramener un angle à une intégrale elliptique de la troisième espèce. On verra, de plus, dans la question que l'on traite ici, et dans beaucoup d'autres, que, le sine et cosine de l'intégrale se trouvant divisés par un radical, ce radical s'en ira dans le cours du calcul, à l'aide d'un facteur par lequel ces mêmes sine et cosine seront multipliés; de sorte que l'on parviendra, finalement, à des expressions fractionnaires *rationnelles* et qui ont une manière d'être parfaitement analogue à celle des fonctions elliptiques, sin am, cos am, Δ am; seulement les arguments des numérateurs de ces fractions différeront avec celui de leur dénominateur d'une quantité constante qui pourrait être quelconque, pendant que, dans les expressions des fonctions elliptiques élémentaires, sin am, cos am, Δ am, les différences des arguments du numérateur et du dénominateur, ont des valeurs constantes particulières, savoir celles des demi-indices, iK', $K+iK'$ ou K.

Voici à présent les calculs mêmes qu'il reste à faire pour achever la solution du problème mécanique proposé.

De la valeur donnée ci-dessus, de l'angle ψ', on tire

$$e^{i\psi'} = \sqrt{\frac{\Theta(u\pm ia)}{\Theta(u\mp ia)}} = \frac{\Theta(u\pm ia)}{\sqrt{N}},$$

où l'on a posé

$$\Theta(u+ia)\,\Theta(u-ia) = N.$$

On aura donc

$$\cos\psi' = \frac{\Theta(u+ia)+\Theta(u-ia)}{2\sqrt{N}}$$

$$\pm\sin\psi' = \frac{\Theta(u+ia)-\Theta(u-ia)}{2i\sqrt{N}}.$$

Les formules par lesquelles on a ci-dessus rappelé les variables p, q, r, aux fonctions elliptiques, donnent,

$$\alpha'' = -\sin\vartheta\sin\varphi = -\frac{1}{l}\sqrt{\frac{A(l^2-Ch)}{A-C}}\cdot\cos\operatorname{am} u$$

$$\beta'' = -\sin\vartheta\cos\varphi = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{B(l^2-Ch)}{B-C}}\cdot\sin\operatorname{am} u$$

$$\gamma'' = \cos\vartheta = \frac{\pm 1}{l}\sqrt{\frac{C(Ah-l^2)}{A-C}}\cdot\Delta\operatorname{am} u.$$

Ramenons, dans ces formules, les facteurs constants, aux fonctions elliptiques à l'argument imaginaire ia.

On aura d'abord, d'après les formules par lesquelles on a introduit le module k et les fonctions elliptiques de ia,

$$\frac{C(Ah-l^2)}{(A-C)l^2} = -\text{tang}^2\,\text{am}(ia);$$

puis,

$$\frac{(A-B)(l^2-Ch)}{(B-C)(Ah-l^2)} = k^2$$

$$\frac{B(A-C)}{C(A-B)} = -\frac{\Delta^2\,\text{am}(ia)}{k^2\sin^2\text{am}(ia)}$$

$$\frac{A(B-C)}{C(A-B)} = -\frac{1}{k^2\sin^2\text{am}(ia)},$$

et, par suite,

$$\frac{B(l^2-Ch)}{(B-C)l^2} = \frac{\text{tang}^2\,\text{am}(ia)\,\Delta^2\,\text{am}(ia)}{\sin^2\text{am}(ia)} = \frac{\Delta^2\,\text{am}(ia)}{\cos^2\text{am}(ia)}$$

$$\frac{A(l^2-Ch)}{(A-C)l^2} = \frac{\text{tang}^2\,\text{am}(ia)}{\sin^2\text{am}(ia)} = \frac{1}{\cos^2\text{am}(ia)}.$$

On aura donc les valeurs suivantes, des cosinus des angles que les axes principaux du mobile font avec la perpendiculaire au plan invariable,

$$\alpha'' = -\sin\vartheta\sin\varphi = -\frac{\cos\text{am}\,u}{\cos\text{am}(ia)}$$

$$\beta'' = -\sin\vartheta\cos\varphi = \frac{\Delta\,\text{am}(ia)\sin\text{am}\,u}{\cos\text{am}(ia)}$$

$$\gamma'' = \cos\vartheta = \pm\frac{\sin\text{am}(ia)\,\Delta\,\text{am}\,u}{i\cos\text{am}(ia)}.$$

En y substituant les formules,

$$\sin\text{am}\,u = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{Hu}{\Theta u},\qquad \sin\text{am}(ia) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(ia)}{\Theta(ia)}$$

$$\cos\text{am}\,u = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{H_1 u}{\Theta u},\qquad \cos\text{am}(ia) = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{H_1(ia)}{\Theta(ia)}$$

$$\Delta\,\text{am}\,u = \sqrt{k'}\frac{\Theta_1 u}{\Theta u},\qquad \Delta\,\text{am}(ia) = \sqrt{k'}\frac{\Theta_1(ia)}{\Theta(ia)},$$

ces valeurs se changent dans celles-ci,

$$\alpha'' = -\sin\vartheta\cos\varphi = -\frac{\Theta(ia)\,H_1 u}{H_1(ia)\,\Theta u}$$

$$\beta'' = -\sin\vartheta\cos\varphi = \frac{\Theta_1(ia)\,Hu}{H_1(ia)\,\Theta u}$$

$$\gamma'' = \cos\vartheta = \pm\frac{H(ia)\,\Theta_1 u}{iH_1(ia)\,\Theta u}.$$

On déduit des formules précédentes,

$$\sin^2\vartheta = \frac{\cos^2 \mathrm{am}\, u + \Delta^2 \mathrm{am}(ia) \sin^2 \mathrm{am}\, u}{\cos^2 \mathrm{am}(ia)} = \frac{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}(ia) \sin^2 \mathrm{am}\, u}{\cos^2 \mathrm{am}(ia)}.$$

Or on a la formule suivante, qui est d'un grand usage dans l'analyse des fonctions elliptiques (Fund. p. 154. III.),

$$\frac{\Theta^2(0)\,\Theta(u+ia)\,\Theta(u-ia)}{\Theta^2(ia)\,\Theta^2 u} = \frac{\Theta^2(0).N}{\Theta^2(ia)\,\Theta^2 u} = 1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}(ia) \sin^2 \mathrm{am}\, u;$$

laquelle étant substituée dans l'équation précédente, donnera

$$\sin\vartheta = \frac{\Theta(0)\sqrt{N}}{\Theta(ia)\,\Theta u} \cdot \frac{1}{\cos \mathrm{am}(ia)},$$

ou

$$\sin\vartheta = \frac{H_1(0).\sqrt{N}}{H_1(ia)\,\Theta u}.$$

On tire de cette formule et des valeurs données ci-dessus, de $\cos\psi'$ et de $\sin\psi'$,

$$\cos\psi' = \frac{\Theta(u+ia) + \Theta(u+ia)}{2\sqrt{N}}$$

$$\pm\sin\psi' = \frac{\Theta(u+ia) - \Theta(u-ia)}{2i\sqrt{N}},$$

les valeurs des cosinus des angles que l'axe des z' fait avec les droites (x) et (y), mobiles dans le plan invariable,

$$\gamma = \sin\vartheta \sin\psi' = \pm \frac{H_1(0)\{\Theta(u+ia) - \Theta(u-ia)\}}{2iH_1(ia)\,\Theta u}$$

$$\gamma' = \sin\vartheta \cos\psi' = \frac{H_1(0)\{\Theta(u+ia) + \Theta(u-ia)\}}{2H_1(ia)\,\Theta u},$$

formules rationnelles et dans lesquelles le radical, $\sqrt{N}$, par lequel sont divisées les valeurs de $\cos\psi'$ et de $\sin\psi'$, s'en est allé par la multiplication faite avec le facteur $\sin\vartheta$.

En divisant par la valeur de $\sin\vartheta$ les équations données ci-dessus,

$$\sin\vartheta \sin\varphi = \frac{\Theta(ia)\,H_1 u}{H_1(ia)\,\Theta u}, \quad \sin\vartheta \cos\varphi = -\frac{\Theta_1(ia)\,H u}{H_1(ia)\,\Theta u},$$

on trouvera les valeurs suivantes, de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$,

$$\sin\varphi = \frac{\Theta(ia)\,H_1 u}{H_1(0).\sqrt{N}}, \quad \cos\varphi = -\frac{\Theta_1(ia)\,H u}{H_1(0).\sqrt{N}},$$

dans lesquelles on retrouve le radical, $\sqrt{N}$.

On vient d'exprimer par les fonctions elliptiques, les valeurs des *cinq* coefficients,

$$\alpha'', \quad \beta'', \quad \gamma'', \quad \gamma', \quad \gamma.$$

Quant aux *quatre* restants, ils sont donnés par les angles φ, ϑ, ψ', au moyen des formules,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos\vartheta \sin\varphi \sin\psi' + \cos\varphi \cos\psi' \\
\alpha' &= \cos\vartheta \sin\varphi \cos\psi' - \cos\varphi \sin\psi' \\
\beta &= \cos\vartheta \cos\varphi \sin\psi' - \sin\varphi \cos\psi' \\
\beta' &= \cos\vartheta \cos\varphi \cos\psi' + \sin\varphi \sin\psi'.
\end{aligned}$$

En substituant dans ces expressions, les valeurs qu'on a trouvées, de

$$\cos\vartheta, \quad \sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad \sin\psi', \quad \cos\psi',$$

on voit tout d'abord, qu'encore dans les valeurs de α, β, α', β', s'en va le radical $\sqrt{N}$. Mais pour avoir les expressions les plus simples de ces coefficients, il faudra passer par quelques transformations et appeler à l'aide, les formules de l'addition des fonctions elliptiques.

En effet, en substituant dans les deux formules d'addition,

$$\cos \mathrm{am}(u \pm ia) = \frac{\cos \mathrm{am}(ia) \cos \mathrm{am}\, u \mp \sin \mathrm{am}(ia)\, \Delta \mathrm{am}(ia) \sin \mathrm{am}\, u\, \Delta \mathrm{am}\, u}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}(ia) \sin^2 \mathrm{am}\, u}$$

$$\sin \mathrm{am}(u \pm ia) = \frac{\cos \mathrm{am}(ia)\, \Delta \mathrm{am}(ia) \sin \mathrm{am}\, u \pm \sin \mathrm{am}(ia) \cos \mathrm{am}\, u\, \Delta \mathrm{am}\, u}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}(ia) \sin^2 \mathrm{am}\, u},$$

les formules trouvées ci-dessus,

$$\begin{aligned}
\frac{\cos \mathrm{am}(u)}{\cos \mathrm{am}(ia)} &= \sin\vartheta \sin\varphi \\
\frac{\Delta \mathrm{am}(ia) \sin \mathrm{am}\, u}{\cos \mathrm{am}(ia)} &= -\sin\vartheta \cos\varphi \\
\frac{\sin \mathrm{am}(ia)\, \Delta \mathrm{am}\, u}{\cos \mathrm{am}(ia)} &= \pm i \cos\vartheta \\
\frac{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}(ia) \sin^2 \mathrm{am}\, u}{\cos^2 \mathrm{am}(ia)} &= \sin^2\vartheta,
\end{aligned}$$

on parvient aux formules importantes,

$$\cos \mathrm{am}(u \pm ia) = \frac{\sin\varphi \pm i \cos\vartheta \cos\varphi}{\sin\vartheta}$$

$$\sin \mathrm{am}(u \pm ia) = \frac{-\cos\varphi \pm i \cos\vartheta \sin\varphi}{\sin\vartheta}.$$

On substituera aux signes ambigus $\pm$, dans les deux membres de chacune de ces

deux équations, ou le même signe ou des signes opposés, selon que $Bh-l^2$ est positif on négatif.

Introduisons à présent dans les valeurs données ci-dessus de α, α', β, β', au lieu de $\cos\psi'$ et $\sin\psi'$, les exponentielles, on aura,

$$\begin{aligned}
2\alpha &= (-i\cos\vartheta\sin\varphi + \cos\varphi)e^{i\psi'} + (i\cos\vartheta\sin\varphi + \cos\varphi)e^{-i\psi'}\\
2\alpha' &= (\cos\vartheta\sin\varphi + i\cos\varphi)e^{i\psi'} + (\cos\vartheta\sin\varphi - i\cos\varphi)e^{-i\psi'}\\
2\beta &= (-i\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\varphi)e^{i\psi'} + (i\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\varphi)e^{-i\psi'}\\
2\beta' &= (\cos\vartheta\cos\varphi - i\sin\varphi)e^{i\psi'} + (\cos\vartheta\cos\varphi + i\sin\varphi)e^{-i\psi'},
\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en substituant les valeurs qu'on vient de trouver, de $\sin\operatorname{am}(u\pm ia)$ et $\cos\operatorname{am}(u\pm ia)$,

$$\begin{aligned}
2\alpha &= -\sin\vartheta e^{i\psi'}\sin\operatorname{am}(u\pm ia) - \sin\vartheta e^{-i\psi'}\sin\operatorname{am}(u\mp ia)\\
2\alpha' &= -i\sin\vartheta e^{i\psi'}\sin\operatorname{am}(u\pm ia) + i\sin\vartheta e^{-i\psi'}\sin\operatorname{am}(u\mp ia)\\
2\beta &= -\sin\vartheta e^{i\psi'}\cos\operatorname{am}(u\pm ia) - \sin\vartheta e^{-i\psi'}\cos\operatorname{am}(u\mp ia)\\
2\beta' &= -i\sin\vartheta e^{i\psi'}\cos\operatorname{am}(u\pm ia) + i\sin\vartheta e^{-i\psi'}\cos\operatorname{am}(u\mp ia).
\end{aligned}$$

Or on a,

$$\begin{aligned}
\sin\vartheta e^{i\psi'} &= \frac{H_1(0)\Theta(u\pm ia)}{H_1(ia)\Theta u}\\
\sin\vartheta e^{-i\psi'} &= \frac{H_1(0)\Theta(u\mp ia)}{H_1(ia)\Theta u},
\end{aligned}$$

et les formules elliptiques,

$$\begin{aligned}
H_1(0)\Theta(u\pm ia)\cos\operatorname{am}(u\pm ia) &= \Theta(0)H_1(u\pm ia)\\
H_1(0)\Theta(u\pm ia)\sin\operatorname{am}(u\pm ia) &= \Theta_1(0)H(u\pm ia).
\end{aligned}$$

En substituant ces équations dans les expressions précédentes de α, α', β, β', on parvient, finalement, aux expressions suivantes de ces coefficients:

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{\Theta_1(0)\{H(u+ia)+H(u-ia)\}}{2H_1(ia)\Theta u}\\
\pm\alpha' &= \frac{\Theta_1(0)\{H(u+ia)-H(u-ia)\}}{2iH_1(ia)\Theta u}\\
\beta &= -\frac{\Theta(0)\{H_1(u+ia)+H_1(u-ia)\}}{2H_1(ia)\Theta u}\\
\pm\beta' &= \frac{\Theta(0)\{H_1(u+ia)-H_1(u-ia)\}}{2iH_1(ia)\Theta u}.
\end{aligned}$$

On a exprimé, dans ce qui précéde, les cosinus des angles que les trois axes principaux du corps font avec les droites (x) et (y), ou les

quantités,

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma; \quad \alpha', \quad \beta', \quad \gamma',$$

par des fractions qui ont toutes le même dénominateur et dont les numérateurs, abstraction faite des facteurs constants qui ne sont que fonctions du module, sont formés, respectivement, à l'aide des trois fonctions Θ, H, H_1, d'une manière parfaitement analogue. On pourrait désirer, pour rendre complet le système de ces formules, de voir paraître encore, dans cette théorie, les fractions analogues dont les numérateurs sont formés à l'aide de la quatrième fonction, Θ_1. De pareilles fractions ne se sont pas trouvées parmi les valeurs des trois autres quantités, α'', β'', γ'', ou des cosinus des angles que les axes principaux font avec le troisième axe de coordonnées, celui des z; mais de telles expressions se présenteront, en cherchant les vitesses de rotation du corps autour des droites (x) et (y), ou les produits de la vitesse de rotation autour de l'axe instantané, avec les cosinus des angles que cet axe fait avec ces mêmes droites, la vitesse de rotation autour de l'axe des z étant, comme on sait, une constante,

$$\frac{h}{l}.$$

On pourra parvenir à ces expressions de plusieurs manières différentes, et en faisant usage de telle ou telle formule d'addition des fonctions elliptiques. L'analyse suivante qui peut-être n'est ni la plus courte ni la plus symétrique, a paru pourtant celle qui s'offre le plus naturellement.

Détermination des vitesses de rotation du corps autour des axes des x et y.

Désignons les vitesses de rotation du corps, autour des droites (x) et (y) mobiles elles mêmes dans le plan invariable, par v et v', on aura

$$v = \alpha p + \beta q + \gamma r$$
$$v' = \alpha' p + \beta' q + \gamma' r,$$

ou

$$v = l\left(\frac{\alpha\alpha''}{A} + \frac{\beta\beta''}{B} + \frac{\gamma\gamma''}{C}\right)$$

$$v' = l\left(\frac{\alpha'\alpha''}{A} + \frac{\beta'\beta''}{B} + \frac{\gamma'\gamma''}{C}\right).$$

Éliminons les valeurs de $\gamma\gamma''$ et de $\gamma'\gamma''$ au moyen des équations,

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0$$
$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0,$$

il viendra,

$$v = \frac{l}{C}\left(\frac{A-C}{A}\alpha\alpha''+\frac{B-C}{B}\beta\beta''\right)$$
$$v' = \frac{l}{C}\left(\frac{A-C}{A}\alpha'\alpha''+\frac{B-C}{B}\beta'\beta''\right).$$

En substituant la formule,

$$\Delta^2\operatorname{am}(ia) = \frac{B(A-C)}{A(B-C)},$$

et en posant

$$\mu = \frac{(B-C)l}{BC},$$

ces expressions se changeront dans celles-ci,

$$v = \mu(\Delta^2\operatorname{am}(ia)\alpha\alpha''+\beta\beta'')$$
$$v' = \mu(\Delta^2\operatorname{am}(ia)\alpha'\alpha''+\beta'\beta'').$$

Au lieu de considérer à part les quantités v et v', nous allons chercher la valeur de

$$v\pm iv',$$

où l'on prendra encore le signe $+$ ou $-$, selon que $Bh-l^2$ est positif ou négatif. Pour cet effet, je remarque qu'en mettant

$$m = H_1(ia)\Theta u,$$

l'on tire des valeurs trouvées ci-dessus de α, α', β, β' les deux formules suivantes,

$$m(\alpha\pm i\alpha') = -\Theta_1(0)H(u-ia)$$
$$m(\beta\pm i\beta') = -\Theta(0)H_1(u-ia).$$

Ces équations étant substituées dans la valeur de

$$v\pm iv' = \mu\{\Delta^2\operatorname{am}(ia)(\alpha\pm i\alpha')\alpha''+(\beta\pm i\beta')\beta''\},$$

on aura,

$$-\frac{m}{\mu}(v\pm iv') = \Theta_1(0)\Delta^2\operatorname{am}(ia)H(u-ia)\alpha''+\Theta(0)H_1(u-ia)\beta''.$$

Substituant les valeurs,

$$\alpha'' = -\frac{\cos\operatorname{am}u}{\cos\operatorname{am}(ia)}$$
$$\beta'' = \frac{\Delta\operatorname{am}(ia)\sin\operatorname{am}u}{\cos\operatorname{am}(ia)},$$

et faisant usage des formules,

$$\Theta_1(0)H(u-ia) = H_1(0)\Theta(u-ia).\sin\operatorname{am}(u-ia)$$
$$\Theta(0)H_1(u-ia) = H_1(0)\Theta(u-ia).\cos\operatorname{am}(u-ia),$$

on trouvera

$$-\frac{m\cos\operatorname{am}(ia)}{\mu\Delta\operatorname{am}(ia)}\cdot\frac{v\pm iv'}{H_1(0)\Theta(u-ia)}$$
$$=\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}(u-ia)-\Delta\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u-ia).$$

Or d'après une formule d'addition que l'on déduit aisément des formules connues, on a

$$\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}(u-ia)-\Delta\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}(u-ia)$$
$$=\sin\operatorname{am}(ia)\Delta\operatorname{am}(u-ia),$$

d'où l'on tire,

$$-\frac{m\cos\operatorname{am}(ia)}{\mu\Delta\operatorname{am}(ia)}\cdot\frac{v\pm iv'}{H_1(0)\Theta(u-ia)}=\sin\operatorname{am}(ia)\Delta\operatorname{am}(u-ia).$$

Remarquons qu'on a,

$$\frac{\sin\operatorname{am}(ia)\Delta\operatorname{am}(ia)}{\cos\operatorname{am}(ia)}=\frac{\pm i}{l}\sqrt{\frac{BC(Ah-l^2)}{A(B-C)}},$$

et, par suite, multipliant par μ et substituant la valeur de μ et celle donnée ci-dessus du facteur n,

$$\frac{\mu\sin\operatorname{am}(ia)\Delta\operatorname{am}(ia)}{\cos\operatorname{am}(ia)}=i\sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}=in.$$

Remarquons, de plus, qu'on a

$$H_1(0)=\sqrt{\frac{2kK}{\pi}},\qquad \Theta(u-ia)\Delta\operatorname{am}(u-ia)=\sqrt{k'}.\Theta_1(u-ia),$$

il viendra,

$$v\pm iv'=-in\sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}}\cdot\frac{\Theta_1(u-ia)}{H_1(ia)\Theta u}.$$

Changeant i en $-i$, on aura de même,

$$v\mp iv'=in\sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}}\cdot\frac{\Theta_1(u+ia)}{H_1(ia)\Theta u}.$$

Donc, les vitesses de rotation autour des droites mobiles (x) et (y) que l'on a choisies pour axes des x et y, deviendront,

$$v=\frac{f\{\Theta_1(u-ia)-\Theta_1(u+ia)\}}{2iH_1(ia)\Theta u}$$
$$v'=\mp\frac{f\{\Theta_1(u-ia)+\Theta_1(u+ia)\}}{2H_1(ia)\Theta u},$$

où l'on a posé

$$f=n\sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}}=nH'(0),$$

en désignant par $H'(0)$ la valeur de $\frac{dHu}{du}$ pour $u=0$ (*Fund.* §. 61.).

Remarquons que partout où entrent dans les résultats trouvés les signes ambigus $\pm$ et $\mp$, on peut s'en passer et les remplacer par le signe supérieur, en ayant soin de donner aux axes des z' et des y les directions opposées quand $Bh < l^2$. C'est ce qui résulte des formules primitives desquelles on est parti et peut servir à vérifier ces signes dans les valeurs que l'on a trouvées des cosinus des angles que les axes principaux et l'axe instantané font avec les axes des x, y, z.

Le quarré de la vitesse de rotation autour de l'axe instantané est la somme des quarrés de celles autour de trois axes rectangulaires quelconques. En prenant pour ces axes ceux des x', y', z' ou des x, y, z, on aura l'équation

$$p^2+q^2+r^2 = v^2+v'^2+\frac{h^2}{l^2},$$

laquelle peut servir à vérifier les valeurs trouvées de v et v'. C'est ce que nous allons faire de la manière suivante.

Des équations (5.),

$$p^2 = \frac{l^2-Ch-B(B-C)q^2}{A(A-C)}$$

$$r^2 = \frac{Ch-l^2-B(A-B)q^2}{A(A-C)},$$

il s'ensuit

$$p^2+q^2+r^2-\frac{h^2}{l^2} = \frac{(Ah-l^2)(l^2-Ch)-l^2(A-B)(B-C)q^2}{AC.l^2},$$

et comme on a,

$$q^2 = \frac{l^2-Ch}{B(B-C)}\sin^2\operatorname{am} u, \qquad n^2 = \frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC},$$

il viendra

$$p^2+q^2+r^2-\frac{h^2}{l^2} = \frac{l^2-Ch}{ABC.l^2}\left(B(Ah-l^2)-(A-B)\,l^2\sin^2\operatorname{am} u\right)$$

$$= n^2\left(\frac{B(l^2-Ch)}{(B-C)l^2}-\frac{(A-B)(l^2-Ch)}{(B-C)(Ah-l^2)}\sin^2\operatorname{am} u\right),$$

et comme on a de plus,

$$k^2 = \frac{(A-B)(l^2-Ch)}{(B-C)(Ah-l^2)}, \qquad \frac{\Delta^2\operatorname{am}(ia)}{\cos^2\operatorname{am}(ia)} = \frac{B(l^2-Ch)}{(B-C)l^2},$$

il résultera

$$p^2+q^2+r^2-\frac{h^2}{l^2} = n^2\left(\frac{\Delta^2\operatorname{am}(ia)}{\cos^2\operatorname{am}(ia)}-k^2\sin^2\operatorname{am}(u)\right).$$

D'autre côté, on trouve successivement,

$$v^2+v'^2 = \frac{f^2\Theta_1(u+ia)\Theta_1(u-ia)}{H_1^2(ia)\Theta^2 u}$$

$$= \frac{f^2}{k'}\frac{\Theta(u+ia)\Theta(u-ia)}{H_1^2(ia)\Theta^2(u)}\Delta\operatorname{am}(u+ia)\Delta\operatorname{am}(u-ia)$$

$$= \frac{f^2}{k'}\frac{\Theta^2(ia)}{\Theta^2(0)H_1^2(ia)}(1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u)\Delta\operatorname{am}(u+ia)\Delta\operatorname{am}(u-ia)$$

$$= \frac{f^2(\Delta^2\operatorname{am}(ia)-k^2\cos^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u)}{kk'\Theta_1^2(0)\cos^2\operatorname{am}(ia)} \text{*)},$$

donc

$$v^2+v'^2 = n^2\left(\frac{\Delta^2\operatorname{am}(ia)}{\cos^2\operatorname{am}(ia)}-k^2\sin^2\operatorname{am}u\right)$$

$$= p^2+q^2+r^2-\frac{h^2}{l^2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Au lieu de faire tourner les droites (x) et (y) dans le plan invariable autour du point fixe avec la vitesse angulaire Ψ, on peut donner ce mouvement de rotation au plan invariable même. La vitesse de rotation du corps, parallèle a ce même plan, étant $\frac{h}{l}$, on aura

$$\frac{h}{l}-\Psi$$

pour la vitesse *relative* de la rotation du corps parallèle au plan invariable, ce dernier de son côté étant supposé tournoyer autour du point fixe avec la vitesse angulaire Ψ. Cette vitesse relative, $\frac{h}{l}-\Psi$, peut être exprimée au moyen des fonctions Θ, d'une manière remarquable.

Pour trouver cette expression, on partira de la formule

$$\cos^2\operatorname{am}(ia) = \frac{(A-C)l^2}{A(l^2-Ch)},$$

d'où l'on tire

$$\frac{h}{l} = l\left\{\frac{1}{C}-\frac{A-C}{AC\cos^2\operatorname{am}(ia)}\right\}.$$

Or on a trouvé ci-dessus la formule,

$$\frac{l}{n}\cdot\frac{A-C}{AC} = \pm\frac{i\cos\operatorname{am}(ia)\Delta\operatorname{am}(ia)}{\sin\operatorname{am}(ia)},$$

d'où suit

*) *Fund. N.* pag. 33. II.

$$\frac{(A-C)l}{AC\cos^2\mathrm{am}(ia)} = \pm\frac{in\Delta\,\mathrm{am}(ia)}{\sin\mathrm{am}(ia)\cos\mathrm{am}(ia)}$$
$$= \pm n\frac{d\log\mathrm{tg}\,\mathrm{am}(ia)}{da} = \pm n\left\{\frac{d\log H(ia)}{da} - \frac{d\log H_1(ia)}{da}\right\}.$$

Ajoutons à cette équation la suivante à laquelle on est parvenu au même endroit,

$$\Psi - \frac{l}{C} = \mp n\frac{d\log H(ia)}{da},$$

on aura

$$\Psi - \frac{h}{l} = \mp n\frac{d\log H_1(ia)}{da}.$$

On voit par cette formule et par les valeurs données ci-dessus des quantités $\Psi - \frac{l}{A}$, $\Psi - \frac{l}{B}$, $\Psi - \frac{l}{C}$, que les quatre quantités,

$$\Psi - \frac{l}{A}, \quad \Psi - \frac{l}{B}, \quad \Psi - \frac{l}{C}, \quad \Psi - \frac{h}{l},$$

forment un système de quantités analogues entre elles, leurs valeurs étant exprimées, respectivement, par les produits de $\mp n$ avec les différentielles logarithmiques des quatre fonctions

$$\Theta(ia), \quad \Theta_1(ia), \quad H(ia), \quad H_1(ia).$$

Tableau de formules d'addition des fonctions elliptiques.

La formule d'addition dont on s'est servi dans l'article précédent, fait partie d'un système de *seize* formules semblables que l'on peut aisément déduire des formules connues ou les unes des autres et que je veux présenter ici dans un même tableau. Soit posé,

$$\mathrm{am}(a) = \alpha, \quad \mathrm{am}(b) = \beta, \quad \mathrm{am}(a+b) = \sigma,$$

ces seize formules qui sont autant d'équations entre les fonctions sine, cosine et Δ des amplitudes, α, β, σ, peuvent être distribuées dans quatre systèmes dont trois embrassent les équations dans lesquelles entrent deux des quantités, $\sin\sigma$, $\cos\sigma$, $\Delta\sigma$, et le quatrième les équations dans lesquelles entrent toutes ces quantités à la fois. On remarquera que les différents termes de ces équations sont composés de manière que l'on ne trouve jamais la même amplitude dans deux facteurs du même terme. La formule d'addition dont on a fait usage dans l'article précédent, s'obtient de la dernière formule du tableau, en posant

$$\alpha = \mathrm{am}(u), \quad \beta = -\mathrm{am}(ia), \quad \sigma = \mathrm{am}(u - ia).$$

$$[\text{am}(a)=\alpha,\quad \text{am}(b)=\beta,\quad \text{am}(a+b)=\sigma].$$

$$\begin{array}{llcl}
1) & \Delta\alpha\,\Delta\beta\,\Delta\sigma - k^2\cos\alpha\cos\beta\cos\sigma & = & k'^2 \\
2) & \Delta\sigma + k^2\sin\alpha\sin\beta\cos\sigma & = & \Delta\alpha\,\Delta\beta \\
3) & \cos\alpha\cos\beta\,\Delta\sigma - \Delta\alpha\,\Delta\beta\cos\sigma & = & k'^2\sin\alpha\sin\beta \\
4) & \sin\alpha\sin\beta\,\Delta\sigma + \cos\sigma & = & \cos\alpha\cos\beta \\
5) & \Delta\beta\,\Delta\sigma + k^2\cos\alpha\sin\beta\sin\sigma & = & \Delta\alpha \\
6) & \Delta\alpha\,\Delta\sigma + k^2\sin\alpha\cos\beta\sin\sigma & = & \Delta\beta \\
7) & -\sin\alpha\cos\beta\,\Delta\sigma + \Delta\alpha\sin\sigma & = & \cos\alpha\sin\beta \\
8) & -\cos\alpha\sin\beta\,\Delta\sigma + \Delta\beta\sin\sigma & = & \sin\alpha\cos\beta \\
9) & \cos\beta\cos\sigma + \Delta\alpha\sin\beta\sin\sigma & = & \cos\alpha \\
10) & \cos\alpha\cos\sigma + \Delta\beta\sin\alpha\sin\sigma & = & \cos\beta \\
11) & \Delta\alpha\sin\beta\cos\sigma - \cos\beta\sin\sigma & = & -\sin\alpha\,\Delta\beta \\
12) & \Delta\beta\sin\alpha\cos\sigma - \cos\alpha\sin\sigma & = & -\sin\beta\,\Delta\alpha \\
13) & \Delta\alpha\cos\beta\cos\sigma + k'^2\sin\beta\sin\sigma & = & \cos\alpha\,\Delta\beta\,\Delta\sigma \\
14) & \Delta\beta\cos\alpha\cos\sigma + k'^2\sin\alpha\sin\sigma & = & \cos\beta\,\Delta\alpha\,\Delta\sigma \\
15) & \sin\beta\cos\sigma - \Delta\alpha\cos\beta\sin\sigma & = & -\sin\alpha\,\Delta\sigma \\
16) & \sin\alpha\cos\sigma - \Delta\beta\cos\alpha\sin\sigma & = & -\sin\beta\,\Delta\sigma
\end{array}$$

Dans les quatre premières de ces formules on peut échanger entre elles les amplitudes α et β; par le même changement, les autres formules, deux à deux, se changeront l'une dans l'autre. Mais on peut aussi échanger entre elles les amplitudes α et σ, si l'on change en même temps β en $-\beta$. C'est ce qui suit de ce que par le changement de a en $a+b$ et de b en $-b$, $a+b$ se change réciproquement en a.

La formule (4.) qui long-temps a été la seule connue de celles du tableau précédent, à donné lieu à la célèbre construction de *Lagrange*, laquelle fait voir qu'à chaque formule de trigonométrie sphérique répond une formule d'addition des fonctions elliptiques, et réciproquement. En effet, d'après cette construction, on peut supposer que α, β, σ, soient les côtés d'un triangle sphérique dont les angles, α', β', σ', respectivement opposés à ces côtés, sont donnés par les équations,

$$\sin\alpha' = k\sin\alpha,\quad \sin\beta' = k\sin\beta,\quad \sin\sigma' = k\sin\sigma$$
$$\cos\alpha' = \Delta\alpha,\quad \cos\beta' = \Delta\beta,\quad \cos\sigma' = -\Delta\sigma.$$

Or, comme dans chaque formule de trigonométrie sphérique, on peut échanger entre eux les trois côtés du triangle, en faisant le même échange entre les angles opposés, il suit que dans chaque formule d'addition des fonctions elliptiques, ou dans chaque équation entre les amplitudes α, β, σ, on peut échanger entre elles ces trois amplitudes, en ayant soin toutefois de prendre $\Delta\sigma$ avec le signe —, de manière qu'en permutant α, β, σ d'une manière quelconque, on doit permuter entre elles de la même manière, les quantités, $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\sigma$; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\sigma$; $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $-\Delta\sigma$. C'est ce qu'on peut déduire aussi de la théorie des fonctions elliptiques, en remarquant que si l'on change a en $2K+2iK'-a-b$, les quantités $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\Delta\alpha$ sont changées respectivement en $\sin\sigma$, $\cos\sigma$, $-\Delta\sigma$, et réciproquement.

D'après les remarques précédentes, les seize formules du tableau peuvent être ramenées à *cinq* d'entre elles, par exemple aux équations (1 — 4.) et (7.), desquelles on déduira les autres par de simples échanges de lettres et des changements de signes. La formule (1.) est unique en son genre; de chacune des formules (2, 3, 4.) on tire, par ces changements, trois formules du tableau, et de la formule (7.), les six autres. Mais on peut, de plus, réduire ces cinq formules et, par suite, toutes les seize, à une quelconque d'entre elles, au moyen des remarques suivantes.

Et d'abord, en divisant les formules (1 et 3.) par $\Delta\alpha\Delta\beta$ et en changeant a, b, $a+b$ en $K-a$, $K-b$, $2K-a-b$, l'on obtient respectivement les formules (2 et 4.). Il suffira donc, pour pouvoir déduire toutes les quatre formules (1 — 4.) d'une d'entre elles, de déduire l'une des formules (1 et 3.) d'une des formules (2 et 4.).

Pour cet effet, on remarquera qu'en changeant u en iu, et en même temps le module k dans son complément k', les fonctions $\sin\operatorname{am} u$, $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u$ seront changées respectivement dans

$$\frac{i\sin\operatorname{am} u}{\cos\operatorname{am} u},\quad \frac{1}{\cos\operatorname{am} u},\quad \frac{\Delta\operatorname{am} u}{\cos\operatorname{am} u}.$$

D'où suit qu'en multipliant la formule (2.) par $\cos\alpha\cos\beta\cos\sigma$, et changeant les quantités a, b, $a+b$, k en ia, ib, $ia+ib$, k', l'on obtiendra la formule (3.).

Il ne restera donc qu'à faire voir comment on peut déduire encore la formule (7.) d'une des formules (1 — 4.). On peut se servir, pour cet effet, d'une proposition qui se fonde sur la remarque importante et utile dans beaucoup d'autres occasions, *qu'en changeant q en $-q$ dans les expressions,*

$$\frac{2\sqrt[4]{q}(1+q^2+q^6+\ldots)}{1+2q+2q^4+\ldots} = \sqrt{k}$$

$$\frac{1-2q+2q^4-\ldots}{1+2q+2q^4+\ldots} = \sqrt{k'}$$

$$\frac{1+2q+2q^4+\ldots}{1+q^2+q^6+\ldots}\cdot\frac{\sin x - q^2\sin 3x + q^6 \sin 5x - \ldots}{1-2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - \ldots} = \sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$$

$$\frac{1-2q+2q^4-\ldots}{1+q^2+q^6+\ldots}\cdot\frac{\cos x + q^2\cos 3x + q^6 \cos 5x + \ldots}{1-2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - \ldots} = \cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$$

$$\frac{1-2q+2q^4-\ldots}{1+2q+2q^4+\ldots}\cdot\frac{1+2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x + \ldots}{1-2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - \ldots} = \Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi},$$

les quantités k^2, k'^2, $\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$, $\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$, $\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$, *seront changées respectivement dans les suivantes,*

$$-\frac{k^2}{k'^2},\quad \frac{1}{k'^2},\quad \frac{k'\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}},\quad \frac{\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}},\quad \frac{1}{\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}},$$

et que si dans ces expressions l'on change à la fois q *en* $-q$ *et* x *en* $\frac{1}{2}\pi - x$, *les mêmes quantités seront changées, respectivement, dans*

$$-\frac{k^2}{k'^2},\quad \frac{1}{k'^2},\quad \cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi},\quad \sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi},\quad \frac{1}{k'}\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}.$$

Dans une équation quelconque entre les fonctions elliptiques des arguments a, b, $a+b$, mettons respectivement $-a$, $K-b$, $K-a-b$ au lieu de a, b, $a+b$, et considérant les quantités qui entrent dans cette équation comme des fonctions de q, $\frac{\pi a}{2K}$, $\frac{\pi b}{2K}$, changeons dans ces fonctions le signe de q, on aura, en profitant de la remarque précédente, la proposition, *que dans les formules d'addition ou dans les équations entre les amplitudes*

$$\alpha = \operatorname{am}(a),\quad \beta = \operatorname{am}(b),\quad \sigma = \operatorname{am}(a+b),$$

il est permis de mettre respectivement au lieu des quantités

$$k^2,\quad k'^2,\quad \sin\alpha,\quad \cos\alpha,\quad \Delta\alpha,$$
$$\sin\beta,\quad \cos\beta,\quad \Delta\beta,\quad \sin\sigma,\quad \cos\sigma,\quad \Delta\sigma$$

les quantités

$$-\frac{k^2}{k'^2},\quad \frac{1}{k'^2},\quad -\frac{k'\sin\alpha}{\Delta\alpha},\quad \frac{\cos\alpha}{\Delta\alpha},\quad \frac{1}{\Delta\alpha},$$
$$\cos\beta,\quad \sin\beta,\quad \frac{1}{k'}\Delta\beta,\quad \cos\sigma,\quad \sin\sigma,\quad \frac{1}{k'}\Delta\sigma.$$

Au moyen de cette proposition, l'on obtiendra tout de suite la formule (7.) de la formule (4.) multipliée par $\Delta\alpha$. On aura donc déduit de la formule (1.) la formule (2.), en changeant a et b en $K-a$ et $K-b$; de la formule (2.) la formule (3.), en multipliant les arguments par i et en changeant k en k'; de la formule (3.) la formule (4.), en changeant encore a et b en $K-a$ et $K-b$; enfin de la formule (4.) la formule (7.), en changeant a en $-a$, b en $K-b$, et en imaginant que dans les développements des fonctions elliptiques et du module, on ait changé q en $-q$. On obtiendra ensuite, de ces cinq formules, les onze autres formules du tableau, en échangeant entre eux a et b, ou en changeant a et b en $a+b$ et $-b$.

Les projections sur le plan invariable de l'axe des z' et de l'axe instantané, de même que celles des axes des x' et des y', sont accouplées l'une à l'autre de manière que deux projections accouplées ont le même mouvement moyen et que l'une d'elles est donnée par la position que l'autre a avant ou aprés le temps $\frac{1}{4}T$.

Soient respectivement

$$\psi',\quad \psi_1',\quad \psi_2',\quad \psi_3',$$

les angles que les intersections avec le plan invariable, du plan des x', y', du plan des y', z', du plan des z', x' et du plan instantané de rotation*), font avec l'axe mobile des x ou la droite (x). Ces angles sont respectivement égaux à ceux que les projections sur le plan invariable, des axes des z', x', y' et de l'axe instantané, font avec l'axe mobile des y ou la droite (y). Les quantités,

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \frac{v}{w},$$

étant respectivement les cosinus des angles que les axes principaux et l'axe instantané font avec l'axe des x, et les quantités

$$\alpha',\quad \beta',\quad \gamma',\quad \frac{v'}{w},$$

les cosinus des angles que ces mêmes axes font avec l'axe des y, on a

$$\operatorname{tg}\psi' = \frac{\gamma}{\gamma'},\qquad \operatorname{tg}\psi_1' = \frac{\alpha}{\alpha'}$$
$$\operatorname{tg}\psi_3' = \frac{v}{v'},\qquad \operatorname{tg}\psi_2' = \frac{\beta}{\beta'},$$

*) C'est ainsi qu'on nomme le plan perpendiculaire à l'axe instantané de rotation; on nommera plus bas, avec M. *Poisson*, w la vitesse de rotation du corps autour de l'axe instantané.

d'où l'on tire les expressions suivantes, des quatre angles mêmes,

$$\psi' = \frac{1}{2i}\log\frac{\gamma'+i\gamma}{\gamma'-i\gamma}, \qquad \psi_1' = \frac{1}{2i}\log\frac{\alpha'+i\alpha}{\alpha'-i\alpha}$$

$$\psi_3' = \frac{1}{2i}\log\frac{v'+iv}{v'-iv}, \qquad \psi_2' = \frac{1}{2i}\log\frac{\beta'+i\beta}{\beta'-i\beta}.$$

En substituant dans ces expressions les valeurs trouvées ci-dessus, des quantités α, β, etc., on aura les équations,

$$\psi' = \pm\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

$$\psi_1' = \pm\frac{1}{2i}\log - \frac{H(u+ia)}{H(u-ia)} = \pm\frac{1}{2i}\log\frac{H(ia+u)}{H(ia-u)}$$

$$\psi_2' = \pm\frac{1}{2i}\log - \frac{H_1(u+ia)}{H_1(u-ia)} = \pm\frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u+ia)}{H_1(u-ia)} - \tfrac{1}{2}\pi$$

$$\psi_3' = \pm\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u+ia)}{\Theta_1(u-ia)},$$

dont la première est la même que celle que l'on a pris pour point de départ dans les recherches antérieures.

Les quantités logarithmiques,

$$\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}, \qquad \log\frac{\Theta_1(u+ia)}{\Theta_1(u+ia)},$$

peuvent être développées dans des séries convergentes, suivant les cosinus et sinus des multiples de l'angle

$$\frac{\pi u}{K} = \frac{2\pi}{T}(t-t_0).$$

Il suit de là, que les angles ψ' et ψ_3' sont des fonctions du temps *périodiques*. Mais la même chose n'a pas lieu par rapport aux quantités logarithmiques,

$$\log\frac{H(ia+u)}{H(ia-u)}, \qquad \log\frac{H_1(u+ia)}{H_1(u-ia)},$$

dont les développements contiendront chacun un terme proportionel au temps, en dehors des signes sinus ou cosinus. On peut séparer ces termes de la partie périodique, en se servant des formules, (*Fund.* §. 61.),

$$H(u+iK') = ie^{\frac{\pi(K'-2iu)}{4K}}\Theta u$$

$$H_1(u+iK') = e^{\frac{\pi(K'-2iu)}{4K}}\Theta_1 u,$$

esquelles peuvent être déduites l'une de l'autre en changeant u en $K-u$ et en $-i$. En effet, on tire de ces formules en posant, comme ci-dessus, $= K' - a'$,

$$\frac{1}{2i}\log\frac{H(ia-u)}{H(ia+u)} = \frac{\pi u}{2K}+\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')}$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u-ia)}{H_1(u+ia)} = \frac{\pi u}{2K}-\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')}.$$

On aura donc, en remplaçant $\frac{u}{2K}$ par $\frac{t-t_0}{T}$, le système suivant de quatre équations dans lesquelles les seconds membres sont des fonctions du temps périodiques,

$$\mp\psi' = -\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

$$\mp\psi_1'-\frac{\pi(t-t_0)}{T} = \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')}$$

$$\mp\psi_2'-\frac{\pi(t-t_0)}{T}\mp\tfrac{1}{2}\pi = -\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')}$$

$$\mp\psi_3' = \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)}.$$

A cause de la multiplicité des valeurs des logarithmes, il est permis d'ajouter aux valeurs précédentes la quantité $\pm\pi$. Il faut donc examiner si, pour $t=t_0$ ou $u=0$, les seconds membres des équations précédentes, ont les valeurs 0 ou $\pm\pi$. Pour cet effet, on remarquera que les neuf quantités α, β, etc., et les quantités v, v', v'', qui sont suffisantes et nécessaires pour déterminer les directions des axes principaux et de l'axe instantané, ont pour $t=t_0$ ou $u=0$, les valeurs suivantes,

$$\alpha = 0,\qquad \beta=-1,\qquad \gamma = 0$$
$$\alpha' = \pm\sin\mathrm{am}(a,k'),\qquad \beta'=0,\qquad \gamma'=\cos\mathrm{am}(a,k')$$
$$\alpha'' = -\cos\mathrm{am}(a,k'),\qquad \beta''=0,\qquad \gamma''=\pm\sin\mathrm{am}(a,k')$$
$$v=0,\qquad v'=\mp n\sqrt{\frac{2K}{\pi}}\cdot\Delta\mathrm{am}(a,k'),\qquad v''=\frac{h}{l},$$

où les quantités,

$$\sin\mathrm{am}(a,k'),\quad \cos\mathrm{am}(a,k'),\quad \Delta\mathrm{am}(a,k'),\quad n\sqrt{\frac{2K}{\pi}},\quad \frac{h}{l},$$

sont positives et où l'on a nommé v'' la vitesse de la rotation autour de l'axe des z. On conclut de ces valeurs, par de simples considérations géométriques, que, pour $t=t_0$, l'on doit avoir, lorsque $Bh>l^2$,

$$\psi'=0,\quad \psi_1'=0,\quad \psi_2'=-\tfrac{1}{2}\pi,\quad \psi_3'=\pi,$$

et lorsque $Bh<l^2$,

$$\psi'=0,\quad \psi_1'=\pi,\quad \psi_2'=-\tfrac{1}{2}\pi,\quad \psi_3'=0.$$

Il faudra donc ajouter la demi-circonférence du cercle, dans le second cas à la valeur de ψ_1' et dans le premier cas à la valeur de ψ_3'. Donc, si l'on désigne par π_1 et π_3 des quantités telles que l'on a

$$\pi_1 = 0, \quad \pi_3 = \pi, \quad \text{si} \quad Bh > l^2 \quad \text{et}$$
$$\pi_1 = \pi, \quad \pi_3 = 0, \quad \text{si} \quad Bh < l^2,$$

et que l'on ajoute respectivement aux valeurs de ψ_1' et ψ_3' les quantités π_1 et π_3, on ne doit pas ajouter de terme constant aux développements des fonctions logarithmiques par lesquelles on a exprimé précédemment les angles ψ', ψ_1', ψ_2', ψ_3'.

On a déterminé l'intersection du plan des x', y' avec le plan invariable, ou par l'angle ψ qu'elle fait avec la droite fixe dans ce plan, ou par l'angle ψ' qu'elle fait avec la droite (x) mobile dans le même plan, les deux angles étant liés entre eux par l'équation

$$\psi' = \psi + \Psi(t - t_0).$$

Les angles ψ_1', ψ_2', ψ_3' étant ceux qu'avec la droite (x) font les intersections du plan invariable avec le plan des y', z', celui des x', z' et le plan instantané de rotation, nommons respectivement

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \psi_3,$$

les angles que ces mêmes intersections font avec la droite fixe dans le plan invariable, on aura de même,

$$\psi_1' = \psi_1 + \Psi(t - t_0)$$
$$\psi_2' = \psi_2 + \Psi(t - t_0)$$
$$\psi_3' = \psi_3 + \Psi(t - t_0).$$

Donc, étant posé,

$$\Psi_1 = \Psi \pm \frac{\pi}{T},$$

on aura les équations,

$$\psi + \Psi(t - t_0) = \pm \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u + ia)}{\Theta(u - ia)}$$

$$\psi_1 + \Psi_1(t - t_0) = \mp \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u + ia')}{\Theta(u - ia')} + \pi_1$$

$$\psi_2 + \Psi_1(t - t_0) = \pm \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1(u - ia')}{\Theta_1(u + ia')} - \tfrac{1}{2}\pi$$

$$\psi_3 + \Psi(t - t_0) = \mp \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1(u - ia)}{\Theta_1(u + ia)} + \pi_3.$$

Supposons à présent qu'une droite (x_1) tourne uniformément avec la vitesse angulaire Ψ_1 autour du point fixe dans le plan invariable, dans le

même sens que (x), qui est opposé à celui dans lequel les angles ψ sont comptés. Supposons, de plus, que cette droite dans son mouvement de rotation soit avancée, d'un angle de 90°, par une droite (y_1) tournant autour du point fixe avec la même vitesse angulaire Ψ_1. Il suit des formules précédentes que les intersections des quatre plans avec le plan invariable, font des rotations oscillatoires, savoir

1) l'intersection du plan des x', y' autour de (x);
2) celle du plan des y', z' autour de (x_1) ou autour de la droite opposée, selon que $Bh >$ ou $< l^2$;
3) celle du plan des x', z' autour de (y_1);
4) celle du plan instantané de rotation autour de (x) ou autour de la droite opposée, selon que $Bh <$ ou $> l^2$.

On a supposé dans ce qui précéde que les directions des intersections des quatre plans, avec le plan invariable, coïncident avec celles des projections, sur le plan invariable, des axes perpendiculaires à ces plans, après avoir fait un tour de 90°, dans le sens convenu de leur rotation. Après la même rotation de 90°, les droites (x) et (x_1) coïncident avec les droites (y) et (y_1), et les droites (y) et (y_1) avec les droites opposées à (x) et (x_1). Les projections des quatre axes sur le plan invariable feront donc des rotations oscillatoires,

1) la projection de l'axe des z' autour de (y);
2) celle de l'axe des x' autour de (y_1) ou autour de la droite opposée, selon que $Bh >$ ou $< l^2$;
3) celle de l'axe des y' autour de la droite opposée à (x_1);
4) celle de l'axe instantané autour de (y) ou de la droite opposée, selon que $Bh <$ ou $> l^2$.

Augmentant t de $\frac{1}{4}T$, l'argument u augmentera de K, et, par suite, les fonctions

$$\Theta(u \pm ia),\quad \Theta(u \pm ia') \quad \text{et} \quad \Theta_1(u \pm ia),\quad \Theta_1(u \pm ia')$$

se changeront les unes dans les autres. Nommant donc

$$O,\ O_1,\ O_2,\ O_3,$$

les angles que les quatre projections font respectivement avec les droites mobiles autour desquelles elles ont leur mouvement d'oscillation, et

$$(O),\ (O_1),\ (O_2),\ (O_3),$$

les valeurs que ces mêmes angles ont après un laps de temps égal au quart

de période, $\frac{1}{4}T$, on aura d'après les équations précédemment établies,

$$(O) = -O_3,\quad (O_1) = -O_2$$
$$(O_3) = -O,\quad (O_2) = -O_1.$$

La position des droites (x), (x_1), (y), (y_1), et des droites opposées, est connue pour chaque instant du temps, puisque ces droites tournent uniformément autour du point fixe dans le plan invariable avec des vitesses angulaires données. Il suffira donc pour déterminer, à un temps quelconque, les projections des quatre axes sur le plan invariable, de connaître, à ce même temps, les angles qu'elles font avec ces droites, autour desquelles elles font respectivement leurs oscillations. L'on tire par suite des équations précédentes le théorème, que si l'on connait à deux temps quelconques distants entre eux d'un quart de période, $\frac{1}{4}T$, les positions de la projection de l'axe des z', on connaîtra immédiatement, les positions de la projection de l'axe instantané aux mêmes temps et réciproquement, et que si l'on connait, à ces deux temps, les positions de la projection de l'un des axes des x' et des y', on connaîtra aux mêmes temps, les positions de la projection de l'autre.

Des trois axes principaux, celui que l'on a pris pour l'axe des z', ne se couche jamais sur le plan invariable; c'est l'axe auquel se rapporte le plus petit moment, quand $Bh > l^2$, ou le plus grand, quand $Bh < l^2$. Cet axe, comme on voit, est accouplé en quelque sorte à l'axe instantané, de même que les deux autres axes principaux, ceux des x' et des y', sont accouplés l'un à l'autre.

Il conviendra d'appeler l'angle

$$\frac{\pi(t-t_0)}{T} = \frac{\pi u}{2K},$$

le mouvement moyen de la rotation oscillatoire du corps, et les angles

$$\Psi(t-t_0),\quad \Psi_1(t-t_0)$$

les mouvements moyens de la rotation progressive des projections des quatre axes sur le plan invariable. Ceci convenu, on voit, par ce qui précède, *que les projections sur le plan invariable de deux axes accouplés, ont le même mouvement moyen et que l'on connait immédiatement à un temps donné la projection sur le plan invariable de l'un des axes d'un même couple, si l'on connait la projection de l'autre avant ou après un quart de période, $\frac{1}{4}T$.* On voit, de plus, par l'équation

$$\Psi_1(t-t_0) = \Psi(t-t_0) \pm \frac{\pi}{T}(t-t_0),$$

que les mouvements moyens des projections des deux couples diffèrent l'un de l'autre du mouvement moyen de la rotation oscillatoire.

Au moyen des formules

$$\frac{n\,d\log H(ia)}{da} = \frac{n\pi}{2K} - \frac{n\,d\log\Theta(ia')}{da'} = \frac{\pi}{T} - \frac{n\,d\log\Theta(ia')}{da'}$$

$$\frac{n\,d\log H_1(ia)}{da} = \frac{n\pi}{2K} - \frac{n\,d\log\Theta_1(ia')}{da'} = \frac{\pi}{T} - \frac{n\,d\log\Theta_1(ia')}{da'},$$

et en substituant Ψ_1 au lieu de $\Psi\pm\frac{\pi}{T}$, on tire des valeurs données ci-dessus des quantités $\Psi-\frac{l}{A}$, etc., les équations suivantes,

$$\Psi-\frac{l}{A} = \mp n\frac{d\log\Theta(ia)}{da}$$

$$\Psi-\frac{l}{B} = \mp n\frac{d\log\Theta_1(ia)}{da}$$

$$\Psi_1-\frac{l}{C} = \pm n\frac{d\log\Theta(ia')}{da'}$$

$$\Psi_1-\frac{h}{l} = \pm n\frac{d\log\Theta_1(ia')}{da'}.$$

Dans le cas particulier remarquable où

$$h = l^2\left\{\frac{1}{A}-\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right\},$$

on aura

$$a = a' = \tfrac{1}{2}K',$$

et, par suite,

$$\Psi+\Psi_1 = \frac{l}{A}+\frac{l}{C} = \frac{l}{B}+\frac{h}{l}.$$

On aura de plus,

$$\psi+\psi_1 = -(\Psi+\Psi_1)(t-t_0)+\pi_1$$

$$\psi_2+\psi_3 = -(\Psi+\Psi_1)(t-t_0)-\tfrac{1}{2}\pi+\pi_3.$$

Soient menées dans le plan invariable et par le point fixe deux droites dont l'une divise en deux parties égales, l'angle que font entre elles les projections, sur le plan invariable, des axes des x' et des z', et l'autre, l'angle que font entre elles les projections, sur le même plan, de l'axe des y' et de l'axe instantané, les deux formules précédentes font voir que dans le cas particulier où l'on a

$$\frac{l}{A}+\frac{l}{C} = \frac{l}{B}+\frac{h}{l},$$

ces droites tournent autour du point fixe uniformément et avec la vitesse angulaire $\frac{1}{2}\left(\frac{l}{A}+\frac{l}{C}\right)$, en faisant l'une avec l'autre un angle de 45° ou de 225°.

Recherche des différentielles $d\psi_1$, $d\psi_2$, $d\psi_3$.

De la formule (3.)

$$d\psi = \frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2}\cdot l\,dt,$$

on déduit par un simple échange des lettres, les deux autres,

$$d\psi_1 = \frac{Bq^2+Cr^2}{B^2q^2+C^2r^2}\cdot l\,dt$$

$$d\psi_2 = \frac{Cr^2+Ap^2}{C^2r^2+A^2p^2}\cdot l\,dt.$$

Vérifions ces formules au moyen des valeurs trouvées ci-dessus de ψ_1 et ψ_2, et cherchons en même temps la valeur de $d\psi_3$.

D'après les formules données au commencement de l'article précédent, on a

$$\psi = -n'u \pm \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

$$\psi_1 = -n'u \pm \frac{1}{2i}\log\frac{H(ia+u)}{H(ia-u)} + \pi_1$$

$$\psi_2 = -n'u \pm \frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u+ia)}{H_1(u-ia)} - \tfrac{1}{2}\pi$$

$$\psi_3 = -n'u \pm \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u+ia)}{\Theta_1(u-ia)} + \pi_3,$$

où

$$n' = \frac{\Psi}{n} = \frac{l}{nA} \mp \frac{d\log\Theta(ia)}{da}.$$

Cherchons les différentielles des quatre équations précédentes, u étant la seule variable, au lieu de différentier, dans chaque cas, par rapport à u, le logarithme du ***quotient*** des deux fonctions aux arguments $u+ia$ et $u-ia$, on pourra différentier par rapport à ia, le logarithme du ***produit*** de ces mêmes fonctions. On obtiendra, de cette manière, les quatre équations suivantes,

$$\frac{d\psi}{du} = -\frac{l}{nA} \mp \frac{\partial\log.\Theta^{-2}(ia)\Theta(u+ia)\Theta(u-ia)}{2\partial a}$$

$$\frac{d\psi_1}{du} = -\frac{l}{nA} \mp \frac{\partial\log.\Theta^{-2}(ia)H(u+ia)H(u-ia)}{2\partial a}$$

$$\frac{d\psi_2}{du} = -\frac{l}{nA} \mp \frac{\partial\log.\Theta^{-2}(ia)H_1(u+ia)H_1(u-ia)}{2\partial a}$$

$$\frac{d\psi_3}{du} = -\frac{l}{nA} \mp \frac{\partial\log.\Theta^{-2}(ia)\Theta_1(u+ia)\Theta_1(u-ia)}{2\partial a}.$$

Or on a l'équation

$$\Theta^{-2}(ia)\Theta(u+ia)\Theta(u-ia) = \Theta^{-2}(0)\Theta^2 u(1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u),$$

et l'on en déduit aisément les trois autres analogues. Remarquons, pour cet effet, que des formules connues d'addition l'on tire les suivantes (*Fund.* §. 18.),

$$\sin\operatorname{am}(u+ia)\sin\operatorname{am}(u-ia) = \frac{\sin^2\operatorname{am}u-\sin^2\operatorname{am}(ia)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u}$$

$$\cos\operatorname{am}(u+ia)\cos\operatorname{am}(u-ia) = \frac{\cos^2\operatorname{am}u-\sin^2\operatorname{am}(ia)\Delta^2\operatorname{am}u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u}$$

$$\Delta\operatorname{am}(u+iu)\ \Delta\operatorname{am}(u-ia) = \frac{\Delta^2\operatorname{am}u-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\cos^2\operatorname{am}u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}(u)},$$

lesquelles étant multipliées par l'équation précédente, on obtient le système suivant de formules,

$$\Theta^{-2}(ia)\,\Theta(u+ia)\,\Theta(u-ia) = \Theta^{-2}(0)\Theta^2 u(1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u)$$

$$\Theta^{-2}(ia)H(u+ia)H(u-ia) = k\,\Theta^{-2}(0)\Theta^2 u(\sin^2\operatorname{am}u-\sin^2\operatorname{am}(ia))$$

$$\Theta^{-2}(ia)H_1(u+ia)H_1(u-ia) = \frac{k}{k'}\Theta^{-2}(0)\Theta^2 u(\cos^2\operatorname{am}u-\sin^2\operatorname{am}(ia)\Delta^2\operatorname{am}u)$$

$$\Theta^{-2}(ia)\,\Theta_1(a+ia)\,\Theta_1(u+ia) = \frac{1}{k'}\Theta^{-2}(0)\Theta^2 u(\Delta^2\operatorname{am}u-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\cos^2\operatorname{am}u).$$

Substituant ces formules dans les équations différentielles précédentes et posant pour plus de simplicité,

$$\frac{1}{i}\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)\Delta\operatorname{am}(ia) = m,$$

on aura

$$\frac{d\psi}{du} = -\frac{l}{nA}\mp\frac{k^2 m\sin^2\operatorname{am}u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u}$$

$$\frac{d\psi_1}{du} = -\frac{l}{nA}\mp\frac{m}{\sin^2\operatorname{am}u-\sin^2\operatorname{am}(ia)}$$

$$\frac{d\psi_2}{du} = -\frac{l}{nA}\mp\frac{m\Delta^2\operatorname{am}u}{\cos^2\operatorname{am}u-\sin^2\operatorname{am}(ia)\Delta^2\operatorname{am}u}$$

$$\frac{d\psi_3}{du} = -\frac{l}{nA}\mp\frac{k^2 m\cos^2\operatorname{am}u}{\Delta^2\operatorname{am}u-k^2\sin^2\operatorname{am}(iu)\cos^2\operatorname{am}u}.$$

Or, on a trouvé ci-dessus,

$$\mp k^2 m = -\frac{l}{nA}\cdot\frac{(A-B)(A-C)}{A(B-C)}$$

$$\alpha'' = \frac{Ap}{l} = -\frac{\cos\operatorname{am}u}{\cos\operatorname{am}(ia)}$$

$$\beta'' = \frac{Bq}{l} = \frac{\Delta\operatorname{am}(ia)\sin\operatorname{am}u}{\cos\operatorname{am}(ia)} = \sqrt{\frac{B(A-C)}{A(B-C)}}\cdot\frac{\sin\operatorname{am}u}{\cos\operatorname{am}(ia)}$$

$$\gamma'' = \frac{Cr}{l} = \pm\frac{\sin\operatorname{am}(ia)\Delta\operatorname{am}u}{i\cos\operatorname{am}(ia)} = \frac{\pm 1}{k}\sqrt{\frac{C(A-B)}{A(B-C)}}\cdot\frac{\Delta\operatorname{am}u}{\cos\operatorname{am}(ia)},$$

d'où l'on tire les formules,

$$A^2p^2+B^2q^2 = \frac{l^2}{\cos^2\text{am}(ia)}(1-k^2\sin^2\text{am}(ia)\sin^2\text{am}\,u)$$

$$B^2q^2+C^2r^2 = \frac{l^2}{\cos^2\text{am}(ia)}(\sin^2\text{am}\,u-\sin^2\text{am}(ia))$$

$$C^2r^2+A^2p^2 = \frac{l^2}{\cos^2\text{am}(ia)}(\cos^2\text{am}\,u-\sin^2\text{am}(ia)\Delta^2\text{am}\,u),$$

auxquelles on joignera cette autre trouvée ci-dessus,

$$v^2+v'^2 = \frac{n^2}{\cos^2\text{am}(ia)}(\Delta^2\text{am}(ia)-k^2\cos^2\text{am}(ia)\sin^2\text{am}\,u)$$

$$= \frac{n^2}{\cos^2\text{am}(ia)}(\Delta^2\text{am}\,u\;\;-k^2\sin^2\text{am}(ia)\cos^2\text{am}\,u).$$

Substituant ces formules dans les valeurs des différentielles des quatre angles, et remarquant qu'on a

$$\frac{l^2}{k^2\cos^2\text{am}(ia)} = \frac{A(B-C)(Ah-l^2)}{(A-B)(A-C)} = \frac{AB(B-C)}{A-C}q^2+\frac{AC(B-C)r^2}{A-B},$$

on trouvera, en mettant $n\,dt$ au lieu de u,

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{l}{A}-\frac{l}{A}\cdot\frac{B(A-B)q^2}{A^2p^2+B^2q^2} = -\frac{l(Ap^2+Bq^2)}{A^2p^2+B^2q^2}$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{l}{A}-\frac{l}{A}\cdot\frac{B(A-B)q^2+C(A-C)r^2}{B^2q^2+C^2r^2} = -\frac{l(Bq^2+Cr^2)}{B^2q^2+C^2r^2}$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{l}{A}-\frac{l}{A}\cdot\frac{C(A-C)r^2}{A^2p^2+C^2r^2} = -\frac{l(Ap^2+Cr^2)}{A^2p^2+C^2r^2}$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = -\frac{l}{A}-\frac{n^2(A-B)(A-C)}{l(B-C)}\cdot\frac{p^2}{v^2+v'^2}.$$

Les trois premières équations peuvent être déduites d'une d'entre elles par le seul échange des lettres. On donnera à la quatrième différentes formes, au moyen des équations,

$$l^2(v^2+v'^2) = l^2(p^2+q^2+r^2)-k^2$$

$$= (B-C)^2q^2r^2+(C-A)^2r^2p^2+(A-B)^2p^2q^2,$$

$$\frac{An^2}{B-C} = \frac{Ah-l^2}{BC} = \frac{1}{BC}\{B(A-B)q^2+C(A-C)r^2\},$$

$$(A-B)(A-C)p^2 = l^2-(B+C)h+BC\Big(v^2+v'^2+\frac{h^2}{l^2}\Big),$$

desquelles on tire, après quelques réductions faciles, les expressions suivantes de $\frac{d\psi_3}{dt}$,

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -l\cdot\frac{\frac{(B-C)^2}{Ap^2}+\frac{(C-A)^2}{Bq^2}+\frac{(A-B)^2}{Cr^2}}{\frac{(B-C)^2}{p^2}+\frac{(C-A)^2}{q^2}+\frac{(A-B)^2}{r^2}} = -\frac{h}{l}-\frac{(Ah-l^2)(Bh-l^2)(Ch-l^2)}{ABCl^2(v^2+v'^2)},$$

expressions symmétriques et qui n'avaient pas encore été données. En comparant entre elles les deux expressions égales à $\frac{d\psi_2}{dt}$, on trouve

$$(A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2)\left(\frac{(B-C)^2}{Ap^2}+\frac{(C-A)^2}{Bq^2}+\frac{(A-B)^2}{Cr^2}\right)$$
$$= (Ap^2+Bq^2+Cr^2)\left(\frac{(B-C)^2}{p^2}+\frac{(C-A)^2}{q^2}+\frac{(A-B)^2}{r^2}\right)$$
$$+\frac{\{B(A-B)q^2+C(A-C)r^2\}\{C(B-C)r^2+A(B-A)p^2\}\{A(C-A)p^2+B(C-B)q^2\}}{ABCp^2q^2r^2}.$$

équation identique et facile à vérifier.

Tableaux de valeurs des intégrales elliptiques de la troisième espèce.

Les formules de l'article précédent fournissent les équations suivantes, au moyen desquelles les quatre angles, ψ, ψ_1, ψ_2, ψ_3, sont exprimés par des intégrales elliptiques de la troisième espèce et au caractère trigonométrique,

$$\mp\left(\psi+\frac{lu}{An}\right) = -\frac{d\log\Theta(ia)}{da}u-\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$
$$= \int_0^u \frac{k^2 m \sin^2\operatorname{am} u\,.\,du}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am} u}$$

$$\mp\left(\psi_1+\frac{lu}{An}-\pi_1\right) = -\frac{d\log\Theta(ia)}{da}u-\frac{1}{2i}\log\frac{H(ia+u)}{H(ia-u)}$$
$$= \frac{d\log H(ia')}{da'}u+\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')}$$
$$= \int_0^u \frac{m\,du}{\sin^2\operatorname{am} u-\sin^2\operatorname{am}(ia)}$$

$$\mp\left(\psi_2+\frac{lu}{An}+\tfrac{1}{2}\pi\right) = -\frac{d\log\Theta(ia)}{da}u-\frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u+ia)}{H_1(u-ia)}$$
$$= \frac{d\log H(ia')}{da'}u-\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')}$$
$$= \int_0^u \frac{m\,\Delta^2\operatorname{am} u\,.\,du}{\cos^2\operatorname{am} u-\sin^2\operatorname{am}(ia)\Delta^2\operatorname{am} u}$$

$$\mp\left(\psi_3+\frac{lu}{An}-\pi_3\right) = -\frac{d\log\Theta(ia)}{da}\cdot u+\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)}$$
$$= \int_0^u \frac{k^2 m\cos^2\operatorname{am} u\,.\,du}{\Delta^2\operatorname{am} u-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\cos^2\operatorname{am} u}.$$

La double expression par les fonctions Θ des angles ψ_1 et ψ_2, se tire de ce que, si $a+a'=K'$, l'on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u-ia')}{\Theta(u+ia')}+\frac{1}{2i}\log\frac{H(ia-u)}{H(ia+u)} &= \frac{\pi u}{2K}\\
\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')}+\frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u-ia)}{H_1(u+ia)} &= \frac{\pi u}{2K}\\
\frac{d\log\Theta(ia')}{da'}+\frac{d\log H(ia)}{da} &= \frac{\pi}{2K}\\
\frac{d\log\Theta_1(ia')}{da'}+\frac{d\log H_1(ia)}{da} &= \frac{\pi}{2K},
\end{aligned}$$

formules dans lesquelles il est permis d'échanger entre eux a et a'.

On obtiendra des expressions analogues et de la même simplicité que les précédentes, pour chaque somme des quatre angles et des trois quantités, $\frac{lu}{Bn}$, $\frac{lu}{Cn}$, $\frac{hu}{ln}$ correspondantes à $\frac{lu}{An}$. On tire ces expressions des quatre équations précédentes en y ajoutant les produits de u par les quantités

$$\begin{aligned}
\mp\frac{l}{n}\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right) &= -\frac{d\log\frac{H(ia)}{\Theta(ia)}}{da} = \frac{d\log\frac{\Theta(ia')}{H(ia')}}{da'} = \frac{\cos\mathrm{am}(ia)\,\Delta\mathrm{am}(ia)}{i\sin\mathrm{am}(ia)}\\
\mp\frac{l}{n}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right) &= -\frac{d\log\frac{\Theta_1(ia)}{\Theta(ia)}}{da} = \frac{d\log\frac{H_1(ia')}{H(ia')}}{da'} = \frac{ik^2\sin\mathrm{am}(ia)\cos\mathrm{am}(ia)}{\Delta\mathrm{am}(ia)}\\
\mp\frac{l}{n}\left(\frac{h}{l^2}-\frac{1}{A}\right) &= -\frac{d\log\frac{H_1(ia)}{\Theta(ia)}}{da} = \frac{d\log\frac{\Theta_1(ia')}{H(ia')}}{da'} = \frac{i\sin\mathrm{am}(ia)\,\Delta\mathrm{am}(ia)}{\cos\mathrm{am}(ia)}.
\end{aligned}$$

On aura ainsi un système de *seize* formules analogues entre elles et au moyen desquelles on exprime chacun des quatre angles par les intégrales elliptiques et les fonctions Θ, de quatre manières différentes. Nous allons réunir ces seize formules dans un même tableau qui sera en même temps très utile et même nécessaire, dans la théorie des fonctions elliptiques. En effet, pour chaque intégrale elliptique de la troisième espèce et au caractère trigonométrique,

$$\int\frac{H\,du}{1+n\sin^2\mathrm{am}\,u},$$

où H est ou une simple constante ou une constante multipliée par l'une des quantités $\sin^2\mathrm{am}\,u$, $\cos^2\mathrm{am}\,u$, $\Delta^2\mathrm{am}\,u$, on aura par ce tableau la formule la plus propre à ramener cette intégrale aux fonctions Θ. Dans ces expressions par les fonctions Θ, on a séparé la partie périodique et la partie proportionelle à u. L'argument u étant positif, toutes les intégrales réunies dans le tableau auront

des valeurs positives, pourvu qu'on ait a entre 0 et K', ce qu'on a supposé dans les recherches précédentes. Le même tableau donne la construction mécanique des seize intégrales, au moyen du mouvement proposé, c'est à dire, de la rotation d'un corps qui n'est sollicité par aucune force accélatrice.

Tableau de valeurs des intégrales elliptiques de la troisiéme espèce et au caractère trigonométrique.

$$[a' = K' - a]$$

1. $$\int_0^u \frac{k^2 \sin \operatorname{am}(ia) \cos \operatorname{am}(ia) \Delta \operatorname{am}(ia) . \sin^2 \operatorname{am} u\, du}{i(1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia) \sin^2 \operatorname{am} u)}$$

$$= -\frac{d \log \Theta(ia)}{da} u - \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} = \mp\left(\psi + \frac{lu}{An}\right)$$

2. $$\int_0^u \frac{\sin \operatorname{am}(ia) \cos \operatorname{am}(ia) \Delta \operatorname{am}(ia)\, du}{i(\sin^2 \operatorname{am} u - \sin^2 \operatorname{am}(ia))}$$

$$= \frac{d \log H(ia')}{da'} u + \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')} = \mp\left(\psi_1 + \frac{lu}{An} - \pi_1\right)$$

3. $$\int_0^u \frac{\sin \operatorname{am}(ia) \cos \operatorname{am}(ia) \Delta \operatorname{am}(ia) . \Delta^2 \operatorname{am} u\, du}{i(\cos^2 \operatorname{am} u - \sin^2 \operatorname{am}(ia) \Delta^2 \operatorname{am} u)}$$

$$= \frac{d \log H(ia')}{da'} u - \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')} = \mp\left(\psi_2 + \frac{lu}{An} + \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

4. $$\int_0^u \frac{k^2 \sin \operatorname{am}(ia) \cos \operatorname{am}(ia) \Delta \operatorname{am}(ia) . \cos^2 \operatorname{am} u\, du}{i(\Delta^2 \operatorname{am} u - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia) \cos^2 \operatorname{am} u)}$$

$$= -\frac{d \log \Theta(ia)}{da} u + \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)} = \pm\left(\psi_3 + \frac{lu}{An} - \pi_3\right)$$

---

5. $$\int_0^u \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am}(ia) \Delta \operatorname{am}(ia) . \Delta^2 \operatorname{am} u\, du}{i(1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia) \sin^2 \operatorname{am} u)}$$

$$= \frac{d \log H_1(ia)}{da} u + \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} = \pm\left(\psi + \frac{hu}{ln}\right)$$

6. $$\int_0^u \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am}(ia) \Delta \operatorname{am}(ia) . \cos^2 \operatorname{am} u\, du}{i(\sin^2 \operatorname{am} u - \sin^2 \operatorname{am}(ia))}$$

$$= \frac{d \log \Theta_1(ia')}{da'} u + \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')} = \mp\left(\psi_1 + \frac{hu}{ln} - \pi_1\right)$$

$$7.\quad \int_0^u \frac{k'^2 \operatorname{tg}\operatorname{am}(ia)\Delta\operatorname{am}(ia).\sin^2\operatorname{am}u\,du}{i(\cos^2\operatorname{am}u-\sin^2\operatorname{am}(ia)\Delta^2\operatorname{am}u)}$$

$$= \frac{d\log\Theta_1(ia')}{da'}u-\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')} = \mp\left(\psi_2+\frac{hu}{ln}+\tfrac{1}{2}\pi\right)$$

$$8.\quad \int_0^u \frac{k'^2 \operatorname{tg}\operatorname{am}(ia)\Delta\operatorname{am}(ia)\,du}{i(\Delta^2\operatorname{am}u-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\cos^2\operatorname{am}u)}$$

$$= \frac{d\log H_1(ia)}{da}u-\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)} = \pm\left(\psi_3+\frac{hu}{ln}-\pi_3\right)$$

$$9.\quad \int_0^u \frac{k^2\sin\operatorname{am}(ia)\sin\operatorname{coam}(ia).\cos^2\operatorname{am}u\,du}{i(1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u)}$$

$$= \frac{d\log\Theta_1(ia)}{da}u+\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} = \pm\left(\psi+\frac{lu}{Bn}\right)$$

$$10.\quad \int_0^u \frac{\sin\operatorname{am}(ia)\sin\operatorname{coam}(ia).\Delta^2\operatorname{am}u\,du}{i(\sin^2\operatorname{am}u-\sin^2\operatorname{am}(ia))}$$

$$= \frac{d\log H_1(ia')}{da'}u+\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')} = \mp\left(\psi_1+\frac{lu}{Bn}-\pi_1\right)$$

$$11.\quad \int_0^u \frac{k'^2\sin\operatorname{am}(ia)\sin\operatorname{coam}(ia)\,du}{i(\cos^2\operatorname{am}u-\sin^2\operatorname{am}(ia)\Delta^2\operatorname{am}u)}$$

$$= \frac{d\log H_1(ia')}{da'}u-\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')} = \mp\left(\psi_2+\frac{lu}{Bn}+\tfrac{1}{2}\pi\right)$$

$$12.\quad \int_0^u \frac{k^2k'^2\sin\operatorname{am}(ia)\sin\operatorname{coam}(ia).\sin^2\operatorname{am}u\,du}{i(\Delta^2\operatorname{am}u-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\cos^2\operatorname{am}u)}$$

$$= \frac{d\log\Theta_1(ia)}{da}u-\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)} = \pm\left(\psi_3+\frac{lu}{Bn}-\pi_3\right)$$

$$13.\quad \int_0^u \frac{i\cot\operatorname{g}\operatorname{am}(ia)\Delta\operatorname{am}(ia)\,du}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ia)\sin^2\operatorname{am}u}$$

$$= \frac{d\log H(ia)}{da}u+\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} = \pm\left(\psi+\frac{lu}{Cn}\right)$$

$$14.\quad \int_0^u \frac{i\cot\operatorname{g}\operatorname{am}(ia)\Delta\operatorname{am}(ia).\sin^2\operatorname{am}u\,du}{\sin^2\operatorname{am}u-\sin^2\operatorname{am}(ia)}$$

$$= -\frac{d\log\Theta(ia')}{da'}u-\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')} = \pm\left(\psi_1+\frac{lu}{Cn}-\pi_1\right)$$

$$15.\quad \int_0^u \frac{i\cot g\,\mathrm{am}(ia)\Delta\,\mathrm{am}(ia).\cos^2\mathrm{am}\,u\,du}{\cos^2\mathrm{am}\,u - \sin^2\mathrm{am}(ia)\Delta^2\mathrm{am}\,u}$$

$$= -\frac{d\log\Theta(ia')}{da'}u + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')} = \pm\left(\psi_2 + \frac{lu}{Cn} + \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

$$16.\quad \int_0^u \frac{i\cot g\,\mathrm{am}(ia)\Delta\,\mathrm{am}(ia).\Delta^2\mathrm{am}\,u\,du}{\Delta^2\mathrm{am}\,u - k^2\sin^2\mathrm{am}(ia)\cos^2\mathrm{am}\,u}$$

$$= \frac{d\log H(ia)}{da}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)} = \pm\left(\psi_3 + \frac{lu}{Cn} - \pi_3\right).$$

Les trois axes principaux et l'axe instantané étant projetés sur le plan invariable, on a vu que les quantités,

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)},\quad \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')}$$
$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)},\quad \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')},$$

dans lesquelles on a supposé $a < K'$, sont égales aux angles desquels s'écartent les mouvements effectifs de ces projections de leurs mouvements moyens. Or, afin que ces écarts de part et d'autre, puissent être regardés comme de véritables *oscillations*, autour de droites déterminées tournant uniformément autour du point fixe dans le plan invariable, il faut que les quantités précédentes ne surpassent jamais $\frac{1}{2}\pi$. C'est ce qui a effectivement lieu, comme on démontre de la manière suivante.

Et d'abord remarquons qu'il suffit de considérer une seule des quatre quantités précédentes, puisque les trois autres en dérivent, en changeant u en $u+K$ ou a en $K'-a$ ou en même temps u en $u+K$ et a en $K'-a$.

Les quatre quantités s'évanouissent pour $u = 0, \pm K, \pm 2K$, etc.: elles ne changent pas de valeurs lorsque u augmente de $2K$; elles prennent des valeurs opposées si l'on change u en $-u$ ou $2K-u$. C'est ce qui suit des formules,

$$\Theta u = \Theta(-u) = \Theta(2K-u).$$

Il suffira donc, pour connaître toutes les valeurs des quatre quantités. de supposer u entre 0 et K.

Faisons

$$u = \frac{2Kx}{\pi},\quad a = bK',$$

où $b < 1$, on aura

$$\frac{\pi a}{2K} = \tfrac{1}{2} b \cdot \frac{\pi K'}{K} = -\tfrac{1}{2} b \log q,$$

et, par suite,

$$\frac{1}{2i} \log \frac{1 - q^m e^{-\frac{i\pi}{K}(u+ia)}}{1 - q^m e^{\frac{i\pi}{K}(u-ia)}} = \quad \mathrm{Arc\,tg} \frac{q^{m-b} \sin 2x}{1 - q^{m-b} \cos 2x}$$

$$\frac{1}{2i} \log \frac{1 - q^m e^{\frac{i\pi}{K}(u+ia)}}{1 - q^m e^{-\frac{i\pi}{K}(u-ia)}} = - \mathrm{Arc\,tg} \frac{q^{m+b} \sin 2x}{1 - q^{m+b} \cos 2x}.$$

En donnant à m, dans ces deux équations, toutes les valeurs des nombres positifs entiers impairs, on aura, d'après le développement en produit infini de la fonction Θ (*Fund. N.* §. 61.),

$$\frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

$$= \mathrm{Arc\,tg} \frac{q^{1-b} \sin 2x}{1 - q^{1-b} \cos 2x} + \mathrm{Arc\,tg} \frac{q^{3-b} \sin 2x}{1 - q^{3-b} \cos 2x} + \mathrm{Arc\,tg} \frac{q^{5-b} \sin 2x}{1 - q^{5-b} \cos 2x} + \text{etc.}$$

$$- \mathrm{Arc\,tg} \frac{q^{1+b} \sin 2x}{1 - q^{1+b} \cos 2x} - \mathrm{Arc\,tg} \frac{q^{3+b} \sin 2x}{1 - q^{3+b} \cos 2x} - \mathrm{Arc\,tg} \frac{q^{5+b} \sin 2x}{1 - q^{5+b} \cos 2x} - \text{etc.}$$

Comme on suppose que pour $u = 0$ ou $x = 0$, la quantité

$$\frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

s'évanouisse, on pourra aussi supposer, dans le développement précédent de cette quantité, que pour $x = 0$, chaque *Arc tg* s'évanouisse séparément et ne devienne pas un multiple de $\pm\pi$. Dans tous ces arcs compris sous la forme générale,

$$\mathrm{Arc\,tg} \frac{q^n \sin 2x}{1 - q^n \cos 2x},$$

les exposants n sont positifs puisqu'on a supposé $b < 1$; on aura donc $q^n < 1$ et, par suite, aucun de ces arcs ne saura atteindre la valeur $\frac{1}{2}\pi$, leurs *maxima*, abstraction faite du signe, étant

$$\mathrm{Arc\,sin}\, q^n,$$

comme on voit aisément par la différentiation. Lorsque u est entre 0 et K ou x entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$, comme il est permis de supposer d'après la remarque faite ci-dessus, tous ces arcs auront des valeurs positives. Si l'on ordonne le développement de manière que l'exposant n, dans les termes successifs, ait des valeurs toujours croissantes, ces termes décroitront et, en même temps, leurs

signes alterneront constamment, d'où suit, d'après un raisonnement connu, que l'on aura une valeur trop grande, lorsque le développement est continué jusqu'à un terme quelconque positif, et que l'on aura une valeur trop petite, lorsque le développement est continué jusqu'à un terme quelconque négatif. Par suite, en réunissant les deux premiers termes, on trouve que la valeur de la quantité logarithmique proposée est positive et comprise entre les deux quantités,

$$\operatorname{Arc\,tg}\frac{q^{1-b}\sin 2x}{1-q^{1-b}\cos 2x},\qquad \operatorname{Arc\,tg}\frac{(q^{1-b}-q^{1+b})\sin 2x}{1-(q^{1-b}+q^{1+b})\cos 2x+q^2}.$$

On aura donc, lorsque a est entre 0 et K', la quantité proposée

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} < \operatorname{Arc\,sin} q^{1-b} < \tfrac{1}{2}\pi,$$

et la même quantité pourra toujours croître au delà de

$$\operatorname{Arc\,sin}\frac{q^{1-b}(1-q^{2b})}{1-q^2}$$

valeur *maximum* de la somme des deux premiers termes. De même, les trois autres quantités logarithmiques seront $<\operatorname{Arc\,sin} q^{1-b}$ ou $\operatorname{Arc\,sin} q^b$ et, par suite, $<\frac{1}{2}\pi$, c. q. f. d.

On aurait pu déduire la même conséquence d'une quelconque des formules (7, 8, 11, 12.), du tableau présenté ci-dessus. En effet, ces formules donnent,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')} &= \frac{\pi u}{2K}-\frac{d\log\Theta_1(ia)}{da}u-\int_0^u\frac{k'^2\sin\alpha\cos\alpha\,du}{\Delta(\alpha,k')\{1-\Delta^2(\alpha,k')\sin^2\operatorname{am}u\}}\\ &= \frac{\pi u}{2K}-\frac{d\log H_1(ia)}{da}u-\int_0^u\frac{k'^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta(\alpha,k').\sin^2\operatorname{am}u\,du}{1-\Delta^2(\alpha,k')\sin^2\operatorname{am}u}\\ \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)} &= \frac{\pi u}{2K}-\frac{d\log H_1(ia')}{da'}u-\int_0^u\frac{k^2k'^2\sin\alpha\cos\alpha.\sin^2\operatorname{am}u\,du}{\Delta(\alpha,k')\{\Delta^2(\alpha,k')-k^2\sin^2\operatorname{am}u\}}\\ &= \frac{\pi u}{2K}-\frac{d\log\Theta_1(ia')}{da'}u-\int_0^u\frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta(\alpha,k').du}{\Delta^2(\alpha,k')-k^2\sin^2\operatorname{am}u},\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\alpha = \operatorname{am}(a,k'),$$

et où les deux quantités à retrancher de $\frac{\pi u}{2K}$ sont positives, lorsque u est positif.

La valeur $\frac{1}{2}\pi$ pourra être atteinte ou même surpassée par deux des quatre quantités logarithmiques, dans les cas où l'on a

$$a=K',\ a'=0\quad\text{ou}\quad a'=K',\ a=0.$$

C'est ce qui suit en remarquant que des formules données ci-dessus,

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}+\frac{1}{2i}\log\frac{H(ia'-u)}{H(ia'+u)}=\frac{\pi u}{2K}$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)}+\frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u-ia')}{H_1(u+ia')}=\frac{\pi u}{2K},$$

l'on tire, en faisant $a'=0$, les valeurs

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+iK')}{\Theta(u-iK')}=\frac{\pi(K-u)}{2K}$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-iK')}{\Theta_1(u+iK')}=\frac{\pi u}{2K},$$

lesquelles deviendront égales à $\frac{1}{2}\pi$, quand on fait respectivement $u=0$ ou $u=K$. Lorsque a devient 0 ou K', il ne sera donc plus possible de supposer, comme ci-dessus, que pour $u=0$, toutes les quatre quantités logarithmiques s'évanouissent.

Du développement précédemment donné on déduit les trois autres analogues, en mettant ou $\frac{1}{2}\pi-x$ au lieu de x ou $1-b$ au lieu de b ou faisant l'un et l'autre changement. On aura ainsi les quatre formules,

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)}$$

$$=\text{Arc tg}\frac{q^{1-b}\sin 2x}{1-q^{1-b}\cos 2x}-\text{Arc tg}\frac{q^{1+b}\sin 2x}{1-q^{1+b}\cos 2x}+\text{Arc tg}\frac{q^{3-b}\sin 2x}{1-q^{3-b}\cos 2x}-\cdots$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia)}{\Theta_1(u+ia)}$$

$$=\text{Arc tg}\frac{q^{1-b}\sin 2x}{1+q^{1-b}\cos 2x}-\text{Arc tg}\frac{q^{1+b}\sin 2x}{1+q^{1-b}\cos 2x}+\text{Arc tg}\frac{q^{3-b}\sin 2x}{1+q^{3-b}\cos 2x}-\cdots$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')}$$

$$=\text{Arc tg}\frac{q^{b}\sin 2x}{1-q^{b}\cos 2x}-\text{Arc tg}\frac{q^{2-b}\sin 2x}{1-q^{2-b}\cos 2x}+\text{Arc tg}\frac{q^{2+b}\sin 2x}{1-q^{2+b}\cos 2x}-\cdots$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')}$$

$$=\text{Arc tg}\frac{q^{b}\sin 2x}{1+q^{b}\cos 2x}-\text{Arc tg}\frac{q^{2-b}\sin 2x}{1+q^{2-b}\cos 2x}+\text{Arc tg}\frac{q^{2+b}\sin 2x}{1+q^{2+b}\cos 2x}-\cdots,$$

auxquelles on joignera les suivantes,

$$-\frac{d\log\Theta(ia)}{da}=\frac{\pi}{K}\left\{\frac{q^{1-b}}{1-q^{1-b}}-\frac{q^{1+b}}{1-q^{1+b}}+\frac{q^{3-b}}{1-q^{3-b}}-\cdots\right\}$$

$$\frac{d\log\Theta_1(ia)}{da}=\frac{\pi}{K}\left\{\frac{q^{1-b}}{1+q^{1-b}}-\frac{q^{1+b}}{1+q^{1+b}}+\frac{q^{3-b}}{1+q^{3-b}}-\cdots\right\}$$

$$-\frac{d\log\Theta(ia')}{da'} = \frac{\pi}{K}\left\{\frac{q^b}{1-q^b} - \frac{q^{2-b}}{1-q^{2-b}} + \frac{q^{2+b}}{1-q^{2+b}} - \frac{q^{4-b}}{1-q^{4-b}} + \cdots\right\}$$

$$\frac{d\log\Theta_1(ia')}{da'} = \frac{\pi}{K}\left\{\frac{q^b}{1+q^b} - \frac{q^{2-b}}{1+q^{2-b}} + \frac{q^{2+b}}{1+q^{2+b}} - \frac{q^{4-b}}{1+q^{4-b}} + \cdots\right\}.$$

Les quatre dernières formules jouissent de la même propriété que les quatre précédentes, de donner alternativement des valeurs trop grandes et trop petites.

Ajoutons quelques remarques sur la nature et l'usage du tableau de formules présenté ci-dessus.

Si l'on réduit à la forme

$$f(1+n\sin^2\operatorname{am} u),$$

où f est un facteur constant, les dénominateurs des différentes fractions qui dans les formules du tableau se trouvent sous le signe d'intégration, on a les quatre valeurs suivantes de n ou du *paramètre* des intégrales de la troisième espèce,

$$1)\quad n = -k^2\sin^2\operatorname{am}(ia) = k^2\operatorname{tg}^2\operatorname{am}(a,k') = \operatorname{cotg}^2\operatorname{am}(a',k');$$

$$2)\quad n = -\frac{1}{\sin^2\operatorname{am}(ia)} = \operatorname{cotg}^2\operatorname{am}(a,k') = k^2\operatorname{tg}^2\operatorname{am}(a',k');$$

$$3)\quad n = -\frac{\Delta^2\operatorname{am}(ia)}{\cos^2\operatorname{am}(ia)} = -\Delta^2\operatorname{am}(a,k') = -\frac{k^2}{\Delta^2\operatorname{am}(a',k')};$$

$$4)\quad n = -\frac{k^2\cos^2\operatorname{am}(ia)}{\Delta^2\operatorname{am}(ia)} = -\frac{k^2}{\Delta^2\operatorname{am}(a,k')} = -\Delta^2\operatorname{am}(a',k').$$

Lorsque le paramètre n est une quantité quelconque positive, on peut lui donner indifféremment l'une ou l'autre des deux premières formes, et l'on peut lui donner indifféremment l'une ou l'autre des deux dernières formes, lorsque ce paramètre est une quantité négative entre $-k^2$ et -1. Dans l'un et l'autre cas, les deux formes d'un même paramètre se changent l'une dans l'autre, en mettant $K'-a$ au lieu de a, on pourra donc toujours faire, entre les deux formes du paramètre, un tel choix que l'on ait $a<\frac{1}{2}K'$. Or

$$\operatorname{tg}^2\operatorname{am}(\tfrac{1}{2}K',k') = \frac{1}{k},\qquad \Delta^2\operatorname{am}(\tfrac{1}{2}K',k') = k,$$

donc, si l'on veut que la valeur de a soit comprise entre 0 et $\frac{1}{2}K'$ et, par suite, celle de b entre 0 et $\frac{1}{2}$, on aura cette règle que l'on doit poser

$$1)\quad n = -k^2\sin^2\operatorname{am}(ia) \text{ lorsque } n \text{ est entre } 0 \text{ et } k;$$

$$2)\quad n = -\frac{1}{\sin^2\operatorname{am}(ia)} \text{ lorsque } n \text{ est entre } k \text{ et } \infty;$$

$$3)\quad n = -\frac{\Delta^2\operatorname{am}(ia)}{\cos^2\operatorname{am}(ia)} \text{ lorsque } n \text{ est entre } -1 \text{ et } -k;$$

$$4)\quad n = -\frac{k^2\cos^2\operatorname{am}(ia)}{\Delta^2\operatorname{am}(ia)} \text{ lorsque } n \text{ est entre } -k \text{ et } -k^2.$$

Soit proposé, à présent, de réduire aux fonctions Θ, une intégrale au caractère trigonométrique,

$$\int \frac{H\,du}{1+n\sin^2 \mathrm{am}\, u},$$

le numérateur H sous le signe d'intégration étant une quèlconque des quantités,

$$1, \quad \sin^2 \mathrm{am}\, u, \quad \cos^2 \mathrm{am}\, u, \quad \Delta^2 \mathrm{am}\, u,$$

multipliée par une constante, si d'après la règle énoncée l'on donne à la valeur de n la forme correspondante à l'intervalle dans lequel se trouve compris cè paramètre, on connaîtra par cette forme de n et par celle du numérateur H, la formule du tableau à prendre et, dans cette formule, l'on aura toujours $a < \frac{1}{2} K'$.

Les intégrales comprises dans les formules (1, 4, 9, 12.) du tableau, s'évanouissent pour $k=0$ ou $q=0$. Pour tirer, dans ce cas, les valeurs des autres intégrales des formules du tableau, on remarquera que, K' et b passant pour ce même cas à l'infini, l'on a $\log q = -2K'$ et, par suite,

$$q^b = e^{-2a},$$

ce qui étant substitué dans les développements donnés ci-dessus, on aura, pour $k=0$,

$$\frac{1}{2i}\log\frac{H(ia'-u)}{H(ia'+u)} = \frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u-ia')}{H_1(u+ia')} = u, \qquad \frac{d\log H(ia')}{da'} = \frac{d\log H_1(ia')}{da'} = 1$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia')}{\Theta(u-ia')} = \frac{1}{2i}\log\frac{H(ia-u)}{H(ia+u)} - u = \mathrm{Arc\,tg}\frac{e^{-2a}\sin 2u}{1-e^{-2a}\cos 2u}$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u-ia')}{\Theta_1(u+ia')} = -\frac{1}{2i}\log\frac{H_1(u-ia)}{H_1(u+ia)} + u = \mathrm{Arc\,tg}\frac{e^{-2a}\sin 2u}{1+e^{-2a}\cos 2u}$$

$$-\frac{d\log\Theta(ia')}{da'} = \frac{d\log H(ia)}{da} - 1 = \frac{2e^{-2a}}{1-e^{-2a}}$$

$$\frac{d\log\Theta_1(ia')}{da'} = -\frac{d\log H_1(ia)}{da} + 1 = \frac{2e^{-2a}}{1+e^{-2a}}.$$

Nous allons rendre complet le système des formules les plus propres pour ramener aux fonctions Θ les intégrales elliptiques de la troisième espèce, en joignant ci-dessous les formules relatives aux intégrales ***au caractère logarithmique***, formules que l'on déduit aisément ou de celles établies dans le tableau précédent, en mettant a au lieu de ia, ou directement des formules démontrées dans les ***Fundamenta Nova***.

Tableau de valeurs des intégrales elliptiques de la troisième espèce et au caractère logarithmique.

1. $$\int_0^u \frac{k^2 \sin \mathrm{am}\, a \cos \mathrm{am}\, a\, \Delta\, \mathrm{am}\, a . \sin^2 \mathrm{am}\, u\, du}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \sin^2 \mathrm{am}\, u} = \frac{d \log \Theta(a)}{da} u - \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}$$

2. $$\int_0^u \frac{k^2 \sin \mathrm{am}\, a \cos \mathrm{am}\, a . \cos^2 \mathrm{am}\, u\, du}{\Delta\, \mathrm{am}\, a (1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \sin^2 \mathrm{am}\, u)} = -\frac{d \log \Theta_1(a)}{da} u + \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}$$

3. $$\int_0^u \frac{\mathrm{tg}\, \mathrm{am}\, a\, \Delta\, \mathrm{am}\, a . \Delta^2 \mathrm{am}\, u\, du}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \sin^2 \mathrm{am}\, u} = -\frac{d \log H_1(a)}{da} u + \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}$$

4. $$\int_0^u \frac{\Delta\, \mathrm{am}\, a \cot g\, \mathrm{am}\, a\, du}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \sin^2 \mathrm{am}\, u} = \frac{d \log H(a)}{da} u - \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}$$

---

5. $$\int_0^u \frac{\sin \mathrm{am}\, a \cos \mathrm{am}\, a\, \Delta\, \mathrm{am}\, a\, du}{\sin^2 \mathrm{am}\, a - \sin^2 \mathrm{am}\, u} = -\frac{d \log \Theta(a)}{da} u + \tfrac{1}{2} \log \frac{H(a+u)}{H(a-u)}$$

6. $$\int_0^u \frac{\sin \mathrm{am}\, a \cos \mathrm{am}\, a . \Delta^2 \mathrm{am}\, u\, du}{\Delta\, \mathrm{am}\, a (\sin^2 \mathrm{am}\, a - \sin^2 \mathrm{am}\, u)} = -\frac{d \log \Theta_1(a)}{da} u + \tfrac{1}{2} \log \frac{H(a+u)}{H(a-u)}$$

7. $$\int_0^u \frac{\mathrm{tg}\, \mathrm{am}\, a\, \Delta\, \mathrm{am}\, a . \cos^2 \mathrm{am}\, u\, du}{\sin^2 \mathrm{am}\, a - \sin^2 \mathrm{am}\, u} = -\frac{d \log H_1(a)}{da} u + \tfrac{1}{2} \log \frac{H(a+u)}{H(a-u)}$$

8. $$\int_0^u \frac{\Delta\, \mathrm{am}\, a \cot g\, \mathrm{am}\, a . \sin^2 \mathrm{am}\, u\, du}{\sin^2 \mathrm{am}\, a - \sin^2 \mathrm{am}\, u} = -\frac{d \log H a}{da} u + \tfrac{1}{2} \log \frac{H(a+u)}{H(a-a)}$$

5*. $$\int_u^K \frac{\sin \mathrm{am}\, a \cos \mathrm{am}\, a\, \Delta\, \mathrm{am}\, a\, du}{\sin^2 \mathrm{am}\, u - \sin^2 \mathrm{am}\, a} = \frac{d \log \Theta a}{du} (K - u) + \tfrac{1}{2} \log \frac{H(u+a)}{H(u-a)}$$

6*. $$\int_u^K \frac{\sin \mathrm{am}\, a \cos \mathrm{am}\, a . \Delta^2 \mathrm{am}\, u\, du}{\Delta\, \mathrm{am}\, (a) (\sin^2 \mathrm{am}\, u - \sin^2 \mathrm{am}\, a)} = \frac{d \log \Theta_1 a}{du} (K - u) + \tfrac{1}{2} \log \frac{H(u+a)}{H(u-a)}$$

7*. $$\int_u^K \frac{\mathrm{tg}\, \mathrm{am}\, a\, \Delta\, \mathrm{am}\, a . \cos^2 \mathrm{am}\, u\, du}{\sin^2 \mathrm{am}\, u - \sin^2 \mathrm{am}\, a} = \frac{d \log H_1 a}{du} (K - u) + \tfrac{1}{2} \log \frac{H(u+a)}{H(u-a)}$$

8*. $$\int_u^K \frac{\Delta\, \mathrm{am}\, a \cot g\, \mathrm{am}\, a . \sin^2 \mathrm{am}\, u\, du}{\sin^2 \mathrm{am}\, u - \sin^2 \mathrm{am}\, a} = \frac{d \log H a}{da} (K - u) + \tfrac{1}{2} \log \frac{H(u+a)}{H(u-a)}.$$

Il paraît que l'onpourrait se passer entièrement d'une notation particulière des intégrales elliptiques de la troisième espèce. Leurs valeurs, en effet exprimées par les fonctions Θ, sont assez simples pour entrer elles-mêmes dans le calcul et sans se cacher sous une notation laquelle ne saurait mettre en évidence ni leur nature logarithmique ni la liaison intime entre leur argument

et celui du paramètre ni, enfin, leur décomposition en deux parties l'une proportionelle à leur argument et l'autre périodique.

Pour la même valeur de la fonction elliptique $\sin^2 \mathrm{am}\, u$, les intégrales elliptiques de la troisième espèce et au même argument u, peuvent augmenter des multiples de *trois* quantités constantes et indépendantes entre elles. En effet, la fonction $\sin \mathrm{am}\, u$ ne changera pas de valeur pendant que les intégrales elliptiques de la troisième espèce dont une valeur est,

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\log\Theta a}{da}u - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}$$

$$\text{ou}\quad -\tfrac{1}{2}\frac{d\log\Theta(ia)}{da}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)},$$

prendront toutes les valeurs comprises sous les formes générales,

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\log\Theta a}{da}u - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-ia)} + m.\frac{K d\log\Theta a}{da} + m'i\left(\frac{K' d\log\Theta a}{da} + \frac{\pi a}{K}\right) + m'' i\pi,$$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{d\log\Theta(ia)}{da}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+ia)}{\Theta(u-ia)} + m\cdot\frac{K d\log\Theta(ia)}{da} + m'i\left(\frac{K' d\log\Theta(ia)}{da} - \frac{\pi a}{K}\right) + m''\pi,$$

m, m', m'' désignant des nombres entiers positifs ou négatifs quelconques. C'est ce qui résulte de la multiplicité des valeurs du logarithme et de ce que la fonction Θu ne change pas de valeur lorsque u est augmenté de $2K$ et qu'elle est multipliée par

$$-q^{-1}e^{-\frac{i\pi u}{K}}$$

lorsque u est augmenté de $2iK'$ (*Fund.* p. 174. 8)).

Les expressions précédentes font connaître les trois constantes dont les multiples peuvent être ajoutés aux valeurs des intégrales proposées de la troisième espèce, et l'on voit que de ces constantes une est réelle et deux imaginaires ou deux réelles et une imaginaire selon que l'intégrale a le caractère logarithmique ou trigonométrique. Il suit de là, par un raisonnement connu, que telle est la variété des valeurs de ces intégrales que si l'on ramene chacune d'elles à la forme $P+iQ$, où P et Q sont des quantités réelles, l'une des quantités P et Q sera arbitraire ou pourra approcher indéfiniment d'une quantité donnée quelconque, les valeurs de l'autre formant une série arithmétique, et celle de ces quantités qui restera arbitraire, sera ou P ou Q selon que l'intégrale a le caractère trigonométrique ou logarithmique *).

*) J'avais fait connaître autrefois aux élèves géométres de l'université de Koenigsberg,

Le résultat précédent peut être étendu à l'intégrale plus générale,

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}},$$

dans laquelle a, α, β, γ, δ, ε sont des constantes réelles. Si l'on ramene chacune des valeurs dont cette intégrale est susceptible, à la forme $P+iQ$, la quantité arbitraire sera ou P ou Q selon que la constante

$$\alpha+\beta a+\gamma a^2+\delta a^3+\varepsilon a^4$$

est positive ou négative.

Si ce n'est pas la fonction $\sin\operatorname{am} u$ mais l'argument u lui même qui est donné, l'indétermination des intégrales elliptiques de la troisième espèce ne peut naître que de la multiplicité des valeurs du logarithme qui entre dans l'expression de ces intégrales par les fonctions Θ. Ce dernier cas a lieu dans l'application que l'on vient de faire, de ces intégrales, au problème mécanique proposé, l'argument u y étant proportionel au temps qui dans les problèmes de mécanique est considéré comme la variable donnée.

Remarquons, en finissant, que les fonctions elliptiques dont l'argument est proportionel au temps, manifestent ici géométriquement, d'une manière singulière, leurs deux périodes l'une réelle et l'autre imaginaire. Les axes des x' et y' étant ceux des axes principaux qui se couchent alternativement sur le plan invariable, on a vu qu'il y a une corrélation entre ces axes et une autre entre celui des z' et l'axe instantané, corrélations lesquelles correspondent l'une et l'autre à la période réelle des fonctions elliptiques. Mais il y a aussi des corrélations semblables des axes des x' et y' avec l'axe des z' et l'axe instantané et ces corrélations répondent à la période imaginaire des fonctions elliptiques ou à une augmentation du temps d'une constante imaginaire.

Berlin Hôtel de Londres ce 17 Mars 1850.

---

ces affections fondamentales des intégrales elliptiques de la troisième espèce par lesquelles la nature de ces intégrales est rapprochée de celle des intégrales Abéliennes ou hyperelliptiques. C'est ce qui a engagé M. ***Rosenhain***, l'un de ces éléves dont cette université se glorifie à juste titre, à soumettre, dans une thèse académique, les intégrales elliptiques de la troisième espèce au même traitement analytique que j'avais proposé pour les intégrales Abéliennes. Depuis, ce savant géométre est parvenu à établir d'une manière explicite les fonctions qui dans la première classe des fonctions hyperelliptiques jouent le rôle des fonctions Θ, grande et belle découverte qui vient d'être couronnée par l'académie des sciences de Paris.

10.

Beweis des Satzes dafs eine Curve n^{ten} Grades im Allgemeinen $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten hat.

Die Theorie der gegenseitigen Polarität zweier Curven bietet ein Paradoxon dar, dessen Aufklärung mit wichtigen Problemen der Theorie der algebraischen Curven zusammenhängt. Eine Curve (A) vom n^{ten} Grade hat im Allgemeinen eine Polarcurve (B) vom $(n^2-n)^{ten}$ Grade, die Polarcurve dieser ist aber immer nur wieder vom n^{ten} Grade, nämlich die ursprüngliche Curve (A) selbst, während im Allgemeinen die Polarcurve einer Curve vom $(n^2-n)^{ten}$ Grade auf den Grad $(n^2-n)^2-(n^2-n)$ steigt. Es müssen also die Curven vom $(n^2-n)^{ten}$ Grade, welche Polarcurven einer Curve vom n^{ten} Grade sind, von so besonderer Natur sein, dafs sich der Grad ihrer Polarcurve immer um

$$(n^2-n)^2-(n^2-n)-n = n^3(n-2)$$

verringert.

Herr *Poncelet* erkannte die Quelle einer so grofsen Verringerung des Grades, welche die Polarcurve von (B) erfährt, in den *Doppeltangenten* und *Wendepuncten* der Curve (A). Jeder Doppeltangente von (A) entspricht ein *Doppelpunct,* jedem Wendepunct von A ein *Rückkehrpunct* in (B). Jeder Doppelpunct einer Curve bewirkt eine Reduction des Grades ihrer Polarcurve um *zwei* Einheiten, jeder Rückkehrpunct einer Curve bewirkt eine Reduction des Grades ihrer Polarcurve um *drei* Einheiten. Wenn also die Curven n^{ter} Ordnung (A) im Allgemeinen α *Doppeltangenten* und β *Wendepuncte* haben, so werden auch ihre Polarcurven (B) im Allgemeinen α *Doppelpuncte* und β *Rückkehrpuncte* haben und daher die Polarcurven der Curven (B) im Allgemeinen eine Verringerung ihres Grades um $2\alpha+3\beta$ Einheiten erfahren. Es wird nun darauf ankommen, zu beweisen, dafs im Allgemeinen

$$2\alpha+3\beta = n^3(n-2),$$

welches, wie man gesehen hat, die Zahl ist, um welche sich im Allgemeinen der Grad der Polarcurve von (B) verringert.

Da mehrere particuläre Sätze auf die Vermuthung führten, dafs die Curven n^{ten} Grades im Allgemeinen $3n(n-2)$ Wendepuncte haben, so hat

Herr Professor *Plücker* im 12ten Bande des *Crelle*schen Journals die vorstehende Gleichung durch die Annahme der Werthe

$$\alpha = \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$$
$$\beta = 3n(n-2)$$

erfüllt, auch später die allgemeine Richtigkeit des für β angenommnen Werthes, so wie die Richtigkeit des Werthes von α für $n=4$ bewiesen. Ich werde im Folgenden den noch fehlenden Beweis der allgemeinen Gültigkeit des Werthes von α hinzufügen, oder zeigen, *dafs die Curven n^{ter} Ordnung im Allgemeinen $\tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten haben.*

Dieser Beweis, wie er hier geleistet werden soll, erfordert einige Hülfssätze, die sich theils auf die Grad-Erniedrigung beziehen, welche bisweilen eine rationale ganze Function mehrerer Variabeln vermittelst einer zwischen denselben Gröfsen gegebnen Gleichung erleiden kann, theils auf die Natur der Bedingungsgleichung, die zwischen den Coëfficienten einer gegebenen Gleichung Statt finden mufs, damit dieselbe zwei gleiche Wurzeln habe. Obgleich diese Sätze bekannt sind, so werde ich deren Beweise hier nicht übergehen, damit man nirgends eine Dunkelheit findet und alle zu dieser Untersuchung gehörigen Betrachtungen desto leichter übersehen kann. Nach Vorausschickung dieser Sätze wird die vorgelegte Aufgabe, die Bestimmung der Anzahl der Doppeltangenten einer Curve $n$ten Grades, durch eine einfache Transformation erledigt werden können.

Satz 1.

Wenn $f(x,y)$ und $\varphi(x,y)$ rationale ganze Functionen von x und y sind, und der Grad von $y^k\varphi(x,y)$ vermittelst der Gleichung $f(x,y)=0$ um ε Einheiten erniedrigt werden kann, so wird auch der Grad von $\varphi(x,y)$ selbst vermittelst der Gleichung $f(x,y)=0$ um ε Einheiten erniedrigt werden können, vorausgesetzt, dafs die Glieder der höchsten Dimensionen in $f(x,y)$ nicht sämmtlich durch y theilbar sind.

Beweis.

Eine rationale ganze Function von x und y, $\psi(x,y)$, kann vermittelst der Gleichung $f(x,y)=0$, wenn sie anders eine rationale ganze Function von x und y bleiben soll, keine andere Änderung erleiden, als die durch Hinzufügung des Productes von $f(x,y)$ in eine beliebige rationale ganze Function von x und y entsteht. Es werden also alle rationale ganze Functionen von x und y, welche vermittelst der Gleichung $f(x,y)=0$ der

Function $\psi(x, y)$ äquivalent sind, in der Form

$$\psi(x, y) + \lambda f(x, y)$$

enthalten sein, wo λ eine beliebige rationale ganze Function von x und y bedeutet. Soll es möglich sein, dafs dieser transformirte Ausdruck einen niedrigern Grad als $\psi(x, y)$ selber erhält, so müssen mehrere Bedingungen Statt finden, welche man folgendermafsen erhält.

Zuvörderst bemerke ich, dafs der Grad von λ dadurch bestimmt ist, dafs λf genau von demselben Grade wie ψ sein mufs. Denn wäre λf von einem höhern Grade als ψ, so würde auch $\lambda f + \psi$ von einem höhern Grade als ψ sein, während es von einem niedrigeren Grade werden soll, und wenn λf von einem niedrigern Grade als ψ ist, so wird $\psi + \lambda f$ von demselben Grade wie ψ, da alsdann die Glieder der höchsten Dimension in ψ durch das Hinzufügen von λf nicht zerstört werden können.

Bedeutet U eine rationale ganze Function zweier oder mehrerer Variabeln vom p^{ten} Grade, so will ich mit U_i das Aggregat derjenigen Glieder von U bezeichnen, welche in Bezug auf diese Variabeln homogen und von der $(p-i)^{\text{ten}}$ Dimension sind. Es wird demnach U, nach den abnehmenden Dimensionen seiner Glieder geordnet,

$$U_0 + U_1 + U_2 + \text{etc.} = U,$$

und wenn man die identische Gleichung $U = V$ hat, so wird man auch die identische Gleichung $U_i = V_i$ haben.

Man setze in dieser Weise

$$\psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \text{etc.}$$
$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \text{etc.}$$
$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \text{etc.},$$

und wenn man $\psi + \lambda f$ mit v bezeichnet,

$$\begin{aligned} \psi + \lambda f = v &= v_0 + v_1 + v_2 + \text{etc.} \\ &= \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \text{etc.} \\ &+ \{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \text{etc.}\}\{f_0 + f_1 + f_2 + \text{etc.}\}. \end{aligned}$$

Wenn λf und ψ von demselben Grade sind, so erhält man durch Vergleichung der Glieder derselben Dimension,

$$\begin{aligned} v_0 &= \psi_0 + \lambda_0 f_0 \\ v_1 &= \psi_1 + \lambda_0 f_1 + \lambda_1 f_0 \\ v_2 &= \psi_2 + \lambda_0 f_2 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_0 \\ &\text{etc.} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Wenn sich in $\psi + \lambda f$ oder v alle den ε höchsten Dimensionen angehörigen

Glieder gegenseitig zerstören, so verschwinden v_0, v_1, .. $v_{\varepsilon-1}$, oder es müssen die folgenden Gleichungen,

$$0 = \psi_0 + \lambda_0 f_0$$
$$0 = \psi_1 + \lambda_0 f_1 + \lambda_1 f_0$$
$$0 = \psi_2 + \lambda_0 f_2 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = \psi_{\varepsilon-1} + \lambda_0 f_{\varepsilon-1} + \lambda_1 f_{\varepsilon-2} + \cdots + \lambda_{\varepsilon-1} f_0,$$

identisch erfüllt werden. Die *erste* dieser Gleichungen zeigt, dafs ψ_0 durch f_0 theilbar sein mufs und man für $-\lambda_0$ den Quotienten der Division zu nehmen hat; die *zweite* Gleichung zeigt, dafs auch $\psi_1 + \lambda_0 f_1$ durch f_0 theilbar sein mufs und man für $-\lambda_1$ den Quotienten dieser Division zu nehmen hat; die *dritte* Gleichung zeigt, dafs auch $\psi_2 + \lambda_0 f_2 + \lambda_1 f_1$ durch f_0 theilbar sein und für $-\lambda_2$ der Quotient dieser Division genommen werden mufs, und so fort. Man erhält auf diese Weise nach und nach ε homogene Functionen, welche alle durch dieselbe homogene Function f_0 ohne Rest theilbar sein müssen, wenn es möglich sein soll, den Grad von ψ mittelst der Gleichung $f = 0$ um ε Einheiten zu erniedrigen, und es werden die Quotienten der verschiednen Divisionen die Ausdrücke, welche man für $-\lambda_0$, $-\lambda_1$, .. $-\lambda_{\varepsilon-1}$ zu nehmen hat. Umgekehrt sieht man, dafs wenn die angegebnen Bedingungen erfüllt sind. man immer einen rationalen ganzen Factor λ von der Art finden kann, dafs in ψ durch Hinzufügung von λf die Glieder der ε höchsten Dimensionen zerstört werden. Es wird nämlich, wenn man auf die angegebene Art die homogenen Functionen λ_0, λ_1, .. $\lambda_{\varepsilon-1}$ bestimmt hat,

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{\varepsilon-1} + \lambda_\varepsilon + \lambda_{\varepsilon+1} + \text{etc.},$$

wo für λ_ε, $\lambda_{\varepsilon+1}$, etc. *beliebige* rationale ganze homogene Functionen angenommen werden können, welche die ε höchsten Dimensionen in λ nicht erreichen.

Es sei jetzt die Function $\psi(x, y)$ durch y^k theilbar, so dafs, wenn man

$$\psi(x, y) = y^k \varphi(x, y)$$

setzt, $\varphi(x, y)$ ebenfalls eine rationale ganze Function von x und y wird. Es sei wieder $\varphi(x, y)$, nach den absteigenden Dimensionen seiner Glieder geordnet,

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \text{etc.} = \varphi(x, y),$$

so wird

$$\psi_0 = y^k \varphi_0, \quad \psi_1 = y^k \varphi_1, \quad \psi_2 = y^k \varphi_2, \quad \text{etc.}$$

Für diesen Fall, in welchem sämmtliche Functionen $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_{\varepsilon-1}$, welche in die obigen Gleichungen eingehen, durch y^k theilbar sind, kann man beweisen, dafs, wenn f_0 nicht durch y theilbar ist, auch die sämmtlichen homogenen Functionen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{\varepsilon-1}$ durch y^k theilbar sein müssen.

Man braucht hierzu den Satz, dafs wenn eine rationale ganze Function A das Product zweier andern rationalen ganzen Functionen B und C ist, jede rationale ganze Function, welche A theilt und mit B keinen gemeinschaftlichen Theiler hat, den andern Factor C theilen mufs. Dieser Satz ergiebt sich für den hier vorkommenden Fall homogener Functionen zweier Variablen, wenn man bedenkt, dafs sich dieselben immer nur auf *eine* Art in lineäre Factoren zerfällen lassen, und ebenso auch für Functionen von beliebig vielen Variabeln, wenn man dieselben als Functionen von jeder der Variabeln besonders betrachtet. Wendet man denselben auf die Gleichungen,

$$\begin{aligned} 0 &= y^k \varphi_0 + \lambda_0 f_0 \\ 0 &= y^k \varphi_1 + \lambda_0 f_1 + \lambda_1 f_0 \\ 0 &= y^k \varphi_2 + \lambda_0 f_2 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= y^k \varphi_{\varepsilon-1} + \lambda_0 f_{\varepsilon-1} + \lambda_1 f_{\varepsilon-2} + \cdots + \lambda_{\varepsilon-1} f_0 \end{aligned}$$

an, welche man aus den obigen durch die Substitution von $y^k \varphi_i$ für ψ_i erhält, so folgt, wenn f_0 nicht durch y theilbar ist, aus der ersten Gleichung, dafs λ_0 den Factor y^k hat, sodann aus der zweiten, dafs auch λ_1, hierauf aus der dritten, dafs λ_2, und schliefslich, dafs alle Functionen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{\varepsilon-1}$ den Factor y^k haben. Man kann daher

$$\lambda_0 = y^k \mu_0, \quad \lambda_1 = y_k \mu_1, \quad \ldots \quad \lambda_{\varepsilon-1} = y^k \mu_{\varepsilon-1}$$

setzen, wo $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{\varepsilon-1}$ rationale ganze Functionen von x und y sind. Die Substitution dieser Ausdrücke in die vorstehenden Gleichungen giebt nach Division mit y^k:

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_0 + \mu_0 f_0 \\ 0 &= \varphi_1 + \mu_0 f_1 + \mu_1 f_0 \\ 0 &= \varphi_2 + \mu_0 f_2 + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= \varphi_{\varepsilon-1} + \mu_0 f_{\varepsilon-1} + \mu_1 f_{\varepsilon-2} + \cdots + \mu_{\varepsilon-1} f_0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen, dafs sich in dem Ausdrucke

$$\begin{gathered} \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \text{etc.} \\ + \{\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{\varepsilon-1}\}\{f_0 + f_1 + f_2 + \text{etc.}\} \end{gathered}$$

sämmtliche Glieder der ε höchsten Dimensionen gegenseitig zerstören, oder dafs der Grad von

$$\varphi+(\mu_0+\mu_1+\cdots+\mu_{\varepsilon-1})f$$

um ε Einheiten niedriger als der Grad von φ ist. Wenn daher der Grad von $y^k\varphi$ vermittelst einer Gleichung vom n^{ten} Grade, $f=0$, in welcher das Glied x^n nicht fehlt, um ε Einheiten verringert werden kann, so kann auch der Grad von φ selbst vermittelst dieser Gleichung um ε Einheiten verringert werden.

Man sieht ohne Schwierigkeit, dafs man für y^k jede beliebige homogene Function nehmen kann, welche keinen Theiler mit f_0 gemein hat.

Satz 2.

Es sei h die Wurzel einer Gleichung m^{ten} Grades,

$$0=\alpha_0+\alpha_1 h+\alpha_2 h^2+\cdots+\alpha_m h^m,$$

deren Coëfficienten rationale ganze Functionen von x und y sind, und B_0, B_1, B_2, .. B_m respective der Grad dieser Functionen; wenn diese Zahlen eine arithmetische Reihe bilden, so steigt die Bedingungsgleichung, welche erforderlich ist, damit die vorgelegte Gleichung zwei gleiche Wurzeln habe, auf den Grad

$$(m-1)(B_0+B_m).$$

Beweis.

Es seien

$$h_1,\ h_2,\ ..\ h_m$$

die Wurzeln der vorgelegten Gleichung, so mufs, damit zwei dieser Wurzeln gleich werden, die Bedingungsgleichung

$$\Pi(h_i-h_k)^2=0$$

Statt finden, wenn man mit $\Pi(h_i-h_k)^2$ das Quadrat des aus den Differenzen der Wurzeln gebildeten Products bezeichnet. Diese rationale ganze symmetrische Function der Wurzeln kann durch eine rationale ganze Function der Gröfsen

$$\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m},\ \frac{\alpha_{m-2}}{\alpha_m},\ ..\ \frac{\alpha_0}{\alpha_m}$$

ausgedrückt werden. Bedeutet α_m^p die höchste Potenz von α_m, durch welche die Glieder dieses Ausdrucks dividirt werden, so erhält man durch Multipli-

cation mit α_m^p eine rationale ganze homogene Function der Coëfficienten α_0, $\alpha_1, \ldots \alpha_m$ vom p^{ten} Grade, welche ich mit

$$\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m) = \alpha_m^p \Pi(h_i - h_k)^2$$

bezeichnen will. Diese Function kann durch keine der Gröfsen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ theilbar sein, weil das Verschwinden keines der Coëfficienten der gegebenen Gleichung die Gleichheit zweier ihrer Wurzeln nothwendig mit sich führt. Es kommt nun vor allem darauf an, den Werth von p oder die Dimension dieser homogenen Function zu finden.

Zu diesem Zweck betrachte man die reciproke Gleichung,

$$\alpha_m + \alpha_{m-1} g + \alpha_{m-2} g^2 + \ldots + \alpha_0 g^m = 0,$$

welche man aus der gegebnen erhält, wenn man darin $h = \frac{1}{g}$ setzt und mit g^m multiplicirt. Setzt man

$$g_i = \frac{1}{h_i},$$

so werden $g_1, g_2, \ldots g_m$ die Wurzeln dieser reciproken Gleichung, und daher

$$\Delta(\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots \alpha_0) = \alpha_0^p \Pi(g_i - g_k)^2 = \alpha_0^p \Pi \frac{(h_i - h_k)^2}{h_i^2 h_k^2}.$$

Da das Product Π unter dem Zeichen $\frac{1}{2}m(m-1)$ Factoren umfafst, so besteht der Nenner aus dem Product von $2m(m-1)$ Wurzeln h_i, und da derselbe eine symmetrische Function dieser Wurzeln ist, so mufs er der $(2m-2)^{\text{ten}}$ Potenz des Productes aus den m Wurzeln $h_1, h_2, \ldots h_m$ und daher der Gröfse

$$\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_m}\right)^{2m-2}$$

gleich sein. Man hat daher

$$\Delta(\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots \alpha_0) = \alpha_0^{p-2m+2} \alpha_m^{2m-2} \Pi(h_i - h_k)^2$$

oder

$$\Delta(\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots \alpha_0) = \frac{\alpha_0^{p-2m+2}}{\alpha_m^{p-2m+2}} \Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m).$$

Da beide Ausdrücke, $\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m)$ und $\Delta(\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots \alpha_0)$, rationale ganze Functionen von $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ sind und, wie oben bemerkt worden ist, keine dieser Gröfsen zum Factor haben können, so folgt aus der vorstehenden Gleichung, dafs die Zahl $p-2m+2$ weder positiv noch negativ sein kann, und also verschwinden mufs. Man hat demnach

$$p = 2m-2,$$

und also

$$(1.)\qquad \varDelta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m) = \alpha_m^{2m-2}\Pi(h_i-h_k)^2.$$

Wenn man daher die Bedingung, dafs eine Gleichung

$$0 = \alpha_0+\alpha_1 h+\alpha_2 h^2+\cdots+\alpha_m h^m$$

zwei gleiche Wurzeln habe, mit

$$\varDelta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m) = 0$$

bezeichnet, wo $\varDelta$ eine, von allen überflüssigen Factoren freie, rationale ganze Function von α_0, α_1, .. α_m sein soll, so ist diese Function in Bezug auf diese Gröfsen homogen und von der $(2m-2)^{\text{ten}}$ Dimension.

Wenn im Folgenden für eine gegebene Gleichung m^{ten} Grades, $F(h)=0$, die Bedingungsgleichung, $\varDelta=0$, aufgestellt werden soll, welche zwischen ihren Coëfficienten Statt finden mufs, damit zwei ihrer Wurzeln gleich werden, so wird man unter $\varDelta$ immer die durch die Formel (1.) definirte Function verstehen, nämlich *eine rationale ganze Function der Coëfficienten von $F(h)$ von der $(2m-2)^{\text{ten}}$ Dimension, welche gleich ist der $(2m-2)^{\text{ten}}$ Potenz des Coëfficienten von h^m in $F(h)$ mal dem Quadrate des Productes aus den Differenzen der Wurzeln der Gleichung $F(h)=0$.* Aus dem Vorhergehenden erhellt, dafs diese Function unverändert bleibt, wenn man ihre Argumente in umgekehrter Ordnung schreibt, da sich die oben gefundene Gleichung, wenn man für p seinen Werth $2m-2$ setzt, in

$$\varDelta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m) = \varDelta(\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots \alpha_0)$$

verwandelt.

Es seien jetzt α_0, α_1, .. α_m Functionen von einer oder mehreren Variabeln, z. B. von den Variabeln x und y, und respective

$$B_0, B_1, \ldots B_m$$

die Zahlen, welche ihren Grad bezeichnen, so wird im Allgemeinen der Grad, auf welchen die Bedingungsgleichung $\varDelta=0$ in Bezug auf x und y steigt, gleich dem Grade, auf welchen der Ausdruck

$$\varDelta(\alpha_0 t^{B_0}, \alpha_1 t^{B_1}, \ldots \alpha_m t^{B_m})$$

in Bezug auf t steigt.

Wenn die Zahlen B_0, B_1, etc. eine arithmetische Reihe mit der Differenz C bilden, so dafs

$$B_i = B_0+iC,$$

so hat man, da $\varDelta$ eine homogene Function von α_0, α_1, .. α_m von der $(2m-2)^{\text{ten}}$

Dimension ist,

$$\Delta(\alpha_0 t^{B_0}, \alpha_1 t^{B_1}, \ldots \alpha_m t^{B_m}) = t^{(2m-2)B_0}\Delta(\alpha_0, \alpha_1 t^C, \alpha_2 t^{2C}, \ldots \alpha_m t^{mC}).$$

Da $h_1, h_2, \ldots h_m$ die Wurzeln der Gleichung

$$0 = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots + \alpha_m h^m$$

sind, so werden

$$h_1 t^{-C}, h_2 t^{-C}, \ldots h_m t^{-C}$$

die Wurzeln der Gleichung

$$0 = \alpha_0 + \alpha_1 t^C h + \alpha_2 t^{2C} h^2 + \cdots \alpha_m t^{mC} h^m$$

und daher zufolge (1.)

$$\Delta(\alpha_0, \alpha_1 t^C, \alpha_2 t^{2C}, \ldots \alpha_m t^{mC})$$
$$= \alpha_m^{2m-2} t^{m(2m-2)C} \Pi(h_i t^{-C} - h_k t^{-C})^2,$$

woraus

$$\Delta(\alpha_0, \alpha_1 t^C, \alpha_2 t^{2C}, \ldots \alpha_m t^{mC}) = t^{m(m-1)C}\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m),$$
$$\Delta(\alpha_0 t^{B_0}, \alpha_1 t^{B_1}, \ldots \alpha_m t^{B_m}) = t^{(m-1)(2B_0+mC)}\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m)$$

folgt, oder, da $2B_0 + mC = B_0 + B_m$ ist,

$$(2.) \quad \Delta(\alpha_0 t^{B_0}, \alpha_1 t^{B_1}, \ldots \alpha_m t^{B_m}) = t^{(m-1)(B_0+B_m)}\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m).$$

Da $\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m)$ die Gröfse t gar nicht enthält, so wird dieser Ausdruck in Bezug auf t von der Ordnung $(m-1)(B_0+B_m)$, und daher auch $(m-1)(B_0+B_m)$ der Grad der Bedingungsgleichung $\Delta = 0$ in Bezug auf x und y, w. z. b. w.

Da $\frac{1}{2}(m+1)(B_0+B_m)$ die Summe der Zahlen $B_0, B_1, \ldots B_m$ ist, so kann man auch sagen, dafs der Grad der Bedingungsgleichung $\Delta = 0$ das $\frac{2m-2}{m+1}$fache des Grades ist, auf welchen das Product aus allen Coëfficienten steigt.

Satz 3.

Wenn man eine gegebne Gleichung m^{ten} *Grades,*

$$0 = F(h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \cdots + \alpha_m h^m,$$

durch die Substitution $h = \frac{\gamma' + \delta' g}{\gamma + \delta g}$ *in die Gleichung*

$$0 = (\gamma + \delta g)^m F\left(\frac{\gamma' + \delta' g}{\gamma + \delta g}\right) = \beta_0 + \beta_1 g + \beta_2 g^2 + \cdots \beta_m g^m$$

transformirt, so erleidet hiedurch die Bedingungsgleichung $\Delta = 0$, *welche zwischen den Coëfficienten der gegebenen Gleichung Statt finden mufs, damit zwei ihrer Wurzeln gleich werden, keine weitere*

Veränderung, als dafs der Ausdruck Δ links vom Gleichheitszeichen mit $(\gamma\delta'-\gamma'\delta)^{m^2-m}$ multiplicirt wird, oder es wird

$$\Delta(\beta_0,\ \beta_1,\ \ldots\ \beta_m) = (\gamma\delta'-\gamma'\delta)^{m^2-m}\Delta(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots\ \alpha_m).$$

Beweis.

Es sei

$$h_i = \frac{\gamma'+\delta' g_i}{\gamma+\delta g_i} \quad \text{oder} \quad g_i = \frac{\gamma'-\gamma h_i}{\delta h_i-\delta'},$$

so werden die Gröfsen $g_1,\ g_2,\ \ldots\ g_m$ die Wurzeln der transformirten Gleichung

$$0 = (\gamma+\delta g)^m F\left(\frac{\gamma'+\delta' g}{\gamma+\delta g}\right)$$
$$= \beta_0+\beta_1 g+\beta_2 g^2+\ \ldots\ +\beta_m g^m,$$

und daher zufolge der Formel (1.),

$$\Delta(\beta_0,\ \beta_1,\ \ldots\ \beta_m) = \beta_m^{2m-2}\Pi(g_i-g_k)^2.$$

Der Werth von β_m ist hier

$$\delta^m F\left(\frac{\delta'}{\delta}\right) = \beta_m,$$

wie man sogleich sieht, wenn man in der Formel, welche die transformirte Gleichung gab, $g=\infty$ setzt.

Es ist ferner

$$g_i-g_k = \frac{\gamma'-\gamma h_i}{\delta h_i-\delta'}-\frac{\gamma'-\gamma h_k}{\delta h_k-\delta'}$$
$$= \frac{(\gamma\delta'-\gamma'\delta)(h_i-h_k)}{(\delta'-\delta h_i)(\delta'-\delta h_k)}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in das Product $\Pi(g_i-g_k)^2$, welches aus $m(m-1)$ Factoren g_i-g_k besteht, so erhält man im Nenner ein Product aus $2m(m-1)$ Factoren $\delta'-\delta h_i$, und da dasselbe eine symmetrische Function der m Wurzeln h_i sein mufs, so wird dieser Nenner

$$\{(\delta'-\delta h_1)(\delta'-\delta h_2)\ \ldots\ (\delta'-\delta h_m)\}^{2m-2}.$$

Es ist aber

$$F(h) = \alpha_m(h-h_1)(h-h_2)\ \ldots\ (h-h_m)$$

und daher

$$(\delta'-\delta h_1)(\delta'-\delta h_2)\ \ldots\ (\delta'-\delta h_m)$$
$$= \delta^m\left(\frac{\delta'}{\delta}-h_1\right)\left(\frac{\delta'}{\delta}-h_2\right)\cdots\left(\frac{\delta'}{\delta}-h_m\right) = \frac{\delta^m}{\alpha_m}F\left(\frac{\delta'}{\delta}\right) = \frac{\beta_m}{\alpha_m}.$$

Man erhält demnach

$$\Pi(g_i - g_k)^2 = (\gamma\delta' - \gamma'\delta)^{m(m-1)} \Pi \frac{(h_i - h_k)^2}{(\delta' - \delta h_i)^2 (\delta' - \delta h_k)^2}$$

$$= (\gamma\delta' - \gamma\delta)^{m(m-1)} \left(\frac{\alpha_m}{\beta_m}\right)^{2m-2} \Pi(h_i - h_k)^2,$$

und daher

$$\Delta(\beta_0, \beta_1 \,..\, \beta_m) = \beta_m^{2m-2} \Pi(g_i - g_k)^2$$

$$= (\gamma\delta' - \gamma'\delta)^{m^2-m} \alpha_m^{2m-2} \Pi(h_i - h_k)^2 = (\gamma\delta' - \gamma'\delta)^{m^2-m} \Delta(\alpha_0, \alpha_1, \,..\, \alpha_m);$$

was zu beweisen war.

Aus dem im Vorhergehenden bewiesenen Satze folgt das Corollar, dafs, wenn die Determinante der beiden linearen Ausdrücke, $\gamma + \delta g$, $\gamma' + \delta' g$, oder die Gröfse $\gamma\delta' - \gamma'\delta$, der Einheit gleich ist, die Function $\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \,..\, \alpha_m)$ dadurch, dafs man darin $\beta_0, \beta_1 \,..\, \beta_m$ für $\alpha_0, \alpha_1, \,..\, \alpha_m$ setzt, unverändert bleibt.

Nach diesen Vorbereitungen komme ich jetzt zu der vorgelegten Aufgabe selbst.

Aufgabe.

Die Anzahl der Doppeltangenten einer Curve n^{ter} Ordnung zu finden.

Auflösung.

Es sei $f(x, y) = 0$ die Gleichung einer gegebnen Curve n^{ter} Ordnung. Man multiplicire die Glieder des Ausdrucks $f(x, y)$, welche nicht auf den n^{ten} Grad steigen, mit einer solchen Potenz von z, dafs sie alle in Bezug auf x, y, z von der n^{ten} Dimension werden, und bezeichne die homogene Function von x, y, z von der n^{ten} Dimension, welche man auf diese Weise erhält, mit $f(x, y, z)$. Es wird demnach, wenn man auf die in dem Satze (1.) angegebne Art die Function f, nach fallenden Dimensionen geordnet, mit

$$f_0 + f_1 + f_2 + \,..\, f_n = f$$

bezeichnet, der Ausdruck

$$f(x, y, z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \,..\, + f_n z^n$$

werden. Es soll im Folgenden der Gleichung der Curve die Form,

$$f(x, y, z) = 0,$$

gegeben werden, wobei man sich unter z eine beliebige Constante oder, wenn man will, die *Einheit* zu denken hat. Die Formeln der analytischen Geómetrie haben durch diese Einführung der homogenen Function $f(x, y, z)$ von 3 Variabeln x, y, z statt der nicht homogenen Function $f(x, y)$ wesentlich an Ein-

facheit und Symmetrie gewonnen und es würden ohne dieselbe mehrere der wichtigsten Untersuchungen nicht ohne die beschwerlichste Weitläuftigkeit zu führen sein. Die nachfolgenden Untersuchungen werden auf's neue den Nutzen dieses wichtigen Hülfsmittels darthun.

Es seien x und y die Coordinaten eines Punctes der gegebnen Curve, und in diesem Puncte an die Curve eine Tangente gelegt.

Nennt man p und q die Coordinaten der Puncte dieser Tangente, so kann man vermöge der Gleichung derselben,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(q-y) = 0,$$

die beiden Coordinaten p und q durch eine einzige Gröfse h ausdrücken, indem man

$$p = x+\frac{\partial f}{\partial y}h$$
$$q = y-\frac{\partial f}{\partial x}h$$

setzt. Giebt man in diesen Ausdrücken der Gröfse h alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhält man die Coordinaten aller verschiednen Puncte der Tangente. Da jede gerade Linie die gegebene Curve in n (reellen oder imaginären) Puncten schneidet, so wird die Tangente die gegebene Curve aufser den beiden im *Berührungspuncte* zusammenfallenden Puncten noch in $n-2$ andern Puncten *schneiden*. Für alle Puncte, welche die Tangente mit der Curve gemein hat, mufs die Gleichung

$$f(p, q, z) = f\left(x+\frac{\partial f}{\partial y}h,\ y-\frac{\partial f}{\partial x}h,\ z\right) = 0$$

Statt finden. Man setze der Kürze halber

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = b,\quad \frac{\partial f}{\partial z} = c,$$

und

$$f(x+bh,\ y-ah,\ z) = u_2h^2+u_3h^3+\cdots+u_nh^n,$$

indem die ersten beiden Glieder wegen der Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0,\quad b\frac{\partial f}{\partial x}-a\frac{df}{\partial y} = 0$$

verschwinden. Die Gleichung, deren Wurzeln die $n-2$ Werthe von h sind, welche die $n-2$ *Schneidungspuncte* der Tangente mit der Curve geben, wird hienach

$$(3.)\quad 0 = \frac{1}{h^2}f(x+bh,\ y-ah,\ z)$$
$$= u_2+u_3h+u_4h^2+\cdots+u_nh^{n-2},$$

indem man durch die Division mit h^2 die Gleichung von den beiden zusammenfallenden Wurzeln $h = 0$, welche dem Berührungspuncte entsprechen, befreit hat.

Wenn zwei von diesen $n-2$ Wurzeln einander gleich werden, so fallen zwei von den $n-2$ Schneidungspuncten in einen einzigen zusammen, oder es hat in diesem Puncte die Tangente mit der Curve noch zum zweiten Male eine Berührung. Bezeichnet man daher die Bedingungsgleichung, welche zwischen den Coëfficienten u_2, u_3, .. u_n Statt finden mufs, damit die vorstehende Gleichung zwei gleiche Wurzeln habe, wieder, wie oben, mit

$$\Delta(u_2, u_3, \ldots u_n) = 0,$$

so wird dies die Gleichung, welche zwischen den Gröfsen x und y noch aufser der Gleichung der gegebnen Curve, $f(x, y, z) = 0$, Statt finden mufs, damit die in dem Puncte, dessen Coordinaten x und y sind, an die gegebne Curve gelegte Tangente, eine *Doppeltangente* werde.

Wenn man in dem zweiten Theile der Gleichung (3.) yh für h setzt, so kann man den hiedurch erhaltenen Ausdruck auf eine merkwürdige Art umformen, was sogleich zur Erledigung der vorgelegten Aufgabe führt.

Vermöge einer bekannten Eigenschaft der homogenen Functionen hat man

$$xa + yb + zc = nf = 0.$$

Wenn man aus dieser Gleichung für yb seinen Werth $-xa-zc$ entnimmt, und zugleich der Kürze halber

$$1 - ah = A$$

setzt, so erhält man nach und nach,

$$(4.)\quad \begin{cases} y^2u_2 + y^3u_3h + y^4u_4h^2 + \ldots + y^nu_nh^{n-2} \\ = \frac{1}{h^2} f(x+ybh,\ y-yah,\ z) \\ = \frac{1}{h^2} f(x-xah-zch,\ y-yah,\ z) \\ = \frac{1}{h^2} f(xA-zch,\ yA,\ zA+zah) \\ = \frac{A^n}{h^2} f\left(x-\frac{zch}{A},\ y,\ z+\frac{zah}{A}\right). \end{cases}$$

Es sei

$$(5.)\quad f(x-ch,\ y,\ z+ah) = v_2h^2 + v_3h^3 + \ldots + v_nh^n,$$

so wird, wenn man $\frac{zh}{A}$ für h setzt,

$$f\left(x-\frac{zch}{A},\ y,\ z+\frac{zah}{A}\right)=\frac{z^2v_2h^2}{A^2}+\frac{z^3v_3h^3}{A^3}+\dots+\frac{z^nv_nh^n}{A^n},$$

und daher zufolge (4.),

$$(6.)\quad y^2u_2+y^3u_3h+y^4u_4h^2+\dots+y^nu_nh^{n-2}$$
$$=z^2v_2A^{n-2}+z^3v_3A^{n-3}h+z^4v_4A^{n-4}h^2+\dots+z^nv_nh^{n-2}.$$

Es sei der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen, wenn man für A seinen Werth $1-ah$ setzt, und nach den Potenzen von h entwickelt,

$$(7.)\quad z^2\beta_2+z^2\beta_3h+z^2\beta_4h^2+\dots+z^2\beta_nh^{n-2}$$
$$=z^2v_2A^{n-2}+z^3v_3A^{n-3}h+z^4v_4A^{n-4}h^2+\dots+z^nv_nh^{n-2},$$

so wird

$$(8.)\quad y^2u_2+y^3u_3h+y^4u_4h^2+\dots+y^nu_nh^{n-2}$$
$$=z^2\beta_2+z^2\beta_3h+z^2\beta_4h^2+\dots+z^2\beta_nh^{n-2},$$

und daher

$$(9.)\quad y^2u_2=z^2\beta_2,\quad y^3u_3=z^2\beta_3,\quad \dots\quad y^nu_n=z^2\beta_n.$$

Diese Gleichungen geben zuvörderst eine vermittelst der Gleichung der Curve, $f=0$, bewerkstelligte Transformation der Coëfficienten y^iu_i.

Wenn man in der oben gebrauchten identischen Gleichung (2),

$$\Delta(\alpha_0t^{B_0},\ \alpha_1t^{B_1},\ \dots\ \alpha_mt^{B_m})=t^{(m-1)(B_0+B_m)}\Delta(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \dots\ \alpha_m),$$

für die Gröfsen α_i, t, m, B_0, B_m respective u_{i+2}, y, $n-2$, 2, n schreibt, so erhält man die identische Gleichung,

$$\Delta(y^2u_2,\ y^3u_3,\ \dots\ y^nu_n)=y^{(n-3)(n+2)}\Delta(u_2,\ u_3,\ \dots\ u_n).$$

Die Gleichungen (9.) geben ferner

$$\Delta(y^2u_2,\ y^3u_3,\ \dots\ y^nu_n)=\Delta(z^2\beta_2,\ z^2\beta_3,\ \dots\ z^2\beta_n),$$

woraus

$$y^{(n-3)(n+2)}\Delta(u_2,\ u_3,\ \dots u_n)=\Delta(z^2\beta_2,\ z^2\beta_3,\ \dots\ z^2\beta_n)$$

folgt.

Bemerkt man, dafs die Determinante der beiden linearen Functionen von h, $A=1-ah$ und h, die *Einheit* ist, so folgt aus (7.) nach dem Satze 3. die identische Gleichung,

$$\Delta(z^2\beta_2,\ z^2\beta_3,\ \dots\ z^2\beta_n)=\Delta(z^2v_2,\ z^3v_3,\ \dots\ z^nv_n),$$

und daher

$$y^{(n-3)(n+2)}\Delta(u_2,\ u_3,\ \dots\ u_n)=\Delta(z^2v_2,\ z^3v_3,\ \dots\ z^nv_n),$$

oder endlich, da man auch die identische Gleichung

$$\Delta(z^2 v_2,\ z^3 v_3,\ \ldots\ z^n v_n) = z^{(n-3)(n+2)} \Delta(v_2,\ v_3,\ \ldots\ v_n)$$

hat,

$$(10.)\quad y^{(n-3)(n+2)} \Delta(u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n) = z^{(n-3)(n+2)} \Delta(v_2,\ v_3,\ \ldots\ v_n).$$

Da die Gröfsen a, b, c homogene Functionen von x, y, z von derselben, der $(n-1)^{\text{ten}}$, Ordnung sind, so werden die Coëfficienten von h^i in der Entwicklung der Ausdrücke

$$(11.)\quad \begin{cases} \frac{1}{h^2} f(x+bh,\ y-ah,\ z) = u_2 + u_3 h + u_4 h^2 + \cdots + u_n h^{n-2}, \\ \frac{1}{h^2} f(x-ch,\ y,\ z+ah) = v_2 + v_3 h + v_4 h^2 + \cdots + v_n h^{n-2}, \end{cases}$$

oder die Gröfsen u_{i+2} und v_{i+2}, und daher auch die beiden Seiten der Gleichung (10.) homogene Functionen von x, y, z von derselben Ordnung. Denn sie werden aus homogenen Functionen derselben Ordnung auf ähnliche Art gebildet. Dies ergiebt sich auch daraus, dafs die Transformation, durch welche die Gleichungen (9.) und die Gleichung (10.) erhalten werden, darin besteht, dafs man für die homogene Function yb eine andere homogene Function derselben Ordnung, $-(xa+zc)$, setzt, wodurch eine homogene Function von x, y, z nicht aufhört homogen zu sein und von derselben Ordnung bleibt.

Wenn man $z=1$ setzt, so ersieht man aus (10.), dafs die Function

$$y^{(n-3)(n+2)} \Delta(u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n)$$

mittelst der gegebnen Gleichung $f=0$ in die Function $\Delta(v_2, v_3, \ldots v_n)$ verwandelt werden kann. Es kann daher zufolge des Satzes (1.) auch die Function $\Delta(u_2, u_3, \ldots u_n)$ selber in eine andere Δ' verwandelt werden, deren Grad um $(n-3)(n+2)$ Einheiten niedriger ist als der Grad von $\Delta(v_2, v_3, \ldots v_n)$.

Die Anwendung des Satzes 1. setzt voraus, dafs die Glieder der höchsten Dimension in f nicht sämmtlich durch y theilbar seien, oder dafs unter ihnen das Glied x^n nicht fehle. Dies kann aber immer durch eine blofse Änderung der Coordinaten-Achsen bewirkt werden.

Bezeichnet man den Grad von v_{i+2} mit B_i, so zeigt die zweite der Gleichungen (11.), dafs die Zahlen B_0, B_1, .. B_{n-2} eine arithmetische Reihe mit der Differenz $n-2$ bilden, deren erstes und letztes Glied,

$$B_0 = n-2+2(n-1) = 3n-4, \quad B_{n-2} = n(n-1)$$

wird. Substituirt man diese Werthe in die Formel des Satzes 2., indem man

zugleich $m = n - 2$ setzt, so folgt aus diesem Satze, dafs der Ausdruck $\Delta(v_2, v_3, \ldots v_n)$ vom Grade

$$(n-3)(B_0 + B_{n-2}) = (n-3)(n^2+2n-4)$$

ist. Es wird daher Δ' vom Grade

$$(n-3)(n^2+2n-4) - (n-3)(n+2) = (n-3)(n^2+n-6)$$
$$= (n-3)(n+3)(n-2) = (n-2)(n^2-9),$$

oder es kann die Function $\Delta(u_2, u_3, \ldots u_n)$ mittelst der Gleichung $f=0$ in eine andere Δ' verwandelt werden, welche nur auf den Grad $(n-2)(n^2-9)$ steigt. Es kann daher das System der beiden Gleichungen,

$$f = 0, \quad \Delta(u_2, u_3, \ldots u_n) = 0$$

durch das System der beiden Gleichungen $f=0$, $\Delta'=0$, ersetzt werden, von denen die erstere vom Grade n, die letztere vom Grade $(n-2)(n^2-9)$ ist, und jedes System Werthe von x und y, welches das eine System Gleichungen erfüllt, wird auch das andere erfüllen.

Den Gleichungen $f=0$, $\Delta'=0$ genügen im Allgemeinen $n(n-2)(n^2-9)$ Systeme Werthe von x und y. So viel Systeme von Werthen von x und y kann es daher auch nur geben, welche den Gleichungen $f=0$ und $\Delta(u_2, u_3, \ldots u_n) = 0$ genügen, oder der Gleichung $f=0$ genügen und in die Functionen $u_2, u_3, \ldots u_n$ substituirt, denselben solche Werthe geben, dafs die Gleichung

$$0 = u_2 + u_3 h + u_4 h^2 + \ldots + u_n h^{n-2}$$

zwei gleiche Wurzeln erhält. Diese Werthe von x und y sind aber die Coordinaten derjenigen Puncte der gegebnen Curve n^{ten} Grades $(f=0)$, welche die Eigenschaft besitzen, dafs die in ihnen an diese Curve gelegten Tangenten dieselbe noch in einem andern Puncte berühren oder von ihr Doppeltangenten sind, d. h. es sind diese Werthe der Gröfsen x und y die Coordinaten der Berührungspuncte der Curve mit ihren Doppeltangenten. Es erhellt daher aus dem Vorstehenden, dafs diese Puncte die Durchschnittspuncte der gegebnen Curve n^{ten} Grades $(f=0)$ mit einer andern $(\Delta'=0)$ sind, welche im Allgemeinen auf den Grad $(n-2)(n^2-9)$ steigt, und *dafs demnach im Allgemeinen die Anzahl der Berührungspuncte, welche eine Curve n^{ten} Grades mit ihren Doppeltangenten hat, $n(n-2)(n^2-9)$ beträgt.*

Von den sämmtlichen Berührungspuncten der Doppeltangenten gehören aber immer zwei der nämlichen Doppeltangente an, und es ist daher ihre halbe

Anzahl die Anzahl der Doppeltangenten. Es haben also die Curven $n$ten Grades im Allgemeinen

$$\tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$$

Doppeltangenten; was zu beweisen war.

Der vorstehende Beweis beruht ganz auf der merkwürdigen Gleichung (10.), welche ihrerseits wieder aus der Gleichung (4.),

$$f(x+ybh,\ y-yah,\ z) = (1-ah)^n f\left(x-\frac{zch}{1-ah},\ y,\ z+\frac{zah}{1-ah}\right)$$

abgeleitet worden ist. Setzt man

$$A = 1-ah,\quad B = 1-bh,\quad C = 1-ch$$
$$A' = 1+ah,\quad B' = 1+bh,\quad C' = 1+ch,$$

ferner

$$f(x,\ y+ch,\ z-bh) = \varphi(h)$$
$$f(x-ch,\ y,\ z+ah) = \varphi_1(h)$$
$$f(x+bh,\ y-ah,\ z) = \varphi_2(h),$$

so erhält man auf ganz ähnliche Art, wie (4.), die Gleichungen

$$(12.)\quad \begin{cases} \varphi_2(yh) = A^n\varphi_1\left(\frac{zh}{A}\right), & \varphi_1(zh) = A'^n\varphi_2\left(\frac{yh}{A'}\right) \\ \varphi(zh) = B^n\varphi_2\left(\frac{xh}{B}\right), & \varphi_2(xh) = B'^n\varphi\left(\frac{zh}{B'}\right) \\ \varphi_1(xh) = C^n\varphi\left(\frac{yz}{C}\right), & \varphi(yh) = C'^n\varphi_1\left(\frac{xh}{C}\right). \end{cases}$$

Aus der ersten der beiden in der ersten Horizontalreihe befindlichen Formeln ist die Gleichung (10.) hergeleitet worden; dieselbe hätte auch aus der zweiten Formel derselben Horizontalreihe gefunden werden können. Aus den in den beiden andern Horizontalreihen befindlichen Formeln leitet man zwei der Gleichung (10.) ähnliche Gleichungen ab, wobei es wieder gleichgültig ist, welche von den beiden in derselben Horizontalreihe befindlichen Formeln man hiezu anwendet. Die so gefundnen Resultate will ich im folgenden Theorem zusammenstellen:

Es werde mit $\Delta(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m)$ die rationale ganze und homogene Function der Gröfsen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ von der $(2m-2)^{\text{ten}}$ Ordnung bezeichnet, welche, $=0$ gesetzt, die Bedingung giebt, dafs eine Gleichung

$$0 = \alpha_0+\alpha_1 h+\alpha_2 h^2+\ldots+\alpha_m h^m$$

zwei gleiche Wurzeln habe; es sei ferner $f(x, y, z)$ eine rationale ganze

und homogene Function der Gröſsen x, y, z von der n^{ten} Ordnung; endlich setze man

$$\varphi_2(h) = f\left(x+\frac{\partial f}{\partial y}h,\ y-\frac{\partial f}{\partial x}h,\ z\right) = u_2h^2+u_3h^3+\cdot\cdot+u_nh^n$$

$$\varphi_1(h) = f\left(x-\frac{\partial f}{\partial z}h,\ y,\ z+\frac{\partial f}{\partial x}h\right) = v_2h^2+v_3h^3+\cdot\cdot+v_nh^n$$

$$\varphi(h) = f\left(x,\ y+\frac{\partial f}{\partial z}h,\ z-\frac{\partial f}{\partial y}h\right) = w_2h^2+w_3h^3+\cdot\cdot+w_nh^n,$$

$$\Delta(u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n) = \Delta$$
$$\Delta(v_2,\ v_3,\ \ldots\ v_n) = \Delta_1$$
$$\Delta(w_2,\ w_3,\ \ldots\ w_n) = \Delta_2,$$

wo Δ, Δ_1, Δ_2 homogene Functionen von x, y, z von der Ordnung $(n-3)(n^2+2n-4)$ sein werden, so folgen aus der Gleichung $f(x,y,z) = 0$ die Proportionen,

$$(13.)\qquad \Delta:\Delta_1:\Delta_2 = z^{(n-3)(n+2)}:y^{(n-3)(n+2)}:x^{(n-3)(n+2)}.$$

Ich will jetzt an den vorstehenden Beweis noch einige andere Betrachtungen knüpfen, welche dazu geeignet sind, auf die hier angewandte Methode gröſseres Licht zu werfen.

Über die Anzahl der Wendepuncte.

Die vorstehende Untersuchung giebt auch die Anzahl der *Wendepuncte* einer Curve n^{ten} Grades. Wenn nämlich die Gleichung

$$0 = f\left(x+\frac{\partial f}{\partial y}h,\ y-\frac{\partial f}{\partial x}h,\ z\right) = u_2h^2+u_3h^3+\cdot\cdot+u_nh^n,$$

welche zwei Wurzeln $h=0$ hat, noch eine dritte Wurzel $=0$ hat, welches die Bedingung $u_2=0$ erfordert, so entsprechen dieser dreifachen Wurzel *drei* z usammenfallendeDurchschnittspuncte der Tangente und der Curve, oder es wird der Berührungspunct ein *Wendepunct.* Die Werthe von x und y, welche auſser der Gleichung $f=0$ noch die Gleichung $u_2=0$ erfüllen, sind daher die Coordinaten eines Wendepunctes der gegebnen Curve. *Der Grad der Function u_2 kann aber vermittelst der gegebnen Gleichung $f=0$ um zwei Einheiten verringert werden,* wie aus den obigen Formeln erhellt. Man erhält nämlich aus (6.), wenn man darin $h=0$, $A=1$ setzt, die Gleichung

$$y^2u_2 = z^2v_2.$$

In dieser Gleichung sind u_2 und v_2 rationale ganze homogene Functionen der

Gröfsen x, y, z von der Ordnung $n-2+2(n-1) = 3n-4$. Es wird daher, wenn man $z = 1$ setzt, die Function $y^2 u_2$ einer Function v_2 gleich, welche in Bezug auf x und y von einem um 2 Einheiten niedrigeren Grade ist. Zufolge des Satzes 1. kann daher der Grad von u_2 ebenfalls um 2 Einheiten verringert oder u_2 auf eine Function u'_2 vom Grade $3n-6$ gebracht werden. Die Wendepuncte der gegebnen Curve ($f = 0$) sind daher ihre Durchschnittspuncte mit einer Curve ($u'_2 = 0$) vom Grade $3(n-2)$, und *es ist daher die Anzahl der Wendepuncte einer Curve* n^{ten} *Grades im Allgemeinen* $3n(n-2)$; welches die von Hrn. *Plücker* für diese Anzahl gefundne Formel ist.

Es zeigt aber die Formel (6.),

$$y^2u_2+y^3u_3h+y^4u_4h^2+\cdots+y^nu_nh^{n-2} = z^2v_2A^{n-2}+z^3v_3A^{n-3}h+\cdots+z^nv_nh^{n-2},$$

dafs sich auch alle übrigen Functionen u_3, u_4, .. u_n *mittelst der Gleichung* $f = 0$ *auf andere reduciren lassen, deren Grad um 2 Einheiten geringer ist.* Substituirt man nämlich in dieser Formel für A seinen Werth $1-ah$ und setzt die Coëfficienten der einzelnen Potenzen von h einander gleich, so erhält man allgemein $y^m u_m$ gleich einer homogenen Function von x, y, z von derselben Ordnung, welche aber den Factor z^2 enthält. In Bezug auf x und y wird daher der Grad dieser Function um 2 Einheiten niedriger als der Grad von $y^m u_m$, und man kann daher, dem Satz 1. zufolge, auch u_m selber auf eine Function von einem um 2 Einheiten niedrigeren Grade reduciren.

Man erhält aus der vorstehenden Gleichung die folgenden, welche dazu dienen können, die Gröfsen u_m durch die Gröfsen v_m auszudrücken:

$$\begin{aligned}
y^2u_2 &= z^2v_2\\
y^3u &= z^3v_3-(n-2)z^2av_2\\
y^4u_4 &= z^4v_4-(n-3)z^3av_3+\frac{(n-3)(n-2)}{1.2}z^2a^2v_2\\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

und allgemein

$$(14.)\quad y^mu_m = z^mv_m-(n-m+1)z^{m-1}av_{m-1}+\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{1.2}z^{m-2}a^2v_{m-2}$$
$$-\frac{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)}{1.2.3}z^{m-3}a^3v_{m-3}.$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\pm\frac{(n-m+1)(n-m+2)\,..\,(n-2)}{1.2\,..\,(m-2)}z^2a^{m-2}v_2.$$

Die umgekehrten Formeln, mittelst welcher die Functionen v_m durch die Functionen u_m ausgedrückt werden, erhält man aus der Gleichung (12.),

$$\varphi_1(zh) = A'^n \varphi_2\left(\frac{yh}{A'}\right).$$

Zufolge dieser Gleichung erhält man nämlich aus den aus der Gleichung

$$\varphi_2(yh) = A^n \varphi_1\left(\frac{zh}{A}\right)$$

zwischen den Functionen u und v abgeleiteten Relationen die umgekehrten, wenn man die Functionen u_i und v_i und die Gröfsen y und z, so weit sie in diesen Relationen explicite vorkommen, mit einander vertauscht und gleichzeitig $-a$ für a setzt. Man kann ferner in den so erhaltenen Formeln für

$$x,\ a,\ w;\quad y,\ b,\ v;\quad z,\ c,\ u$$

respective

$$y,\ b,\ v;\quad z,\ c,\ u;\quad x,\ a,\ w\ .$$

oder

$$z,\ c,\ u;\quad x,\ a,\ w;\quad y,\ b,\ v$$

setzen, wodurch man alle bezüglich aus den 6 Formeln (12.) folgenden Gleichungen erhält, welche die zu einem der Systeme der Coëfficienten u_m, v_m, w_m gehörenden Gröfsen durch die zu einem der beiden andern gehörenden Gröfsen ausdrücken. Man kann auf diese Weise aus (14.), wenn man der Kürze halber

$$M_i = \frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-m+i)}{1\,.\,2\,.\,.\,i}$$

setzt, die folgenden 6 Gleichungen ableiten:

$$(15.)\begin{cases} y^m u_m = z^m v_m - M_1 z^{m-1} a v_{m-1} + M_2 z^{m-2} a^2 v_{m-2} \ldots \pm M_{m-2} z^2 a^{m-2} v_2 \\ z^m w_m = x^m u_m - M_1 x^{m-1} b u_{m-1} + M_2 x^{m-2} b^2 u_{m-2} \ldots \pm M_{m-2} x^2 b^{m-2} u_2 \\ x^m v_m = y^m w_m - M_1 y^{m-1} c w_{m-1} + M_2 y^{m-2} c^2 w_{m-2} \ldots \pm M_{m-2} y^2 c^{m-2} w_2 \\ z^m v_m = y^m u_m + M_1 y^{m-1} a u_{m-1} + M_2 y^{m-2} a^2 u_{m-2} \ldots + M_{m-2} y^2 a^{m-2} u_2 \\ x^m u_m = z^m w_m + M_1 z^{m-1} b w_{m-1} + M_2 z^{m-2} b^2 w_{m-2} \ldots + M_{m-2} z^2 b^{m-2} w_2 \\ y^m w_m = x^m v_m + M_1 x^{m-1} c v_{m-1} + M_2 x^{m-2} c^2 v_{m-2} \ldots + M_{m-2} x^2 c^{m-2} v_2 \end{cases}$$

Für $m = 2$ ergeben diese Gleichungen:

$$(16.)\qquad u_2 : v_2 : w_2 = z^2 : y^2 : x^2,$$

oder die beiden Gleichungen,

$$y^2 u_2 = z^2 v_2,\quad x^2 u_2 = z^2 w_2,$$

von denen die erste dazu gebraucht worden ist, die Anzahl der Wendepuncte

zu bestimmen, wozu aber auf ganz gleiche Weise auch die andere hätte angewandt werden können.

Über die Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Curven.

Die zur Bestimmung der Anzahl der Doppeltangenten im Vorigen angewandte Methode kann auch dazu dienen, die Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten zu bestimmen, welche man an zwei gegebne algebraische Curven legen kann, ohne dafs man hiezu die Theorie der gegenseitigen Polarität zweier Curven zu Hülfe zu nehmen braucht.

Es seien $\varphi(x, y, z)$ und $f(x, y, z)$ homogene Functionen von x, y, z von der m^{ten} und n^{ten} Ordnung. Bedeuten x und y die Coordinaten eines Punctes und z eine Constante, z. B. die Einheit, so werden

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad f(x, y, z) = 0$$

die Gleichungen zweier Curven m^{ten} und n^{ten} Grades, welche ich der Kürze halber die Curven φ und f nennen will.

Es seien x und y die Coordinaten eines Punctes P der Curve f; setzt man wieder

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = c,$$

so kann man, wie im Vorhergehenden, die Coordinaten p und q der verschiednen Puncte der in P an die Curve f gelegten Tangente durch eine einzige Gröfse h mittelst der Formeln,

$$p = x + bh, \quad q = y - ah$$

bestimmen. Die Werthe von h, welche den Schneidungspuncten dieser Tangente mit der Curve φ entsprechen, werden dann durch die Gleichung

$$\varphi(p, q, z) = \varphi(x + bh, y - ah, z) = 0$$

bestimmt. Die Bedingungsgleichung, welche zwischen den Gröfsen x, y Statt finden mufs, damit diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln h habe, bestimmt diejenigen Puncte P der Curve f, welche die Eigenschaft besitzen, dafs die in ihnen an diese Curve gelegten Tangenten auch die Curve φ berühren. Die Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten, welche man an die Curven f und φ legen kann, wird der Anzahl dieser Puncte gleich.

Es sei

$$\varphi(x + bh, y - ah, z) = u_0 + u_1 h + u_2 h^2 + \cdots + u_m h^m,$$

und es werde wieder die Bedingungsgleichung, welche zwischen den Gröfsen

$u_0, u_1, \ldots u_m$ Statt finden mufs, damit diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln habe, mit

$$\Delta(u_0, u_1, u_2, \ldots u_m) = 0$$

bezeichnet, wo Δ eine homogene Function der Gröfsen $u_0, u_1, \ldots u_m$ von der $(2m-2)^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Diese Function kann vermittelst der zwischen den Gröfsen x und y Statt findenden Gleichung $f(x, y, z)$ auf einen niedrigeren Grad gebracht werden; wie aus den folgenden Betrachtungen erhellt.

Da

$$xa+yb+zc = nf = 0,$$

so wird, wenn man wieder $A = 1-ah$ setzt,

$$\begin{aligned} &\varphi(x+ybh, y-yah, z) \\ &= \varphi(x-xah-zch, y-yah, z) \\ &= \varphi(xA-zch, yA, zA+zah) \\ &= A^m\varphi\left(x-\frac{zch}{A}, y, z+\frac{zah}{A}\right). \end{aligned}$$

Setzt man daher

$$\varphi(x-ch, y, z+ah) = v_0+v_1h+v_2h^2+\cdots+v_mh^m,$$

so mufs dasselbe Resultat erhalten werden, wenn man hierin $\frac{zh}{A}$ für h setzt und mit A^m multiplicirt, oder, wenn man in dem Ausdrucke

$$\varphi(x+bh, y-ah, z) = u_0+u_1h+u_2h^2+\cdots+u_mh^m$$

yh für y setzt. Man erhält hieraus die Gleichung

$$\begin{aligned} &u_0+yu_1h+y^2u_2h^2+\cdots+y^mu_mh^m \\ &= v_0A^m+zv_1A^{m-1}h+z^2v_2A^{m-2}h^2+\cdots+z^mv_mh^m. \end{aligned}$$

Es werde der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen, wenn man für A seinen Werth $1-ah$ substituirt und nach den Potenzen von h entwickelt,

$$\begin{aligned} (17.)\quad &\beta_0+\beta_1h+\beta_2h^2+\cdots+\beta_mh^m \\ &= v_0A^m+zv_1A^{m-1}h+z^2v_2A^{m-2}h^2+\cdots+z^mv_mh^m, \end{aligned}$$

so hat man

$$(18.)\quad u_0 = \beta_0,\; yu_1 = \beta_1,\; y^2u_2 = \beta_2, \ldots y^mu_m = \beta_m.$$

Zufolge des Satzes 3. erhält man ferner aus (17.) die identische Gleichung,

$$\begin{aligned} &\Delta(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m), \\ &= \Delta(v_0, zv_1, z^2v_2, \ldots z^mv_m), \end{aligned}$$

und wegen (18.),

$$\Delta(\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_m)$$
$$= \Delta(u_0,\ y u_1,\ y^2 u_2,\ \ldots\ y^m u_m).$$

Aus dem Satze 2. folgen aber, wenn man darin für die beiden lineären Functionen von h die Ausdrücke 1 und zh oder 1 und yh, deren Determinanten respective z und y sind, annimmt, die identischen Gleichungen,

$$\Delta(v_0,\ z v_1,\ z^2 v_2,\ \ldots\ z^m v_m) = z^{m(m-1)}\Delta(v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_m)$$
$$\Delta(u_0,\ y u_1,\ y^2 u_2,\ \ldots\ y^m u_m) = y^{m(m-1)}\Delta(u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_m).$$

Es wird daher

$$(19.)\qquad \Delta(\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_m)$$
$$= z^{mm-m}\Delta(v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_m)$$
$$= y^{mm-m}\Delta(u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_m).$$

Die beiden Ausdrücke rechts sind homogene Functionen von x, y, z von derselben Ordnung. Setzt man daher $z = 1$, so zeigt die Formel (19.), dafs man mittelst der Gleichung $f = 0$ die Function

$$y^{mm-m}\Delta(u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_m)$$

in die Function

$$\Delta(v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_m)$$

verwandeln kann. Man kann daher, dem Satz 1. zufolge, die Function

$$\Delta(u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_m)$$

selber mittelst der Gleichung $f = 0$ in eine andere rationale ganze Function Δ' verwandeln, deren Grad um $mm-m$ niedriger als der Grad von $\Delta(v_0,\ v_1,\ \ldots\ v_m)$ ist.

Nennt man B_i den Grad von v_i, so bilden die Zahlen B_0, B_1, B_2, ... B_m eine arithmetische Reihe und es wird

$$B_0 = m,\quad B_m = m(n-1).$$

Es wird daher zufolge des Satzes 2. die Function $\Delta(v_0,\ v_1,\ \ldots\ v_m)$ auf den Grad

$$(m-1)(B_0+B_m) = mn(m-1)$$

steigen, und also die Function Δ', in welche man Δ mittelst der Gleichung $f = 0$ verwandeln kann, auf den Grad

$$mn(m-1)-m(m-1) = m(m-1)(n-1).$$

Die Puncte P der Curve f, welche die Eigenschaft besitzen, dafs die in ihnen

an die Curve f gelegten Tangenten auch die Curve φ berühren, sind daher die Durchschnittspuncte der Curve f vom n^{ten} Grade mit einer Curve vom Grade $m(m-1)(n-1)$, deren Gleichung $\Delta'=0$ ist, und es wird daher die Anzahl dieser Puncte oder die Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten, welche man an die beiden Curven f und φ legen kann, im Allgemeinen

$$mn(m-1)(n-1).$$

Dieses ist genau die Anzahl, welche sich durch die Betrachtung der Polarcurven ergiebt. Nennt man nämlich f' und φ' die Polarcurven von f und φ, so entspricht jeder gemeinschaftlichen Tangente von f und φ ein Durchschnittspunct von f' und φ'. Diese Curven sind aber respective vom Grade $n(n-1)$ und $m(m-1)$, und es ist daher die Anzahl ihrer Durchschnittspuncte im Allgemeinen $m(m-1).n(n-1)$, welches daher auch die Anzahl der gemeinschaftlichen Tangenten der Curven f und φ sein mufs.

Königsberg, den 30ten December 1849.

Für Ihre Mittheilung des Beweises von den Doppeltangenten mufs ich Ihnen auch insofern dankbar sein, als ich mich dadurch aufgefordert fühlte, einen letzten Versuch zu machen, die Curve zu bestimmen, welche durch die Berührungspuncte der Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung hindurchgeht, befreit von allen überflüssigen Termen. Dafs eine solche existirt, wufste ich vorher, denn ich kann 7 Kegelschnitte angeben, welche durch sämmtliche Berührungspuncte hindurchgehen, nicht auf die Weise, wie der unrichtige *Plücker*sche Satz über die Kegelschnitte, welche die Curve in den Berührungspuncten schneiden sollen, vermuthen liefse, sondern auf eine ganz andere Art, die ich wegen ihrer Weitläuftigkeit hier nicht angeben kann. Der Versuch gelang und folgendes ist das Resultat: $u=0$ sei die Gleichung der Curve 4ter Ordnung. Δ die Determinante der Function u, zusammengesetzt aus ihren 2ten Differentialquotienten u_{11}, u_{22}, ... Es seien ferner Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_{11}, Δ_{22}, ... die ersten und zweiten partiellen Differentialquotienten von Δ. *Setzt man nun*

$$\begin{aligned} v_{11} &= u_{22}u_{33}-u_{23}^2 & v_{23} &= u_{13}u_{12}-u_{11}u_{23} \\ v_{22} &= u_{33}u_{11}-u_{13}^2 & v_{31} &= u_{21}u_{23}-u_{22}u_{31} \\ v_{33} &= u_{11}u_{22}-u_{12}^2 & v_{12} &= u_{32}u_{31}-u_{33}u_{12}, \end{aligned}$$

so ist die gesuchte Gleichung vom 14ten Grade folgende:

$$\begin{aligned} &\{\Delta_1^2 v_{11}+\Delta_2^2 v_{22}+\Delta_3^2 v_{33}+2\Delta_2\Delta_3 v_{23}+2\Delta_3\Delta_1 v_{31}+2\Delta_1\Delta_2 v_{12}\} \\ -3\Delta&\{\Delta_{11}v_{11}+\Delta_{22}v_{22}+\Delta_{33}v_{33}+2\Delta_{23}v_{23}+2\Delta_{31}v_{31}+2\Delta_{12}v_{12}\}=0. \end{aligned}$$

Zum neuen Jahre den aufrichtigsten Glückwunsch Ihres ergebenen Schülers

Otto Hesse.

11.

Extraits de lettres de M. Ch. Hermite sur différents objets de la théorie des nombres.

Première lettre.

Près de deux années se sont écoulées, sans que j'aie encore répondu à la lettre pleine de bonté, que Vous m'avez fait l'honneur de m'écrire *). Aujourd'hui, je viens Vous supplier de me pardonner ma longue négligence, et Vous exprimer toute la joie, que j'ai ressentie en me voyant une place dans le recueil de Vos oeuvres. Depuis long-temps éloigné du travail, j'ai été bien touché d'un tel témoignage de Votre bienveillance; permettez-moi, Monsieur, de croire qu'elle ne m'abandonnera pas; elle me devient encore en quelque sorte d'un plus grand prix, en me sentant, après un long intervalle ramené de nouveau à l'étude, sur la voie de quelques unes de vos pensées.

J'ai cru voir l'origine de belles et importantes questions d'analyse dans cette partie de Votre mémoire: „De functionibus quadrupliciter periodicis etc." où Vous établissez l'impossibilité d'une fonction à trois périodes imaginaires. L'algorithme si singulier, par lequel Vous réduisez à un degré de petitesse arbitraire les deux expressions

$$ma+m'a'+m''a'', \qquad mb+m'b'+m''b'',$$

n'est-il pas le premier exemple d'un mode nouveau d'approximation, où les principales questions de la théorie des fractions continues, viennent se représenter, sous un point de vue plus étendu?

Par exemple, étant données deux irrationnelles A, B, on pourra déterminer lorsqu'elle existe, toute relation linéaire telle que:

$$Aa+Bb+c = 0$$

où a, b, c, sont entiers. Qu'on prenne en effet,

$$mA-m' = \alpha, \qquad mB-m'' = \beta,$$

*) Cette lettre imprimée dans le Journal de M. *Liouville* vol. XI page 97 et dans le premier volume des „Opuscula Mathematica" page 357 porte la date du 6 août 1845. *J.*

α et β pourront devenir aussi petits que l'on voudra, d'ailleurs on en conclura:

$$a\alpha + b\beta = m(Aa + Bb) - am' - bm'' = -(am' + bm'' + cm).$$

Le second membre de cette égalité est un nombre entier, donc $a\alpha + b\beta$ ne pourra diminuer au delà de l'unité sans se réduire à zéro. Ainsi le calcul des nombres, m, m', m'', poussé à cette limite, il n'y aura plus qu'à convertir $\frac{\beta}{\alpha}$ en fraction continue pour obtenir la relation cherchée.

Cherchant à appliquer le nouvel algorithme, aux irrationnelles, définies par des équations du 3ᵉ degré à coefficients entiers, j'ai vu s'offrir quelques questions d'une grande étendue auxquelles je me suis principalement appliqué, et qui m'ont amené à considérer la méthode d'approximation que je me proposais d'étudier, sous un point de vue bien éloigné de son origine. C'est dans quelques propriétés très élémentaires des formes quadratiques à un nombre quelconque de variables, que j'ai rencontré les principes d'analyse dont je Vous demande la permission de Vous entretenir.

J'ai tiré de ces principes une démonstration de Votre beau théorème sur la décomposition des nombres premiers $5m + 1$, en quatre facteurs complexes, formés des racines cinquièmes de l'unité. Je ne sais, Monsieur, s'il me sera donné de Vous suivre dans les nouvelles régions de l'Arithmétique transcendante, dont Vous avez ainsi ouvert la voie. Jusqu'ici, j'ai eu plutôt en vue dans cette recherche, l'application qui s'offre d'elle-même à la théorie de la division des fonctions Abéliennes dépendante de l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^5)}}$. Peut-être, d'ailleurs, trouvera-t-on là, des éléments nouveaux, pour cette question si difficile des lois de réciprocité des résidus de 5ᵉ puissance, sur laquelle Vous avez le premier appelé l'attention des géomètres.

Tout polynome homogène du second degré à $n + 1$ variables,

$$f(x_0, x_1, \ldots x_n),$$

peut être mis sous la forme:

$$f = \tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_0}x + \tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_1} + \cdots + \tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_n}x_n.$$

Si l'on pose:

$$\tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_0} = X_0, \quad \tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_1} = X_1, \quad \ldots \quad \tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_n} = X_n,$$

en nommant D le déterminant relatif à ce système d'équations linéaires, la substitution des variables X_0, X_1, ... X_n, conduira à un nouveau polynome

que je représenterai ainsi, savoir:

$$\frac{F(X_0, X_1, \ldots X_n)}{D}.$$

Cela étant, je nommerai D, le déterminant de f, et F, la forme adjointe à f; on trouve ensuite aisément, *que la forme adjointe à F, sera: $D^{n-1}f$.*

La notion des formes adjointes donne le théorème suivant:

Si la forme f, à $n+1$ variables $x_0, x_1, \ldots x_n$, se change par la substitution:

$$\begin{array}{l} \alpha y_0+\alpha' y_1+\alpha'' y_2+\cdots+\alpha^{(n-1)} y_{n-1}-x_0 = 0 \\ \beta y_0+\beta' y_1+\beta'' y_2+\cdots+\beta^{(n-1)} y_{n-1}-x_1 = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda y_0+\lambda' y_1+\lambda'' y_2+\cdots+\lambda^{(n-1)} y_{n-1}-x_n = 0 \end{array}$$

en la forme g, qui n'en renferme plus que n, le déterminant relatif à g, s'obtiendra par la forme adjointe F, en donnant aux variables $X_0, X_1, \ldots X_n$ respectivement, les valeurs représentées par les coefficients des termes $x_0, x_1, \ldots x_n$ dans le déterminant de la substitution, ces derniers termes étant regardés comme une $(n+1)^{\text{ième}}$ colonne de coefficients.

Un autre théorème essentiel, dans mon analyse, se fond sur la proposition aisée à démontrer, qu'étant donnée une forme binaire (a, b, a') de déterminant négatif $-D$ et dont les coefficients ne sont plus entiers, mais des quantités quelconques, l'on peut toujours trouver deux nombres entiers premiers entre eux, α, β, tels qu'on ait:

$$a\alpha^2+2b\alpha\beta+a'\beta^2 < \sqrt{(\tfrac{4}{3}D)}.$$

Quant aux formes de déterminant positif D, on obtient dans touts les cas la limite inférieure:

$$a\alpha^2+2b\alpha\beta+a'\beta^2 < \sqrt{D}.$$

Soit actuellement $f(x_0, x_1, \ldots x_n)$ une forme quelconque à $n+1$ variables, dont les coefficients soient entiers ou irrationnels, et dont le déterminant soit D en valeur absolue, *je dis qu'on pourra toujours trouver $n+1$ nombres entiers, α, β, γ, $\ldots$ λ, tels qu'on ait:*

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda) < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n}\sqrt[n+1]{D}.$$

Supposons que ce théorème soit vrai pour les formes de n variables, on pourra démontrer qu'il est vrai aussi pour les formes de $n+1$ variables, il sera donc vrai en général puisqu'il a lieu pour les formes binaires. Cette

démonstration se base sur le lemme,

que l'on peut toujours déterminer n colonnes de $n+1$ nombres entiers telles qu'en ajoutant une $(n+1)^{\text{ième}}$ colonne et formant le déterminant, les coefficients multipliés dans ce déterminant par les différents termes de la $(n+1)^{\text{ième}}$ colonne, soient des nombres entiers donnés.

En effet, étant proposés $n+1$ nombres entiers quelconques,

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots\ \varkappa,\ \lambda,$$

déterminons $a, b, c, \ldots k$ d'une part, $c', d', \ldots k'$ de l'autre, par les équations:

$$a\beta-b\alpha=\pi_1,\quad c'\gamma-c\pi_1=\pi_2,\quad \ldots\quad k'\varkappa-k\pi_{n-2}=\pi_{n-1},$$

où π_1 désigne le p. g. c. d. de α et β, π_2 le p. g. c. d. de γ et π_1, ... π_{n-1} le p. g. c. d. de π_{n-2} et $\varkappa$, on saura prouver *que le déterminant du système:*

$$\begin{array}{llllllll}
(0) & \frac{\beta}{\pi_1} & \frac{b\gamma}{\pi_2} & \frac{bc\delta}{\pi_3} & \frac{bcd\varepsilon}{\pi_4} & \ldots & bcd\ldots k.\lambda \\
(1) & -\frac{\alpha}{\pi_1} & -\frac{a\gamma}{\pi_2} & -\frac{ac\delta}{\pi_3} & -\frac{acd\varepsilon}{\pi_4} & \ldots & -acd\ldots k.\lambda \\
(2) & 0 & \frac{\pi_1}{\pi_2} & \frac{c'\delta}{\pi_3} & \frac{c'd\varepsilon}{\pi_4} & \ldots & c'd\ldots k.\lambda \\
(3) & 0 & 0 & -\frac{\pi_2}{\pi_3} & -\frac{d'\varepsilon}{\pi_4} & \ldots & -d'\ldots k.\lambda \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
(n) & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (-1)^n\pi_{n-1},
\end{array}$$

est:

$$\alpha(0)+\beta(1)+\gamma(2)+\cdots+\lambda(n).$$

Ce lemme joint au théorème ci-dessus fait voir que *si l'on déduit d'une forme f de $n+1$ variables une autre f_0 de n variables, en substituant aux $n+1$ variables des fonctions linéaires de n variables affectées de coefficients entiers, on pourra choisir ces fonctions à substituer de manière que le déterminant de f_0 devienne*

$$F(\alpha, \beta, \ldots \lambda),$$

F étant la forme adjointe de f et $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ des entiers donnés à l'arbitraire.

L'adjointe de F étant $D^{n-1}f$, on pourra donc aussi déduire de F une forme de n variables F_0 dont le déterminant sera

$$D^{n-1}f(\alpha, \beta, \ldots \lambda),$$

$\alpha, \beta, \ldots \lambda$ étant des entiers donnés quelconques. Donc, dans l'hypothèse

admise pour des formes de n variables, la forme F_0 et par suite la forme F elle même, pourra prendre une valeur moindre que

$$(\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}(n-1)}\sqrt[n]{(D^{n-1}f(\alpha,\beta,\ldots\lambda))},$$

valeur que je désignerai par $F(\alpha_0,\beta_0,\ldots\lambda_0)$. On prouve de la même manière que f pourra prendre une valeur moindre que

$$(\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}(n-1)}\sqrt[n]{F(\alpha_0,\beta_0,\ldots\lambda_0)},$$

valeur que je désignerai par $f(\alpha',\beta',\ldots\lambda')$. On aura donc

$$f(\alpha',\beta',\ldots\lambda') < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}(n-1)}\sqrt[n]{F(\alpha_0,\beta_0,\ldots\lambda_0)}$$

$$F(\alpha_0,\beta_0,\ldots\lambda_0) < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}(n-1)}\sqrt[n]{(D^{n-1}f(\alpha,\beta,\ldots\lambda))},$$

et par suite

$$f(\alpha',\beta',\ldots\lambda') < (\tfrac{4}{3})^{\frac{n^2-1}{2n}}\sqrt[n^2]{(D^{n-1}f(\alpha,\beta,\ldots\lambda))}.$$

En continuant de la même manière et en posant

$$f(\alpha^{(i)},\beta^{(i)},\ldots\lambda^{(i)}) = f^{(i)},\qquad f(\alpha,\beta,\ldots\lambda) = f^{(0)}$$

$$(\tfrac{4}{3})^{\frac{n^2-1}{2n}}\sqrt[n^2]{D^{n-1}} = l,$$

on trouvera successivement

$$f' < l\sqrt[n^2]{f^{(0)}},\quad f'' < l\sqrt[n^2]{f'},\quad \ldots\quad f^{(m)} < l\sqrt[n^2]{f^{(m-1)}},$$

d'où suit

$$f^{(m)} < l^{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\cdots+\frac{1}{n^{2(m-1)}}}\sqrt[n^{2m}]{f^{(0)}}.$$

On pourra donc, en prenant m assez grand, parvenir à une valeur de f,

$$f^{(m)} < l^{\frac{n^2}{n^2-1}}\quad\text{ou}\quad f^{(m)} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n}\sqrt[n+1]{D},$$

ce qu'il fallait démontrer.

De nombreuses questions me semblent dépendre des résultats précédents. Voici en premier lieu comment j'ai essayé d'y ramener Votre nouveau mode d'approximation.

A et B étant les quantités données, je considère la forme ternaire

$$f = (x'-Ax)^2+(x''-Bx)^2+\frac{x^2}{\Delta},$$

dont le déterminant est une quantité positive quelconque $\frac{1}{\Delta}$. Pour toutes les valeurs de Δ, on saura déterminer trois nombres entiers, m, m', m'', tels qu'on ait:

$$(m'-Am)^2+(m''-Bm)^2+\frac{m^2}{\Delta} < \tfrac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta}},$$

et par suite:

$$m'-Am<\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{\Delta}},\quad m''-Bm<\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{\Delta}},\quad m<\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\Delta}.$$

Les deux premières relations font voir qu'on peut rendre simultanément d'un degré de petitesse arbitraire, $m'-Am$, $m''-Bm$, la troisième donne la mesure précise de l'ordre d'approximation des fractions $\frac{m'}{m}$, $\frac{m''}{m}$, en montrant que l'erreur est proportionnelle à $\frac{1}{m\sqrt{m}}$. Enfin la forme adjointe de f, étant:

$$(x+Ax'+Bx'')^2+\frac{x'^2+x''^2}{\Delta},$$

le calcul conduit encore à une suite de nombres entiers, tels que α, β, γ, qui rendent la fonction linéaire $A\alpha+B\beta+\gamma$, de l'ordre $\frac{1}{\alpha^2}$ ou $\frac{1}{\beta^2}$, et on démontre que s'il existe une relation telle que: $Aa+Bb+c=0$, a, b, c étant entiers, on verra la fonction $Aa+Bb+c$, s'offrir nécessairement à partir d'un certaine valeur de Δ, puis se reproduire indéfiniment, pour toutes les valeurs plus grandes.

Voici d'autres conséquences.

Soit

$$F(x)=x^n+Ax^{n-1}+\cdot\cdot+Kx+L=0$$

une équation quelconque irréductible à coefficients entiers et dont α, β, .. λ soient les racines; si la congruence $F(x)\equiv 0$ admet une solution $x\equiv a$ pour un certain module N, en posant:

$$\varphi(\alpha)=Nx_0+(\alpha-a)x_1+(\alpha^2-a^2)x_2+\cdot\cdot+(\alpha^{n-1}-a^{n-1})x_{n-1},$$

x_0, x_1 etc. désignant des entiers, la forme

$$\mathfrak{f}=\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\,..\,\varphi(\lambda)$$

représentera toujours des nombres entiers multiples de N: or je dis qu'on pourra trouver une infinité de systèmes de valeurs de x_0, x_1, .. x_{r-1} pour lesquelles on ait

$$\mathfrak{f}=M.N,$$

l'entier M étant au dessous de la limite,

$$(\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{4}n(n-1)}\left(\frac{\Delta}{n^n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

dans laquelle Δ représente le produit des $n(n-1)$ différences des racines α, β, .. λ prises deux à deux.

Supposons en premier lieu les racines $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ réelles, je considère la forme quadratique à n variables:

$$f = D_0\varphi^2(\alpha) + D_1\varphi^2(\beta) + \cdots + D_{n-1}\varphi^2(\lambda)$$

où $D_0, D_1, \ldots D_{n-1}$ sont essentiellement positifs: soit D, le déterminant de f, on saura trouver pour $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$, un système de valeurs entières telles qu'on ait:

$$f = \omega\left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}\sqrt[n]{D},$$

ω étant moindre que l'unité. Or le produit des quantités positives $D_0\varphi^2\alpha$, $D_1\varphi^2\beta$ etc. ne pourra jamais dépasser son maximum $\left(\frac{f}{n}\right)^n$, correspondant au cas où elles sont toutes égales, on aura donc:

$$D_0 D_1 \ldots D_{n-1} f^2 < \left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{D}{n^n}.$$

Il faut ici obtenir D, qui est le déterminant relatif au système des équations linéaires dont les premiers membres seraient:

$$\tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_0}, \quad \tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_1}, \quad \ldots \quad \tfrac{1}{2}\frac{df}{dx_{n-1}}.$$

Or on trouve sans difficulté:

$$D = \Delta . D_0 D_1 \ldots D_{n-1} . N^2,$$

ce qui conduit à la limite annoncée.

Comme il ne reste dans le résultat aucune trace des quantités, D_0, $D_1, \ldots D_{n-1}$, il suit qu'en leur attribuant toutes les valeurs possibles, *les mêmes multiples de N se reproduiront nécessairement une infinité de fois, pour une infinité de systèmes de valeurs distinctes de* $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$.

Si l'équation proposée, $F(x) = 0$, n'a plus toutes ses racines réelles, on fera correspondre dans la forme f, à chaque couple de racines conjuguées α, β, le produit $D_0\varphi(\alpha)\varphi(\beta)$, au lieu de $D_0\varphi^2(\alpha) + D_1\varphi^2(\beta)$. Dans le cas où toutes les racines seraient imaginaires, ce qui suppose le degré un nombre pair $n = 2\mu$, on sera conduit de la sorte à la forme

$$f = D_0\varphi(\alpha)\varphi(\beta) + D_1\varphi(\gamma)\varphi(\delta) + \cdots + D_{\mu-1}\varphi(\varkappa)\varphi(\lambda).$$

Le déterminant s'obtient aussi dans ce cas aisément, et l'on trouve:

$$D = (D_0 D_1 \ldots D_{\mu-1})^2 \cdot \frac{\Delta}{2^n} \cdot N^2.$$

Comme on a d'ailleurs:

$$D_0 D_1 \ldots D_{\mu-1}\mathfrak{f} < \left(\frac{f}{\mu}\right)^{\mu}$$

et

$$f = \omega\left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}\sqrt[n]{D},$$

on en tire la limite:

$$M < \left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\left(\frac{\Delta}{n^n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

qui ne diffère pas de celle que nous venons d'obtenir dans le cas des racines réelles.

Supposons que l'équation proposée soit:

$$\frac{x^p-1}{x-1} = 0,$$

qui donne lieu à une congruence soluble pour tout module premier $N = kp+1$. Δ sera alors: p^{p-2}. Ainsi dans le cas de $p=5$, on aura la limite

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{2}\left(\frac{5^{2}}{4^{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

laquelle est >1 mais <2, donc on aura précisément

$$\mathfrak{f} = N.$$

C'est, comme Vous voyez, Monsieur, la démonstration de Votre théorème.

Mais il y a plus. Prenant $p=7$, on trouve l'expression

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{15}{2}}\left(\frac{7^{5}}{6^{6}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

qui est moindre que 6. Or la forme $\mathfrak{f}$ étant toujours $\equiv 0$ ou 1 suivant le module 7, on ne pourra avoir encore dans ce cas que $\mathfrak{f} = N$.

Considérons, en second lieu, l'équation $F(z)=0$, qui a pour racines les $\frac{1}{2}(p-1)$ périodes de deux racines de $\dfrac{x^p-1}{x-1}=0$, on aura la proposition que la congruence $F(z)\equiv 0$ est resoluble pour tout module premier $N=kp-1$. On trouvera alors: $\Delta = p^{\frac{1}{2}(p-3)}$, d'où l'on tirera comme ci-dessus la limite de M. Dans le cas de $p=7$, $n=3$, il vient:

$$M < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{7^{2}}{3^{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et par suite $M<3$. Or il est facile de voir que suivant le module 7 la forme $\mathfrak{f}$ est toujours $\equiv 0, 1$, ou -1. On ne peut donc admettre que $M=1$.

De là résulte ce théorème,

que tout nombre premier $7m-1$, *est décomposable en trois facteurs complexes formés des racines de l'équation:*

$$z^3+z^2-2z-1=0.$$

En réfléchissant aux questions précédentes, j'ai été conduit à m'occuper de la théorie de la *réduction* des formes quadratiques à un nombre quelconque de variables, qui m'a semblé devoir être introduite dans l'étude des expressions telles que f. De même que pour les formes binaires, on obtient ce résultat que pour un déterminant donné, elles se laissent distribuer en un nombre toujours fini de classes. La méthode de réduction devra reposer encore sur l'emploi de substitutions linéaires à coefficients entiers, et au déterminant ± 1, par lesquelles une forme donnée est changée en une autre entièrement équivalente et de même déterminant. Voici quelques réflexions sur ce sujet.

Soient d'abord

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha X_0+\alpha' X_1+\alpha'' X_2+\,.\,.+\alpha^{(n)}X_n \\ x_1 &= \beta X_0+\beta' X_1+\beta'' X_2+\,.\,.+\beta^{(n)}X_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \lambda X_0+\lambda' X_1+\lambda'' X_2+\,.\,.+\lambda^{(n)}X_n \end{aligned}$$

les substitutions qui changent $f(x_0, x_1, .. x_n)$ en la forme équivalente et de même déterminant $F(X_0, X_1, .. X_n)$. Nommons

$$g(y_0, y_1, .. y_n), \qquad G(Y_0, Y_1, .. Y_n),$$

les formes adjointes respectivement à f et F, par la définition même donnée ci-dessus des formes adjointes, on prouve très facilement que l'on aura:

$$g(y_0, y_1, .. y_n) = G(Y_0, Y_1, Y_n),$$

en posant:

$$\begin{aligned} Y_0 &= \alpha y_0+\beta y_1+\,.\,.+\lambda y_n \\ Y_1 &= \alpha' y_0+\beta' y_1+\,.\,.+\lambda' y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n &= \alpha^{(n)} y_0+\beta^{(n)} y_1+\,.\,.+\lambda^{(n)} y_n. \end{aligned}$$

Il suit de cette proposition que si dans la forme f l'on change seulement les n variables $x_1, x_2, .. x_n$ en d'autres $X_1, X_2, .. X_n$, pour obtenir la transformation correspondante de la forme adjointe, on aura à changer seulement les n variables $y_1, y_2, .. y_n$ en d'autres $Y_1, Y_2, .. Y_n$, et réciproquement. D'où l'on voit *qu'en changeant dans la forme adjointe les* n *variables* $y_1, y_2, .. y_n$ *en d'autres* $Y_1, Y_2, .. Y_n$, *par la transfor-*

mation correspondante de la forme proposée, le coefficient de x_0^2 ne sera pas altéré.

Changeant au contraire, dans la forme proposée, la seule variable x_0 en X par la substitution,

$$x_0 = X + \alpha' x_1 + \alpha'' x_2 + \ldots \alpha^{(n)} x_n,$$

les substitutions correspondantes à faire dans la forme adjointe seront,

$$y_1 = Y_1 - \alpha' y_0, \quad y_2 = Y_2 - \alpha'' y_0, \quad \ldots \quad y_n = Y_n - \alpha^{(n)} y_0.$$

D'où l'on voit *qu'en changeant, dans la forme proposée, la seule variable x_0, par la transformation correspondante de la forme adjointe ne seront altérés que les termes multipliés par* y_0 et y_0^2.

Voici le résultat que j'ai obtenu au moyen de ces lemmes:

„Nommons *réduite* une forme

$$F(X_0, X_1, \ldots X_n),$$

du déterminant D, telle en premier lieu qu'en faisant,

$$\tfrac{1}{2}\frac{dF}{dX_0} = AX_0 + BX_1 + CX_2 + \cdots + LX_n,$$

on ait:

$$A < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n} \sqrt[n+1]{D}, \quad B < \tfrac{1}{2}A, \quad C < \tfrac{1}{2}A, \quad \ldots \quad L < \tfrac{1}{2}A,$$

telle encore que la forme adjointe à F, $G(Y_0, Y_1, \ldots Y_n)$, représente pour $Y_0 = 0$, elle aussi une forme réduite: si l'on sait ramener les formes d'ordre n à des formes équivalentes réduites, on saura aussi ramener à des formes équivalentes réduites, les formes d'ordre $n+1$."

En effet, lorsqu'on se propose de changer la forme donnée f dans une autre équivalente $f_1(x_0', x_1', \ldots x_n')$, au moyen de la substitution,

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha x_0' + \alpha' x_1' \ldots + \alpha^{(n)} x_n' \\ x_1 &= \beta x_0' + \beta' x_1' \ldots + \beta^{(n)} x_n' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \lambda x_0' + \lambda' x_1' \ldots + \lambda^{(n)} x_n', \end{aligned}$$

on peut prendre pour $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ des entiers quelconques sans commun diviseur, puisqu'on sera toujours maître de déterminer les autres nombres $\alpha', \beta', \ldots \lambda'$, α'', β'', etc. de manière que le determinant des $(n+1)^2$ coefficients soit égal à ± 1 *). Prenons donc pour $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ les entiers sans commun diviseur

*) M. *Hermite* avait ajouté à sa lettre la résolution la plus générale de ce problème publiée depuis dans le Journal de M. *Liouville* vol. XIV page 21.

par lesquels on peut satisfaire à l'inégalité

$$f(\alpha, \beta, \ldots \lambda) < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n} \sqrt[n+1]{D},$$

en nommant A le coefficient de $x_0'^2$ dans la transformée f_1, on aura $A = f(\alpha, \beta, \ldots \lambda)$ et, par suite,

$$A < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n} \sqrt[n+1]{D}.$$

La forme $f(x_0, x_1, \ldots x_n)$ étant transformée dans la forme équivalente $f(x_0', x_1', \ldots x_n')$, supposons en même temps la forme adjointe à f, $g(y_0, y_1, \ldots y_n)$ transformée dans l'adjointe à f_1, $g_1(Y_0, y_1', y_2', \ldots y_n')$. Faisons ensuite dans cette dernière $Y_0 = 0$, et ramenons la forme d'ordre n, $g_1(0, y_1', y_2', \ldots y_n')$, à une forme équivalente réduite, aux variables $y_1'', y_2'', \ldots y_n''$. Supposons que par la même substitution la forme $g_1(Y_0, y_1', y_2', \ldots y_n')$ soit changée en $g_2(Y_0, y_1'', y_2'', \ldots y_n'')$, cette forme représentera pour $Y = 0$ la forme réduite d'ordre n. Transformons en même temps la forme $f_1(x_0', x_1', \ldots x_n')$, dont g_1 est l'adjointe, dans la forme $f_2(x_0', X_1, X_2, \ldots X_n)$ dont l'adjointe est g_2. De ce qu'on a remarqué ci-dessus, il suit que par cette dernière transformation le coefficient de $x_0'^2$, A, ne sera pas altéré. Enfin faisons

$$x_0' = X_0 + m_1 X_1 + m_2 X_2 + \ldots m_n X_n$$
$$y_1'' = Y_1 - m_1 Y_0, \quad y_2'' = Y_2 - m_2 Y_0, \quad \ldots \quad y_n'' = Y_n - m_n Y_0,$$

et supposons que par ces substitutions f_2 et g_2 soient changées respectivement en

$$F(X_0, X_1, X_2, \ldots X_n) \quad \text{et} \quad G(Y_0, Y_1, Y_2, \ldots Y_n),$$

le coefficient de X_0^2 dans F sera encore A et la forme G représentera encore pour $Y_0 = 0$ la réduite d'ordre n. Or posant

$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial f_2}{\partial x_0'} = A x_0' + b X_1 + c X_2 \ldots + l X_n$$
$$\tfrac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial X_0} = A X_0 + B X_1 + C X_2 \ldots + L X_n,$$

on aura $\frac{\partial f_2}{\partial x_0'} = \frac{\partial F}{\partial X_0}$ et, par suite,

$$B = b + m_1 A, \; C = c + m_2 A, \; \ldots \; L = l + m_n A.$$

Donc, $m_1, m_2, \ldots m_n$ pouvant être des entiers quelconques, on saura les déterminer de manière qu'on ait

$$B < \tfrac{1}{2} A, \; C < \tfrac{1}{2} A, \; \ldots \; L < \tfrac{1}{2} A,$$

et l'on aura ainsi satisfait à toutes les conditions.

Je remarquerai à présent *qu'étant donnés*

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} \quad \text{et} \quad G(0,\ Y_1,\ Y_2,\ \ldots\ Y_n),$$

en même temps que le déterminant D *de* F, *on connaîtra la forme* $G(Y_0,\ Y_1,\ \ldots\ Y_n)$ *et, par suite,* $F(X_0,\ X_1,\ \ldots\ X_n)$. En effet, soit

$$\begin{aligned} F = {} & X_0(AX_0+BX_1+CX_2+\cdots+LX_n)\\ & +X_1(BX_0+B'X_1+C'X_2+\cdots+L'X_n)\\ & +X_2(CX_0+C'X_1+C''X_2+\cdots+L''X_n)\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +X_n(LX_0+L'X_1+L''X_2+\cdots+L^{(n)}X_n),\\ G = {} & Y_0((A)Y_0+(B)Y_1+\cdots+(L)Y_n)\\ & +Y_1((B)Y_0+(B')Y_1+\cdots+(L')Y_n)\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +Y_n((L)Y_0+(L')Y_1+\cdots+(L^{(n)})Y_n), \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} A(A)+B(B)+C(C)+\cdots+L(L) &= D\\ A(B)+B(B')+C(C')+\cdots+L(L') &= 0\\ A(C)+B(C')+C(C'')+\cdots+L(L'') &= 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A(L)+B(L')+C(L'')+\cdots+L(L^{(n)}) &= 0. \end{aligned}$$

Or étant donnés $\dfrac{\partial F}{\partial X_0}$ et $G(0,\ Y_1,\ \ldots\ Y_n)$, on connaîtra

$$A,\ B,\ C,\ \ldots\ L$$

et touts les n^2 coefficients (B'), (C') etc., d'où l'on déduira par les n dernières équations, les valeurs des coefficients

$$(B),\ (C),\ \ldots\ (L),$$

et par la première, D étant aussi donné, celle du coefficient (A). On connaîtra donc touts les coefficients de $G(Y_0,\ Y_1,\ \ldots\ Y_n)$ et, par suite, ceux de $F(X_0,\ X_1,\ \ldots\ X_n)$.

Par ce qui précède on prouve aisément *que les formes d'un ordre quelconque attachées à un même déterminant, peuvent être ramenées à un nombre fini d'entre elles.* Et d'abord il suit des conditions ci-dessus que les coefficients $A,\ B,\ \ldots\ L$ ne pourront prendre qu'un nombre fini de valeurs, ensuite le déterminant de la forme $G(0,\ Y_1,\ Y_2,\ \ldots\ Y_n)$, étant $D^{n-1}A$, s'il

est démontré que les formes d'ordre n d'un même déterminant peuvent être ramenées à un nombre fini d'entre elles, on n'aura pour chaque valeur de A qu'un nombre limité de formes $G(0, Y_1, Y_2, .. Y_n)$. Or, par les nombres $A, B, .. L$ et la forme $G(0, Y_1, Y_2, .. Y_n)$, étant déterminée la forme d'ordre $n+1$, $F(X_0, X_1, .. X_n)$, ces formes aussi seront en nombre fini. Ainsi la proposition étant admise pour les formes d'ordre n, elle sera démontrée pour les formes d'ordre $n+1$. Elle est donc vraie en général puisqu'elle a lieu pour les formes binaires.

Vous voyez, Monsieur, que j'omets tout-à-fait, le cas important où l'on a $A=0$; mais cette circonstance n'est point à considérer, lorsqu'on se propose seulement de poursuivre les rapports que j'ai essayé d'établir entre les formes quadratiques définies et les expressions désignées ci-dessus par $\mathfrak{f}$. Les résultats précédents me semblent alors ouvrir un vaste champ de recherches, mais dans lequel je n'ai presque fait jusqu'ici qu'entrevoir une longue série de questions et de problèmes difficiles à résoudre.

Convenons d'abord des notations suivantes, savoir:

$$\mathfrak{f} = f(\omega_0) f(\omega_1) .. f(\omega_n),$$

en prenant:

$$f(\omega) = x_0 \varphi_0(\omega) + x_1 \varphi_1(\omega) + \cdots + x_n \varphi_n(\omega),$$

$\varphi_i(\omega)$ désignant la fonction à coefficients entiers:

$$a_i + b_i \omega + c_i \omega^2 + \cdots + l_i \omega^n,$$

et les quantités $\omega_0, \omega_1, .. \omega_n$ étant toujours les racines d'une même équation irréductible à coefficients entiers et dont celui de la plus haute puissance est l'unité. Je considère ensuite (dans le cas où toutes les racines sont réelles), la forme quadratique définie, d'ordre $n+1$,

$$\mathrm{f} = D_0 f^2(\omega_0) + D_1 f^2(\omega_1) + \cdots + D_n f^2(\omega_n),$$

où $D_0, D_1, .. D_n$ sont supposés essentiellement positifs. En nommant Ω le produit des $n(n+1)$ différences des racines ω prises deux à deux, et Δ le déterminant du système:

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & .. & a_n \\ b_0 & b_1 & .. & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_0 & l_1 & .. & l_n, \end{matrix}$$

on trouvera pour le déterminant de f l'expression:

$$D = D_0 D_1 .. D_n \Delta^2 \Omega.$$

Cela posé, faisons la substitution:

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha X_0 + \alpha' X_1 + \,.\,.\, + \alpha^{(n)} X_n \\ x_1 &= \beta X_0 + \beta' X_1 + \,.\,.\, + \beta^{(n)} X_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \lambda X_0 + \lambda' X_1 + \,.\,.\, + \lambda^{(n)} X_n, \end{aligned}$$

les coefficients étant déterminés par la méthode exposée tout-à-l'heure, de manière à réduire la forme adjointe à f. En posant pour abréger:

$$\begin{aligned} \Phi_i(\omega) &= \alpha^{(i)} \varphi_0(\omega) + \beta^{(i)} \varphi_1(\omega) + \cdots + \lambda^{(i)} \varphi_n(\omega) \\ F(\omega) &= X_0 \Phi_0(\omega) + X_1 \Phi_1(\omega) + \cdots + X_n \Phi_n(\omega), \end{aligned}$$

la forme quadratique f deviendra d'une part:

$$\mathrm{F} = D_0 F^2(\omega_0) + D_1 F^2(\omega_1) + \cdots + D_n F^2(\omega_n),$$

et la forme $\mathfrak{f}$, de l'autre:

$$\mathfrak{F} = F(\omega_0) F(\omega_1) \,.\,.\, F(\omega_n).$$

Or voici le dernier résultat auquel je suis arrivé, et qui me parait appeler bien de recherches après lui.

Les substitutions en nombre infini, correspondantes à touts les systèmes possibles de valeurs des quantités D_0, D_1, . . D_n, ne conduiront jamais qu'à un nombre essentiellement limité de formes $\mathfrak{F}$.

De là se tire aussi toute la théorie de la réduction des formes $\mathfrak{f}$.

Je me suis principalement fondé sur la proposition suivante:

Étant donnée une forme quadratique f d'ordre $n+1$, de déterminant D, réduite d'après la méthode ci-dessus, soient

$$(a),\ (a'),\ (a''),\ .\,.\ (a^{(n)})$$

les coefficients des carrés dans la forme adjointe g, on aura d'abord, comme on sait,

$$(a^{(n)}) < \left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}n} \sqrt[n+1]{D},$$

puis pour toutes les valeurs $i = 1, 2, .\,.\, n$:

$$(a^{(n)})^i (a^{(n-i)}) < \mu \sqrt[n+1]{(D^{n(i+1)})},$$

μ étant un facteur numérique dépendant uniquement de n et i.

Je vais prendre les formes *ternaires* pour exemple de la méthode qui donne ce résultat.

Soit $ax_0^2 + 2bx_0x_1 + 2cx_0x_2 +$ etc. la forme réduite donnée et

$$(a)y_0^2 + (a')y_1^2 + (a'')y_2^2 + 2(b)y_0y_1 + 2(c)y_0y_2 + 2(c')y_1y_2$$

son adjointe g, la théorie générale donne en premier lieu les relations:

$$a < (\tfrac{4}{3})\sqrt[3]{D}, \quad b < \tfrac{1}{2}a, \quad c < \tfrac{1}{2}a;$$

ensuite pour $y_0 = 0$, g doit devenir une forme binaire réduite. Cette dernière étant représentée par $(a')y_1^2 + 2(c')y_1y_2 + (a'')y_2^2$, son déterminant, comme on le sait, est aD, on a donc encore:

$$(a'') < \sqrt{(\tfrac{4}{3}aD)}, \quad (a')(a'') < \tfrac{4}{3}aD, \quad (c') < \tfrac{1}{2}(a'').$$

Or des relations:

$$\begin{aligned} a(a) + b(b) + c(c) &= D \\ a(b) + b(a') + c(c') &= 0 \\ a(c) + b(c') + c(a'') &= 0, \end{aligned}$$

on déduit sans difficulté:

$$(c) < \tfrac{3}{4}(a''), \quad (b)(a'') < aD, \quad (c)(a'') < aD.$$

Donc, après avoir multiplié les deux membres de la première équation par $(a'')^2$ et divisé par a, on obtient:

$$(a)(a'')^2 < \tfrac{4}{3}D^2 + aD\sqrt{(\tfrac{4}{3}aD)},$$

et enfin, en remplaçant a par sa limite supérieure:

$$(a)(a'')^2 < \tfrac{28}{9}D^2.$$

La propriété énoncée ci-dessus des formes réduites, qui m'a longtemps échappé, donne lieu à beaucoup d'autres conséquences que je suis forcé d'omettre. Seulement j'observerai encore qu'en prenant pour point de départ g au lieu de f, et nommant $a^{(i)}$ les coefficients des carrés dans cette dernière forme, on serait arrivé pour les formes ternaires aux relations:

$$a'' < \tfrac{4}{3}\sqrt[3]{D}, \quad a'a'' < (\tfrac{4}{3})^2\sqrt[3]{D^2}, \quad aa''^2 < \tfrac{28}{9}D,$$

et on trouverait dans le cas général:

$$a^{(n)} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n}\sqrt[n+1]{D}, \quad a^{(n)^i}a^{(n-i)} < \mu\sqrt[n+1]{D^{i+1}},$$

d'où l'on tire encore:

$$a^{(n)^n}a^{(n-i)} < \nu\,.\,D.$$

Appliquons maintenant ces résultats à la forme quadratique:

$$\mathrm{F} = D_0F'^2(\omega_0) + D_1F'^2(\omega_1) + \cdots + D_nF'^2(\omega_n),$$

dont le déterminant a pour valeur:

$$D = D_0D_1 \ldots D_n\Delta^2\Omega.$$

Il est aisé de voir qu'on aura:

$$a^{(i)} = D_0\Phi_i^2(\omega_0)+D_1\Phi_i^2(\omega_1)+\cdots+D_n\Phi_i^2(\omega_n),$$

donc en premier lieu:

$$D_0D_1\,..\,D_n.\Phi_n^2(\omega_0)\Phi_n^2(\omega_1)\,..\,\Phi_n^2(\omega_n) < a^{(n)^{n+1}},$$

d'où:

$$\Phi_n(\omega_0)\Phi_n(\omega_1)\,..\,\Phi_n(\omega_n) < \mu.\Delta\Omega^{\frac{1}{2}},$$

ce qui reproduit une conséquence obtenue précédemment. Secondement, faisons abstraction dans $a^{(n)}$, du terme $D_k\Phi_n^2(\omega_k)$, il est clair qu'on aura:

$$D_0D_1\,..\,D_{k-1}D_{k+1}\,..\,D_n.\Phi_n^2(\omega_0)\Phi_n^2(\omega_1)\,..\,\Phi_n^2(\omega_{k-1})\Phi_n^2(\omega_{k+1})\,..\,\Phi_n(\omega_n) < (a^{(n)})^n,$$

donc combinant cette inégalité avec la suivante:

$$D_k\Phi_i^2(\omega_k) < a^{(i)},$$

et posant pour abréger:

$$\Psi_i(\omega_k) = \Phi_i(\omega_k).\Phi_n(\omega_0)\Phi_n(\omega_1)\,..\,\Phi_n(\omega_{k-1})\Phi_n(\omega_{k+1})\,..\,\Phi_n(\omega_n),$$

il viendra:

$$D_0D_1\,..\,D_n\Psi_i^2(\omega_k) < (a^{(n)})^n(a^{(i)}) < \nu.D,$$

d'où:

$$\Psi_i(\omega_k) < \nu\Delta\Omega^{\frac{1}{2}}.$$

Or $\Psi_i(\omega)$ est, comme on le voit aisément, un polynome entier en ω. Les diverses valeurs de ce polynome correspondantes aux diverses racines $\omega_0, \omega_1, \,..\, \omega_n$, étant toutes finies et même proportionnelles à $\Delta\Omega^{\frac{1}{2}}$, il en sera de même de touts ses coefficients qui sont des nombres entiers; de là suit immédiatement le résultat que je voulais obtenir.

On peut mettre en effet $F(\omega_k)$ sous la forme:

$$F(\omega_k) = \Phi_n(\omega_k)\left\{X_n+X_{n-1}\frac{\Phi_{n-1}(\omega_k)}{\Phi_n(\omega_k)}+\cdots+X_i\frac{\Phi_i(\omega_k)}{\Phi_n(\omega_k)}+\cdots\right\},$$

ou bien:

$$F(\omega_k) = \Phi_n(\omega_k)\left\{X_n+X_{n-1}\frac{\Psi_{n-1}(\omega_k)}{\Psi_n(\omega_k)}+\cdots+X_i\frac{\Psi_i(\omega_k)}{\Psi_n(\omega_k)}+\cdots\right\}.$$

Donc toutes les formes f en nombre infini, qui correspondent à une même valeur du déterminant Δ, peuvent être ramenées par les substitutions précédentes à un nombre d'entr'elles essentiellement limité, car les combinaisons de toutes les valeurs entières possibles pour les coefficients des polynomes $\Psi_i(\omega)$ sont en nombre fini. Enfin ces dernières formes qu'on peut nommer réduites, se représenteront elles-mêmes une infinité de fois en employant

successivement les diverses substitutions qui correspondent à touts les systèmes de valeurs imaginables des quantités positives D_0, D_1, .. D_n.

Dans le cas spécial des formes f que j'ai d'abord considéré, pour démontrer Votre théorème sur les nombres premiers $5m+1$, on démontre facilement que les polynomes $\Psi_i(\omega)$ contiennent touts en facteur le nombre N, c'est donc uniquement de Ω que dépendront les limites des coefficients dans les formes réduites. On entrevoit ainsi la possibilité d'obtenir, par exemple, tout ce qui se rattache à la représentation des nombres premiers $11m+1$, par des facteurs complexes formés des racines onzièmes de l'unité, en opérant non plus sur chaque nombre donné, mais en général sur les racines de l'équation $x^{11}=1$.

Mais j'ai hâte, Monsieur, de finir cette longue lettre, où il n'y a plus place pour la théorie des fonctions elliptiques. Je n'ai pu jusqu'ici faire à mon gré cette recherche de l'ensemble des transformations de la fonction Θ, ni retrouver ce résultat si remarquable de la réduction du module q à la limite $e^{-\pi\sqrt{\frac{3}{4}}}$, dont Vous m'avez parlé dans Votre lettre. Oserais-je Vous demander quelques éclaircissements sur ce point? Mr. *Borchardt*, a eu la bonté de me mettre un peu sur la voie pour déduire les propriétés des fonctions Θ de la multiplication des quatre séries $\Sigma e^{-(ax+ib)^2}$, mais je ne sais si je pourrai marcher bien loin. Permettez-moi, Monsieur, de Vous prier de me rappeler à son souvenir, j'ai entendu Mr. *Sturm* parler avec de grands éloges de son mémoire publié par Mr. *Liouville*.

Ayez la bonté, si Vous le jugez convenable, de faire paraître dans le journal de Mr. *Crelle* quelques uns des résultats précédents, j'essayerai ensuite de les développer plus complètement.

P. S. J'aperçois à l'instant que l'algorithme indiqué pour déterminer les nombres entiers α, β, .. λ tels qu'on ait:

$$f(\alpha, \beta, \ldots \lambda) > (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n} \sqrt[n+1]{D}$$

peut être présenté d'une manière bien plus précise.

En premier lieu pour les formes *binaires* de déterminant $-D$: „on ne peut objecter que les opérations continuent à l'infini, car on verrait s'offrir une infinité de quantités a, a', a'' etc. liées par les relations $a > a' > a''$ etc. et par conséquent différentes. Mais à chacune d'elles correspondent deux nombres entiers $\alpha^{(n)}$, $\beta^{(n)}$, qui donnent p. ex.

$$a^{(m)} = a\alpha^{(m)2} + 2b\alpha^{(m)}\beta^{(m)} + a'\beta^{(m)2}.$$

Ces nombres sont essentiellement limités, donc il faudrait qu'une même combinaison α, β se produisit dans le cours du calcul une infinité de fois, ce qui conduirait à supposer égaux, contre l'hypothèse, une infinité de termes de la suite a, a', a'' etc."

Pour les formes *ternaires:* „désignant pour abréger $f(\alpha^{(m)}, \beta^{(m)}, \gamma^{(m)})$ par $f^{(m)}$, on voit naître de la continuation du calcul précédemment proposé, une suite de quantités, f, f', f'' etc. liées par les relations,

$$f' < \sqrt[4]{((\tfrac{4}{3})^3 Df)}, \qquad f'' < \sqrt[4]{((\tfrac{4}{3})^3 Df')} \quad \text{etc.}$$

Or on obtiendra la limite annoncée, dès qu'il se présentera une valeur $f^{(m+1)}$ égale ou supérieure à la précédente $f^{(m)}$. En effet, de

$$f^{(m+1)} > f^{(m)} \quad \text{et} \quad f^{(m+1)} < \sqrt[4]{((\tfrac{4}{3})^3 Df^{(m)})},$$

on déduit aisément:

$$f^{(m)} < \tfrac{4}{3}\sqrt[3]{D}.$$

D'ailleurs on ne peut admettre, dans le cas d'une forme définie, que les opérations se prolongent indéfiniment, car les nombres $\alpha^{(m)}$, $\beta^{(m)}$, $\gamma^{(m)}$ étant essentiellement limités, on verrait se reproduire une infinité de fois une même combinaison de ces nombres entiers, ce qui ramenerait les mêmes termes dans la suite f, f', f'', contrairement à l'hypothèse. Si la forme f est indéfinie, mais à coefficients entiers (seul cas dont j'aurai besoin plus tard), la même conclusion subsiste, puisqu'une suite de nombres entiers décroissante ne peut aller à l'infini."

Pour les formes *quaternaires.* „Or ici se représentent les mêmes considérations que dans le cas des formes ternaires; dès que le calcul conduira à un terme $f^{(m+1)}$ égal ou supérieur au précédent, on obtiendra la limite annoncée, car de $f^{(m+1)} \geqq f^{(m)}$ et $f^{(m+1)} < \sqrt[9]{((\tfrac{4}{3})^{12} D^2 f^{(m)})}$, on déduit: $f^{(m)} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{3}{2}} \sqrt[4]{D}$. D'ailleurs les opérations s'arrêteront toujours, quels que soient les coefficients, si l'on opère sur une forme définie, et la même chose aura lieu pour une forme même indéfinie, mais à coefficients entiers."

Deuxième lettre.

Permettez-moi de venir encore Vous soumettre ce qu'il m'est arrivé de rencontrer sur la théorie des formes quadratiques, depuis la dernière fois que j'ai eu l'honneur de Vous écrire. J'avais ébauché bien à la hâte, dans ma lettre, la démonstration de cette propriété générale des formes de même déterminant, de se laisser distribuer en un nombre fini de classes; depuis j'ai été amené à une méthode de réduction plus simple et surtout plus analogue à l'algorithme de *Lagrange* pour les formes binaires. Soyez assez bon, Monsieur, pour me pardonner, s'il m'arrive ainsi de Vous entretenir de choses que je n'ai pas encore suffisamment mûries; en présence d'une théorie d'une immense étendue, je cède au plaisir de Vous communiquer quelques résultats placés à l'abord de questions difficiles et qui peut-être seront au dessus de mes forces. Ainsi me suis-je borné, comme application de ma nouvelle méthode de réduction, à calculer les formes définies réduites de déterminant 1, à 3, 4, 5, 6, 7 et 8 variables, et j'ai trouvé comme dans le cas des formes binaires, une seule classe, représentée par une somme de 3, 4, 5, 6, 7 et 8 carrés. L'idée principale de cette méthode consiste dans l'introduction de certaines formes liées intimement, comme je suis parvenu à le reconnaître, aux formes adjointes de Mr. *Gaufs*, mais qu'il me semble indispensable de considérer d'une manière explicite. En représentant par

$$f(x_0, x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_0^n {}_j \sum_0^n {}_i a_{i,j} x_i x_j,$$

sous la condition:

$$a_{i,j} = a_{j,i},$$

une forme quelconque d'ordre $n+1$ (c. à d. à $n+1$ indéterminées), je les définis de la manière suivante:

$$g(y_1, y_2, y_3, \dots y_n) = \sum_1^n {}_j \sum_1^n {}_i b_{i,j} y_i y_j,$$

en prenant:

$$b_{i,j} = a_{0,0}a_{i,j} - a_{0,i}a_{0,j},$$

et voici le théorème auquel elles donnent lieu.

Si la substitution

$$(1.)\quad \begin{cases} x_0 = X_0 + M_1X_1 + M_2X_2 + \cdots + M_nX_n \\ x_1 = \phantom{X_0 +{}} m_1X_1 + m_2X_2 + \cdots + m_nX_n \\ x_2 = \phantom{X_0 +{}} n_1X_1 + n_2X_2 + \cdots + n_nX_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \phantom{X_0 +{}} t_1X_1 + t_2X_2 + \cdots + t_nX_n \end{cases}$$

change $f(x_0, x_1, .. x_n)$ en $F(X_0, X_1, .. X_n)$, en nommant $F(Y_1, Y_2, .. Y_n)$ la forme d'ordre n déduit de F, comme g l'est de f, on aura

$$g(y_1, y_2, .. y_n) = G(Y_1, Y_2, .. Y_n)$$

en posant

$$(2.)\quad \begin{cases} y_1 = m_1Y_1 + m_2Y_2 + \cdots + m_nY_n \\ y_2 = n_1Y_1 + n_2Y_2 + \cdots + n_nY_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = t_1Y_1 + t_2Y_2 + \cdots + t_nY_n. \end{cases}$$

Pour abréger, je nommerai g, *la forme dérivée* de f, et (2.) la substitution dérivée de (1.). On trouve aisément, que g est définie et positive. si f est elle-même définie et positive, que le déterminant de g est:

$$D_0 = a_{0,0}^{n-1}D,$$

D étant le déterminant de f, et enfin que l'équivalence de f et F, entraine celle de g et G, la seule condition pour cela étant que le déterminant relatif aux équations (2.) soit en valeur absolue, l'unité.

De là, se tire une conséquence importante; concevons que la substitution dérivée soit prise de telle sorte que G devienne une forme réduite de son ordre, les coefficients, $M_1, M_2, .. M_n$, resteront encore arbitraires; or je dis qu'en posant:

$$F(X_0, X_1, X_2, .. X_n) = \sum_0^n{}_i \sum_0^n{}_i A_{i,j}X_iX_j,$$

on pourra les déterminer de manière à remplir la condition:

$$A_{0,i} < \tfrac{1}{2}A_{0,0}$$

pour $i = 1, 2, .. n$. Cela résulte en effet, de la valeur suivante:

$$A_{0,i} = M_ia_{0,0} + m_ia_{0,1} + n_ia_{0,2} + .. + t_ia_{0,n},$$

qu'il est facile d'obtenir, et on a d'ailleurs $a_{0,0} = A_{0,0}$. Il est essentiel d'observer qu'au lieu de $a_{0,0}$, qui se conserve en passant de f à F, on aurait pu employer, dans ce qui précède, aussi bien, l'un quelconque des coefficients $a_{\mu,\mu}$ des carrés des variables. Soit donc pour plus de clarté g_μ la forme dérivée composée avec ce coefficient, on pourra énoncer la proposition suivante:

Toute forme

$$f = \Sigma\Sigma a_{i,j} x_i x_j$$

peut être transformée en une autre équivalente:

$$f' = \Sigma\Sigma a'_{i,j} x_i x_j,$$

telle qu'ayant p. ex.

$$a'_{\mu,\mu} = a_{\mu,\mu},$$

la dérivée g'_μ soit une forme réduite de son ordre, et que la condition

$$a'_{\mu,i} < \tfrac{1}{2} a'_{\mu,\mu},$$

soit remplie pour toutes les valeurs de i autres que $i = \mu$.

C'est là dessus que se fonde l'algorithme de réduction des formes définies, quelle que soit la nature de leurs coefficients, entiers ou irrationnels, mais voici d'abord le but des opérations. Supposons que précédemment, on ait choisi pour $a_{\mu,\mu}$ le plus petit des coefficients $a_{i,i}$, deux cas peuvent se présenter; ou bien $a'_{\mu,\mu} = a_{\mu,\mu}$ restera encore la plus petite des quantités $a'_{i,i}$ dans la transformée f', ou bien il s'offrira un autre coefficient $a'_{\mu',\mu'} < a'_{\mu,\mu}$. Or dans le premier cas, toutes les autres conditions étant d'ailleurs remplies, f' sera ce que je nomme une forme réduite. Mais si c'est le second, qui se présente, on poursuivra les opérations en partant de f', comme tout-à-l'heure en partant de f, et en général, on déduira successivement les unes des autres, une suite de transformées:

$$f, \quad f', \quad f'', \quad \ldots \quad f^{(k)},$$

toutes équivalentes et telles que

$$a_{\mu,\mu}, \quad a'_{\mu',\mu'}, \quad a''_{\mu'',\mu''}, \quad \ldots \quad a^{(k)}_{\mu^{(k)},\mu^{(k)}}$$

désignant respectivement les plus petits des coefficients:

$$a_{i,i}, \quad a'_{i,i}, \quad a''_{i,i}, \quad \ldots \quad a^{(k)}_{i,i},$$

on ait:

$$a_{\mu,\mu} > a_{\mu',\mu'} > a''_{\mu'',\mu''} \quad \ldots > a^{(k)}_{\mu^{(k)},\mu^{(k)}}$$

$$a'_{\mu,i} > \tfrac{1}{2} a'_{\mu,\mu}, \quad a''_{\mu',i} < \tfrac{1}{2} a''_{\mu',\mu'}, \quad \ldots \quad a^{(k)}_{\mu^{(k-1)},i} < a^{(k)}_{\mu^{(k-1)},\mu^{(k-1)}},$$

et que d'ailleurs les diverses dérivées

$$g_\mu, \quad g'_{\mu'}, \quad g''_{\mu''}, \quad \ldots \quad g^{(k)}_{\mu^{(k)}}$$

soient des formes réduites de leur ordre.

Or je dis qu'un tel système d'opérations ne peut se prolonger à l'infini, et qu'on obtiendra nécessairement une transformée

$$\mathfrak{F} = \Sigma\Sigma\mathfrak{A}_{i,j}x_i x_j$$

devant être considérée comme une forme réduite. En effet, partant d'une forme *définie* f, les quantités $a_{\mu,\mu}$, $a_{\mu',\mu'}$ seront des valeurs de f, en supposant aux indéterminées de valeurs entières, et l'on ne saurait former qu'un nombre limité de ces valeurs restant toujours inférieures à un certain maximum, donc on ne peut admettre l'hypothèse d'une infinité de quantités de cette sorte, continuellement décroissantes, et par conséquent inégales.

Je vais maintenant faire voir que touts les coefficients $\mathfrak{A}_{i,j}$, d'une forme définie réduite $\mathfrak{F}$, ne peuvent excéder certaines limites, qui dépendent du déterminant et du nombre des indéterminées. Pour cela il faut d'abord établir la condition suivante:

$$\mathfrak{A}_{0,0}.\mathfrak{A}_{1,1}.\mathfrak{A}_{2,2}\ldots\mathfrak{A}_{n,n} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n(n+1)}D$$

qui est l'extension d'une relation obtenue dans la théorie des formes binaires.

Supposons qu'elle soit admise pour les formes réduites d'ordre n, et désignons par ex. par $\mathfrak{A}_{0,0}$ le plus petit des coefficients $\mathfrak{A}_{i,i}$, la dérivée

$$\mathfrak{G} = \sum_1^n{}_j \sum_1^n{}_i \mathfrak{B}_{i,j}x_i x_j$$

étant une forme réduite de cet ordre, et son déterminant ayant pour valeur

$$D_0 = \mathfrak{A}_{0,0}^{n-1}D,$$

on devra avoir:

$$(3.) \qquad \mathfrak{B}_{1,1}.\mathfrak{B}_{2,2}.\mathfrak{B}_{3,3}\ldots\mathfrak{B}_{n,n} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n(n-1)}\mathfrak{A}_{0,0}^{n-1}D.$$

Or la valeur générale

$$(4.) \qquad \mathfrak{B}_{i,j} = \mathfrak{A}_{0,0}.\mathfrak{A}_{i,j} - \mathfrak{A}_{0,i}.\mathfrak{A}_{0,j}$$

donne lorsque les deux indices sont égaux:

$$\mathfrak{B}_{i,i} = \mathfrak{A}_{0,0}.\mathfrak{A}_{i,i} - \mathfrak{A}_{0,i}^2,$$

de sorte que les quantités positives $\mathfrak{B}_{i,i}$ peuvent être considérées comme les déterminants changés de signes, d'autant des formes binaires $(\mathfrak{A}_{0,0}, \mathfrak{A}_{0,i}, \mathfrak{A}_{i,i})$ toutes réduites, car on a à la fois

$$\mathfrak{A}_{0,0} < \mathfrak{A}_{i,i} \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}_{0,i} < \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_{0,0},$$

donc on peut poser

$$\mathfrak{A}_{0,0}\,.\,\mathfrak{A}_{i,i} < \tfrac{4}{3}\mathfrak{B}_{i,i};$$

de là on conclut, l'inégalité subsistant pour toutes les valeurs de i:

$$\mathfrak{A}_{0,0}^{n}\,.\,\mathfrak{A}_{1,1}\,.\,\mathfrak{A}_{2,2}\,.\,.\,\mathfrak{A}_{n,n} < (\tfrac{4}{3})^{n}\,\mathfrak{B}_{1,1}\,.\,\mathfrak{B}_{2,2}\,.\,.\,\mathfrak{B}_{n,n},$$

et enfin d'après la relation (3.):

$$\mathfrak{A}_{0,0}\,.\,\mathfrak{A}_{1,1}\,.\,\mathfrak{A}_{2,2}\,.\,.\,\mathfrak{A}_{n,n} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n(n+1)}\,D.$$

Cette condition est par là démontrée dans toute sa généralité puisqu'elle a lieu pour les formes binaires.

Comme conséquence immédiate, on voit que les quantités $\mathfrak{A}_{i,i}$, $\mathfrak{A}_{0,i}$ sont nécessairement limitées, et il en est de même encore du déterminant D_0 de la dérivée, qui a pour valeur: $\mathfrak{A}_{0,0}^{n-1}D$. Cela posé, admettons que les formes réduites d'ordre n aient touts leurs coefficients limités, je dis que la même chose aura lieu pour les formes d'ordre $n+1$. En effet, toutes les quantités $\mathfrak{B}_{i,j}$, devront se trouver finies, donc d'après la relation (4.) qui donne:

$$\mathfrak{A}_{i,j} = \frac{\mathfrak{B}_{i,j}+\mathfrak{A}_{0,i}\,.\,\mathfrak{A}_{0,j}}{\mathfrak{A}_{0,0}},$$

il en sera de même en général pour $\mathfrak{A}_{i,j}$. Or la proposition à laquelle je voulais arriver, résulte immédiatement de là, puisqu'elle a lieu pour les formes binaires, et dans le cas de coefficients *entiers,* elle donne ce théorème: les formes définies ou indéfinies réduites pour un déterminant donné, sont en nombre fini.

Maintenant, voici une remarque essentielle pour l'application des principes précédents au calcul de ces formes.

Soit toujours D le déterminant donné, et

$$\mathfrak{F} = \Sigma\Sigma\mathfrak{A}_{i,j}x_i x_j$$

l'une quelconque des formes définies réduites pour ce déterminant, la relation

$$\mathfrak{A}_{0,0}\mathfrak{A}_{1,1}\mathfrak{A}_{1,2}\,.\,.\,\mathfrak{A}_{n,n} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n(n+1)}D$$

donne d'abord la limite

$$\mathfrak{A}_{0,0} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n}\sqrt[n+1]{D}$$

pour le plus petit des coefficients $\mathfrak{A}_{i,i}$. Soit encore

$$\mathfrak{G} = \Sigma\Sigma\mathfrak{B}_{i,j}x_i x_j$$

la dérivée réduite, composée avec $\mathfrak{A}_{0,0}$ et dont le déterminant est

$$D_0 = \mathfrak{A}_{0,0}^{n-1}D.$$

En désignant par $\mathfrak{B}_{\mu,\mu}$ le plus petit des coefficients $\mathfrak{B}_{i,i}$, on aura de même

$$\mathfrak{B}_{\mu,\mu} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}(n-1)} \sqrt[n]{D_0}.$$

Mais d'après ce que j'ai observé ci-dessus, $\mathfrak{B}_{\mu,\mu}$ peut être considéré comme le déterminant changé de signe de la forme binaire réduite $(\mathfrak{A}_{0,0}, \mathfrak{A}_{0,\mu}, \mathfrak{A}_{\mu,\mu})$, donc on aura:

1°. si $\mathfrak{A}_{0,0}$ est pair: $\quad \mathfrak{B}_{\mu,\mu} > \mathfrak{A}_{0,0}^2 - (\frac{1}{2}\mathfrak{A}_{0,0})^2$ ou $> \frac{3}{4}\mathfrak{A}_{0,0}^2$,

2°. si $\mathfrak{A}_{0,0}$ est impair: $\quad \mathfrak{B}_{\mu,\mu} > \mathfrak{A}_{0,0}^2 - (\frac{1}{2}(\mathfrak{A}_{0,0}-1))^2$.

Or en général, soit $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{R}$, etc. la suite des formes d'ordre $n+1$, n, $n-1$, $n-2$, etc., qu'on obtient en prenant, pour $\mathfrak{G}$, la dérivée réduite de $\mathfrak{F}$, pour $\mathfrak{N}$, la dérivée réduite de $\mathfrak{G}$, pour $\mathfrak{R}$, la dérivée réduite de $\mathfrak{N}$ etc. Nommons respectivement $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. les plus petits coefficients des carrés de variables dans ces formes, et D, D_0, D_{01}, D_{02} etc. leurs divers déterminants. On aura d'abord:

$$D_0 = \mathfrak{A}^{n-1} D, \qquad D_{01} = \mathfrak{B}^{n-1} D_0, \qquad D_{02} = \mathfrak{C}^{n-3} D_{01}, \quad \text{etc.}$$

puis on obtiendra la série des limites supérieures:

$$\mathfrak{A} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n} \sqrt[n+1]{D}, \qquad \mathfrak{B} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}(n-1)} \sqrt[n]{D_0}, \qquad \mathfrak{C} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}(n-1)} \sqrt[n+1]{D_{01}}, \quad \text{etc.}$$

et suivant les deux cas, l'une ou l'autre des limites inférieures suivantes:

$$\mathfrak{B} > \tfrac{3}{4}\mathfrak{A}^2, \qquad \mathfrak{C} > \tfrac{3}{4}\mathfrak{B}^2, \qquad \mathfrak{D} > \tfrac{3}{4}\mathfrak{C}^2, \quad \text{etc.}$$

ou

$$\mathfrak{B} > \mathfrak{A}^2 - (\tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}-1))^2, \quad \mathfrak{C} > \mathfrak{B}^2 - (\tfrac{1}{2}(\mathfrak{B}-1))^2, \quad \mathfrak{D} > \mathfrak{C}^2 - (\tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}-1))^2, \quad \text{etc.}$$

L'exemple des formes de déterminant 1, que je vais traiter, montrera l'utilité de ces formules. Dans ce cas on a en général:

$$\mathfrak{A} < (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}n},$$

ainsi depuis les formes binaires jusqu'aux formes quinaires inclusivement $\mathfrak{A} < 2$, donc $\mathfrak{A} = 1$, et depuis les formes à six indéterminées jusqu'à celles qui n'en comprennent pas plus de huit, $\mathfrak{A} > 3$, donc $\mathfrak{A} = 1$ ou $\mathfrak{A} = 2$. Or on va voir que cette seconde valeur doit être rejetée.

Considérons d'abord les formes à *six* indéterminées, on trouve:

1°. pour $\mathfrak{A}$ la limite supérieure: $\quad (\frac{4}{3})^{\frac{5}{2}} = 2{,}05\ldots$, donc $\mathfrak{A} = 2$

2°. pour $\mathfrak{B}$ id. $\quad (\frac{4}{3})^2 \sqrt[5]{2^4} = 3{,}09\ldots$, donc $\mathfrak{B} = 3$

3°. pour $\mathfrak{C}$ id. $\quad (\frac{4}{3})^{\frac{3}{2}} \sqrt[4]{(2^4 3^3)} = 7{,}01\ldots$, donc $\mathfrak{C} = 7$.

Il est inutile d'aller plus loin, puisque la valeur de $\mathfrak{C}$, est en contradiction avec la limite $\mathfrak{C} > \mathfrak{B}^2 - (\frac{1}{2}(\mathfrak{B}-1))^2$, il faut donc exclure déjà dans ce cas la valeur $\mathfrak{A} = 2$.

Passons aux formes à 7 indéterminées, il viendra

1°. pour $\mathfrak{A}$ la limite supérieure: $(\frac{4}{3})^3 = 2{,}36\,..$, donc $\mathfrak{A} = 2$

2°. pour $\mathfrak{B}$ id. $(\frac{4}{3})^{\frac{5}{2}}\sqrt[6]{2^5} = 3{,}65\,..$, donc $\mathfrak{B} = 3$

3°. pour $\mathfrak{C}$ id. $(\frac{4}{3})^2\sqrt[5]{(2^5 3^4)} = 7{,}50\,..$, donc $\mathfrak{C} = 7$;

pour la même raison que précédemment, $\mathfrak{A} = 2$, doit encore être rejeté.

Enfin le cas des formes à 8 indéterminées donne

1°. pour $\mathfrak{A}$ la limite supérieure: $(\frac{4}{3})^7 = 2{,}73\,..$, donc $\mathfrak{A} = 2$

2°. pour $\mathfrak{B}$ id. $(\frac{4}{3})^3\sqrt[7]{2^6} = 4{,}29\,..$, donc $\mathfrak{B} = 4$

3°. pour $\mathfrak{C}$ id. $(\frac{4}{3})^{\frac{5}{2}}\sqrt[6]{(2^6.4^5)} = 13{,}03\,..$, donc $\mathfrak{C} = 13$

4°. pour $\mathfrak{D}$ id. $(\frac{4}{3})^2\sqrt[5]{(2^6.4^5.13^4)} = 127{,}4\,..$, donc $\mathfrak{D} = 127$,

la valeur obtenue pour $\mathfrak{D}$ est en contradiction avec la limite inférieure $\mathfrak{C}^2 - (\frac{1}{2}(\mathfrak{C}-1))^2 = 133$. Donc, comme dans les cas précédent, il n'existe que la seule valeur $\mathfrak{A} = 1$, et voici maintenant, les conséquences qui s'en déduisent.

En premier lieu, pour toutes les formes définies de déterminant 1, dont le nombre des indéterminées ne surpasse pas 8, la dérivée réduite a encore l'unité pour déterminant. Soit donc

$$\mathfrak{F} = \Sigma\Sigma\mathfrak{A}_{i,j}x_i x_j \quad \text{et} \quad \mathfrak{G} = \Sigma\Sigma\mathfrak{B}_{i,j}x_i x_j$$

une forme et sa dérivée réduites, toutes deux ayant l'unité pour déterminant. Admettons que pour les formes $\mathfrak{G}$, dont l'ordre est inférieur d'une unité, on ait $\mathfrak{B}_{i,i} = 1$ et $\mathfrak{B}_{i,j} = 0$ lorsque i est différent de j, les deux conditions

$$\mathfrak{A}_{0,0} = 1, \quad \mathfrak{A}_{0,i} < \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_{0,0}$$

donneront d'abord, $\mathfrak{A}_{0,i} = 0$, et l'équation

$$\mathfrak{B}_{i,j} = \mathfrak{A}_{0,0}\mathfrak{A}_{i,j} - \mathfrak{A}_{0,i}\mathfrak{A}_{0,j}$$

conduira successivement, pour $i = j$ et i différent de j, aux deux valeurs:

$$\mathfrak{A}_{i,i} = 1, \quad \mathfrak{A}_{i,j} = 0.$$

Or les formes définies binaires réduites, offrant la seule classe $x^2 + y^2$ de déterminant 1, on en conclut que pour les formes ternaires, quaternaires, etc. jusqu'à celle de huit indéterminées, il n'existera pareillement qu'une seule classe représentée successivement par une somme de 3, 4, ... 8 carrés.

Je n'essayerai pas, Monsieur, de Vous développer encore d'autres applications particulières de ma méthode de réduction. Au reste les formes réduites auxquelles on est ainsi conduit, pour un déterminant donné, n'offrent plus ce caractère propre aux formes binaires, de ne pouvoir être équivalentes

entre elles, à moins d'être identiques, aux signes près de certains coefficients; seulement on peut démontrer que la limite du nombre des formes réduites équivalentes ne dépend que du nombre des indéterminées, et nullement de la valeur particulière du déterminant. Mais permettez-moi, Monsieur, de revenir un instant sur les circonstances remarquables, auxquelles donne lieu la réduction des formes dont les coefficients dépendent de racines d'équations algébriques à coefficients entiers. Peut-être parviendra-t-on à déduire de là, un système complet de caractères pour chaque espèce de ce genre de quantités, analogue par exemple à ceux que donne la théorie des fractions continues pour les racines des équations du second degré. On ne peut du moins faire concourir trop d'éléments pour jeter quelque lumière sur cette variété infinie des irrationnelles algébriques, dont les symboles d'extraction de racines, ne nous représentent que la plus faible partie. Ici comme dans la théorie des transcendantes, il a été facile de trouver à une longue suite de notions analytiques de plus en plus complexes, une origine commune, une définition unique et complète, où n'entrent que les premiers éléments du calcul; mais quelle tâche immense, pour la théorie des nombres, et le calcul intégral, de pénétrer dans la nature d'une telle multiplicité d'êtres de raison, en les classant en groupes irréductibles entre eux, de les constituer tous individuellement, par des définitions caractéristiques et élémentaires?

L'exemple le plus simple auquel puisse s'appliquer ma méthode de réduction, est celui des racines cubiques des nombres entiers. En désignant donc par α la valeur réelle, et par β et γ les deux valeurs imaginaires de $\sqrt[3]{A}$, on sera conduit d'après le point de vue auquel je me suis placé, à réduire pour toutes les valeurs de la quantité $\varDelta$, croissantes depuis zéro jusqu'à l'infini, la forme ternaire

$$f = (x+\alpha y+\alpha^2 z)^2 + \varDelta(x+\beta y+\beta^2 z)(x+\gamma y+\gamma^2 z)$$

dont le déterminant $D = \frac{27}{4}\varDelta^2 A^2$. Soit dans l'hypothèse d'une valeur donnée quelconque de $\varDelta$, que je représenterai par $\varDelta_0$, la substitution correspondante:

$$\begin{aligned} x &= mX + nY + pZ \\ y &= m'X + n'Y + p'Z \\ z &= m''X + n''Y + p''Z, \end{aligned}$$

en posant pour abréger:

$$\begin{array}{lll} M(\alpha) = m+\alpha m'+\alpha^2 m'' & N(\alpha) = n+\alpha n'+\alpha^2 n'' & P(\alpha) = p+\alpha p'+\alpha^2 p'' \\ M(\beta) = m+\beta m'+\beta^2 m'' & N(\beta) = n+\beta n'+\beta^2 n'' & P(\beta) = p+\beta p'+\beta^2 p'' \\ M(\gamma) = m+\gamma m'+\gamma^2 m'' & N(\gamma) = n+\gamma n'+\gamma^2 n'' & P(\gamma) = p+\gamma p'+\gamma^2 p'', \end{array}$$

f deviendra:

$$F = (XM(\alpha)+YN(\alpha)+ZP(\alpha))^2$$
$$+\Delta(XM(\beta)+YN(\beta)+ZP(\beta))(XM(\gamma)+YN(\gamma)+ZP(\gamma)).$$

Soit encore

$$(1.)\quad \begin{cases} \mathfrak{M} = M^2(\alpha)+\Delta M(\beta)M(\gamma) \\ \mathfrak{N} = N^2(\alpha)+\Delta N(\beta)N(\gamma) \\ \mathfrak{P} = P^2(\alpha)+\Delta P(\beta)P(\gamma), \end{cases}$$

on aura d'après le caractère principal des formes définies réduites:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{P} < (\tfrac{4}{3})^3 D \quad \text{ou} \quad < (4A\Delta)^2,$$

d'où en supposant $\mathfrak{M}<\mathfrak{N}<\mathfrak{P}$:

$$(2.)\quad \mathfrak{M}<(4A\Delta)^{\frac{2}{3}},\quad \mathfrak{M}^2\mathfrak{N}<(4A\Delta)^2,\quad \mathfrak{M}^2\mathfrak{P}<(4A\Delta)^2.$$

Or de là résultent plusieurs propriétés essentielles que je vais d'abord établir.

En premier lieu, le nombre entier

$$\Omega = M(\alpha)M(\beta)M(\gamma)$$

vérifie la condition

$$\Omega < (\tfrac{4}{3})^{\frac{3}{2}} A;$$

car d'après la première des équations (1.), le produit des deux facteurs $M(\alpha)$, $\Delta M(\beta)M(\gamma)$ ne peut dépasser son maximum $\frac{2}{3}\mathfrak{M}\sqrt{(\frac{1}{3}\mathfrak{M})}$, d'où se tire la limite indiquée.

Secondement, les deux polynomes à coefficients entiers, savoir

$$\Phi(\alpha) = N(\alpha)M(\beta)M(\gamma),\qquad \Psi(\alpha) = P(\alpha)M(\beta)M(\gamma),$$

qui sont respectivement de la forme

$$\Phi(\alpha) = \varphi+\alpha\varphi'+\alpha^2\varphi'',\qquad \Psi(\alpha) = \psi+\alpha\psi'+\alpha^2\psi'',$$

ont de même leurs coefficients limités. En effet, on a d'après les relations (1.):

$$N(\alpha) < \sqrt{\mathfrak{N}},\qquad \Delta M(\beta)M(\gamma) < \mathfrak{M},$$

donc

$$\Delta\Phi(\alpha) < \mathfrak{M}\sqrt{\mathfrak{N}},$$

et par la seconde des équations (2.):

$$\Phi(\alpha) < 4A,$$

et on aura de même:

$$\Psi(\alpha) < 4A.$$

Soit ensuite, puisque β et γ sont deux imaginaires conjuguées:

$$\Phi(\beta) = \rho e^{\theta\sqrt{-1}},\quad \Phi(\gamma) = \rho e^{-\theta\sqrt{-1}},$$

d'où

$$\varrho^2 = \Phi(\beta)\Phi(\gamma) = N(\beta)N(\gamma).M^2(\alpha)M(\beta)M(\gamma).$$

La seconde des équations (1.) donne d'abord

$$\Delta.N(\beta)N(\gamma) < \mathfrak{N},$$

on tire ensuite de la première,

$$M^2(\alpha).\Delta M(\beta)M(\gamma) < \tfrac{1}{4}\mathfrak{M}^2,$$

et on en conclut la limite

$$\varrho < 2A.$$

Ainsi on peut poser, en désignant par ε et η des quantités comprises entre $+1$ et -1:

$$\Phi(\alpha) = \varphi+\alpha\varphi'+\alpha^2\varphi'' = 4A.\varepsilon$$
$$\Phi(\beta) = \varphi+\beta\varphi'+\beta\,\varphi'' = 2A.\eta.e^{\theta\sqrt{-1}}$$
$$\Phi(\gamma) = \varphi+\gamma\varphi'+\gamma^2\varphi'' = 2A\eta.e^{-\theta\sqrt{-1}},$$

d'où

$$3\varphi = 4A(\varepsilon+\eta\cos\theta), \qquad \text{donc} \quad \varphi < \tfrac{8}{3}A$$
$$3\varphi' = 4\sqrt[3]{A^2}(\varepsilon+\eta\cos(\theta+\tfrac{2}{3}\pi)) \qquad \varphi' < \tfrac{8}{3}\sqrt[3]{A^2}$$
$$3\varphi'' = 4\sqrt[3]{A}(\varepsilon+\eta\cos(\theta-\tfrac{2}{3}\pi)) \qquad \varphi'' < \tfrac{8}{3}\sqrt[3]{A},$$

et on obtiendrait des limites semblables pour les coefficients du polynome Ψ, lesquels donnent lieu d'ailleurs à la condition remarquable:

$$\varphi'\psi''-\varphi''\psi' = \pm\Omega.$$

Celà posé, d'après tout ce qui vient d'être établi, nous représenterons la transformée déduite de la substitution effectuée dans f, non plus par F, mais par $\frac{F}{M^2(\alpha)} = \mathfrak{F}$, forme évidemment réduite en même temps que F et que j'écrirai ainsi:

$$\mathfrak{F} = \left(X+\frac{N(\alpha)}{M(\alpha)}Y+\frac{P(\alpha)}{M(\alpha)}Z\right)^2$$
$$+\Delta\frac{M(\beta)M(\gamma)}{M^2(\alpha)}\left(X+\frac{N(\beta)}{M(\beta)}Y+\frac{P(\beta)}{M(\beta)}Z\right)\left(X+\frac{N(\gamma)}{M(\gamma)}Y+\frac{P(\gamma)}{M(\gamma)}Z\right),$$

ou bien:

$$\mathfrak{F} = \left(X+\frac{\Phi(\alpha)}{\Omega}Y+\frac{\Psi(\alpha)}{\Omega}Z\right)^2$$
$$+\frac{\Delta\Omega}{M^3(\alpha)}\left(X+\frac{\Phi(\beta)}{\Omega}Y+\frac{\Psi(\beta)}{\Omega}Z\right)\left(X+\frac{\Phi(\gamma)}{\Omega}Y+\frac{\Psi(\gamma)}{\Omega}Z\right).$$

Or, Δ croissant d'une manière continue à partir de Δ_0, nommons, Δ_1, Δ_2, Δ_3 etc. la série des valeurs auxquelles viennent successivement correspondre des formes réduites distinctes, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ etc. Toutes ces formes seront comprises dans le même type que $\mathfrak{F}$, mais on peut concevoir que l'une quelconque d'entre elles soit obtenue au moyen de la précédente, en y introduisant la valeur de Δ, à partir de laquelle elle cesse d'être une forme réduite, puis lui appliquant la méthode générale de réduction. En procédant ainsi, le calcul relatif à la série entière des valeurs de Δ, est ramené à un nombre limité d'opérations. En effet, le nombre entier désigné d'une manière générale par Ω et les coefficients entiers des polynomes Φ et Ψ, ayant des limites finies, on arrivera nécessairement à deux valeurs de Δ, Δ_i et $\Delta_{i'}$, auxquelles correspondront deux formes, $\mathfrak{F}_i$, $\mathfrak{F}_{i'}$, qui représenteront absolument la même combinaison de ces quantités. Faisant donc croître Δ, dans $\mathfrak{F}_i$, à partir de la limite $\Delta_{i'}$ on verra se reproduire, dans le même ordre, les divers termes $\mathfrak{F}_{i+1}$, $\mathfrak{F}_{i+2}$, .. de la suite obtenue pour le premier intervalle de Δ_i à $\Delta_{i'}$, et jusqu'à la limite extrême des valeurs de Δ, l'ensemble des formes réduites sera cette série d'un nombre fini de formes, reproduite une infinité de fois.

En la considérant d'ailleurs dans l'ordre inverse, elle offrirait le résultat d'un système d'opérations où l'on aurait fait décroître la quantité Δ d'une manière continue depuis $\Delta_{i'}$ jusqu'à Δ_i; l'ensemble des formes correspondantes aux valeurs indéfiniment décroissantes de Δ, sera donc encore la même suite prolongée à l'infini dans un sens opposé.

Si ce n'est pas trop présumer de Votre indulgence et que j'aurai réussi à Vous intéresser un peu à ces recherches, je m'estimerais bien heureux, de Vous adresser encore ce qu'il pourra m'arriver de rencontrer dans la même voie. Après avoir prouvé que les propriétés précédentes sont caractéristiques pour les racines de toutes les équations du 3ᵉ degré à coefficients entiers, je me suis arrêté à quelques recherches sur l'équation $M(\alpha)M(\beta)M(\gamma) = 1$ dont je pense obtenir la solution complète. Mais je désirerais surtout pouvoir Vous soumettre un travail sur les équations modulaires, dans lequel j'ai établi une proposition énoncée dans les oeuvres posthumes de *Galois*, imprimées dans le journal de Mathématiques, et qui consiste en ce que les équations modulaires du 6ᵉ, 8ᵉ et 12ᵉ degré, peuvent être abaissées respectivement au 5ᵉ, 7ᵉ et 11ᵉ degré. Je me suis proposé en même temps de retrouver ces relations si singulières que Vous avez le premier découvertes, entre les racines

$M, M', M'', \ldots$ de l'équation $F(k, M) = 0$, mais je n'ai pu y réussir malgré tous mes efforts. Ces premières propriétés d'irrationnelles algébriques non exprimables par radicaux, me paraissent du plus grand intérêt; comme les propriétés des racines des équations relatives à la division du cercle, elles serviront de point de départ pour pénétrer plus avant dans la théorie générale des équations. Ne publierez-Vous donc pas un jour, Monsieur, les principes si cachés qui Vous ont conduit à ces beaux théorèmes? Il me semble que ce serait encore une voie nouvelle que Vous ouvririez aux recherches des géomètres, dans une des théories les plus vastes et les plus difficiles.

Troisième lettre

Je dois à l'obligeance de M. *Borchardt,* d'avoir reçu Votre dernière lettre qui m'a été bien précieuse, en portant à ma connaissance l'écrit de M. *Gauss* sur les formes quadratiques ternaires. Permettez moi de Vous remercier aussi de toutes les autres indications que Vous avez eu la bonté de me donner, mais dont mon ignorance de la langue Allemande m'empêche malheureusement de profiter comme je le souhaiterais. C'est M. *Borchardt,* lui-même, qui a bien voulu me traduire l'article de M. *Gauss,* mais jusqu'ici je n'ai pu trouver personne pour me continuer le même service et, à mon grand regret, je reste complétement étranger aux travaux de M. *Kummer,* sur les nombres complexes, qui m'intéresseraient vivement.

Comme Vous le savez, Monsieur, le but de mes premières recherches avait été d'examiner le nouveau mode d'approximation que Vous avez donné en établissant l'impossibilité d'une fonction à trois périodes imaginaires. Ce n'est que long-temps après que j'ai vu comment cette question, et une infinite d'autres du même genre, dépendaient de la réduction des formes quadratiques. Mais une fois arrivé à ce point de vue, les problèmes si vastes que j'avais cru me proposer, m'ont semblé peu de chose à côtè des grandes questions de la théorie des formes, considérée d'une manière générale. Dans cette immense étendue de recherches qui nous a été ouverte par M. *Gauss,* l'Algèbre et la Théorie des Nombres, me paraissent devoir se confondre dans un même ordre de notions analytiques, dont nos connaissances actuelles ne nous permettent pas encore de nous faire une juste idée. Peut-être, cependant, doit-on entrevoir qu'il appartiendra à cette partie de la science, constituée ainsi sur ses véritables bases, d'offrir le tableau de tous les éléments, en nombre fini ou illimité, dont dépendent les racines des équations algébriques, séparés en types irréductibles et classés suivant leurs rapports naturels.

Je ne sais si j'aurai réussi à faire un premier pas vers un but si éloigné, en donnant une méthode pour la réduction des formes binaires de

degré quelconque *). J'essayerai plus tard de poursuivre, sous ce point de vue, les conséquences des résultats que j'ai obtenus, mais jusqu'à présent, j'ai été plutôt préoccupé de la recherche des principes propres à la réduction des formes les plus générales composées d'un nombre quelconque de variables, question capitale et qui peut-être sera bien au dessus de mes forces. Voici néanmoins sur ce sujet un premier théorème destiné à présenter, dans le sens le plus étendu, la notion des formes adjointes de M. *Gauss*.

Soit

$$(1.)\qquad X = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

l'expression générale d'une fonction homogène du m^e degré à n variables. Faisons

$$(2.)\qquad \frac{dX}{dx_1} = y_1,\quad \frac{dX}{dx_2} = y_2,\quad \ldots\quad \frac{dX}{dx_n} = y_n;$$

par l'élimination de $x_1, x_2, \ldots x_n$, on arrivera à une équation

$$\Pi(X, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0.$$

Cela étant, les coefficients des diverses puissances de X seront ce que j'appellerai, *les formes des divers degrés adjointes à* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, et je les désignerai généralement, en supposant égal à l'unité le coefficient de la puissance la plus élevée de X, par

$$g(y_1, y_2, \ldots y_n).$$

Or on aura le théorème suivant, comme conséquence immédiate de la définition qu'on vient de proposer:

La fonction homogène $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ devenant $F(X_1, X_2, \ldots X_n)$, par la substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n \\ x_2 &= b_1 X_1 + b_2 X_2 + \cdots + b_n X_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= l_1 X_1 + l_2 X_2 + \cdots + l_n X_n, \end{aligned}$$

si l'on désigne par G la forme adjointe, composée avec les coefficients de F, comme g est composée avec les coefficients de f, on aura

$$g(y_1, y_2, \ldots y_n) = G(Y_1, Y_2, \ldots Y_n),$$

en prenant

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_1 y_1 + b_1 y_2 + \cdots + l_1 y_n \\ Y_2 &= a_2 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + l_2 y_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n &= a_n y_1 + b_n y_2 + \cdots + l_n y_n. \end{aligned}$$

*) *Crelle* Journal t. XXXVI p. 357.

Mais il importait surtout d'obtenir le résultat général de l'élimination des variables $x_1, x_2, \ldots x_n$, entre les équations (1.) et (2.). Voici comment on peut y parvenir.

Soit

$$\varphi = X^{m-1}.f(x_1, x_2, \ldots x_n) - \frac{(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^m}{m^m}$$

une nouvelle fonction homogène du m^e degré de $x_1, x_2, \ldots x_n$; j'observe qu'au moyen des équations proposées, les suivantes ont lieu, savoir

$$\varphi = 0$$

et

$$\frac{d\varphi}{dx_1} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{d\varphi}{dx_n} = 0.$$

Elles se réduisent en effet à des identités, en mettant à la place de X, d'une part, et de $y_1, y_2, \ldots y_n$, de l'autre, leurs valeurs en $x_1, x_2, \ldots x_n$, telles que les donnent les équations (1.) et (2.). Donc la question est ramenée à l'élimination de $x_1, x_2, \ldots x_n$ entre les équations homogènes:

$$\frac{d\varphi}{dx_1} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{d\varphi}{dx_n} = 0,$$

car l'équation $\varphi = 0$ rentre dans celles-là, et on peut l'omettre.

Ainsi, représentant la forme f, par la somme des valeurs du produit

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} . A_{i_1, i_2, \ldots i_n},$$

lorsqu'on attribue aux quantités i tous les systèmes de valeurs entières et positives qui vérifient la condition

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_n = m,$$

et désignant par

$$\mathfrak{F} = 0,$$

la relation entre les coefficients A qui résulte de l'élimination de $x_1, x_2, \ldots x_n$ entre les équations

$$\frac{df}{dx_1} = 0, \quad \frac{df}{dx_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{df}{dx_n} = 0,$$

on aura le théorème suivant:

L'équation

$$\Pi(X, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0$$

s'obtiendra, en remplaçant $A_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ dans

$$\mathfrak{F} = 0$$

par

$$X^{m-1}.A_{i_1,i_2,\ldots i_n}-(i_1,i_2,\ldots i_n)\frac{y_1^{i_1}y_2^{i_2}\ldots y_n^{i_n}}{m^m},$$

$(i_1, i_2, \ldots i_n)$ étant le coefficient numérique de $y_1^{i_1}y_2^{i_2}\ldots y_n^{i_n}$, dans le développement de la puissance polynomiale $(y_1+y_2+\cdots+y_n)^m$.

On observera seulement qu'il y aura lieu de supprimer comme facteur étranger, une certaine puissance de X, ce qui n'altère en rien la forme analytique du résultat que je viens d'obtenir.

L'application aux formes quadratiques est bien simple. La forme proposée étant

$$f=\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_j\, a_{i,j}x_ix_j,$$

sous la condition ordinaire

$$a_{i,j}=a_{j,i},$$

la forme adjointe g, sera

$$g=\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_j\frac{dD}{da_{i,j}}y_iy_j,$$

D étant le déterminant de la forme f.

Je prendrai encore comme exemple, les formes cubiques binaires:

$$f=ax^3+3bx^2y+3cxy^2+ey^3.$$

Dans ce cas, l'expression désignée par $\mathfrak{F}$, coïncide avec le déterminant unique de la forme, tel que je l'ai obtenu dans la théorie de la réduction, et le coefficient du second terme de l'équation en X, donne la forme adjointe:

$$\frac{1}{\mathfrak{F}}\left(\frac{d\mathfrak{F}}{da}x^3+\frac{d\mathfrak{F}}{db}x^2y+\frac{d\mathfrak{F}}{dc}xy^2+\frac{d\mathfrak{F}}{dc}y^3\right)$$
$$=\frac{1}{\mathfrak{F}}\{(ae^2-3bce+2c^3)x^3-3(ace-2b^2e+bc^2)x^2y$$
$$+3(2ac^2-abe-b^2c)xy^2-(3abc-a^2e-2b^3)y^3\}.$$

En étudiant cette forme que je trouve dans un des mémoires de M. *Eisenstein*, j'ai reconnu qu'elle se déduisait de f, en y remplaçant les variables par les deux expressions linéaires:

$$\frac{d\Phi}{dx},\quad\frac{d\Phi}{dy},$$

Φ étant l'expression quadratique:

$$(ac-b^2)y^2-(ae-bc)xy+(be-c^2)x^2,$$

considérée encore par M. *Eisenstein*, et par moi-même dans la note du journal de M. *Crelle*, sous la forme:

$$(\alpha-\beta)^2(y-\gamma x)^2+(\beta-\gamma)^2(y-\alpha x)^2+(\gamma-\alpha)^2(y-\beta x)^2,$$

α, β, γ étant les racines de l'équation,

$$ax^3+3bx^2+3cx+e=0.$$

Maintenant, Monsieur, je reviens à la théorie des formes quadratiques, pour essayer de Vous compléter quelques points de la dernière lettre que j'ai eu l'honneur de Vous écrire. Et d'abord, j'ai dû reconnaître que ce qu'on devait se proposer avant tout, dans la théorie de la réduction, était de découvrir les valeurs entières des indéterminées pour lesquelles une forme définie donnée, était *la plus petite possible*. De là en effet, se tireraient les conséquences suivantes:

1°. En cherchant la série des *minima* de la forme binaire

$$(y-ax)^2+\frac{x^2}{\Delta},$$

pour toutes les valeurs positives de la quantité Δ croissant d'une manière continue de zéro à l'infini, *les diverses fractions* $\frac{y}{x}$ *représenteraient l'ensemble des réduites de la fraction continue équivalente à* a.

2°. En cherchant de même la série des *minima* de la forme ternaire:

$$A(z-ax)^2+B(y-bx)^2+\frac{x^2}{\Delta},$$

où A et B sont deux quantités positives quelconques, a et b deux quantités réelles, *toutes les fractions* $\frac{z}{x}$, $\frac{y}{x}$, *auraient ce caractère essentiel qu'en choisissant un dénominateur* x_0 *moindre que* x, *deux autres fractions,* $\frac{z_0}{x_0}$, $\frac{y_0}{x_0}$, *donneraient nécessairement:*

$$A(z_0-ax_0)^2+B(y_0-bx_0)^2>A(z-ax)^2+B(y-bx)^2.$$

Car si cette inégalité n'avait pas lieu, l'expression

$$A(z_0-ax_0)^2+B(y_0-bx_0)^2+\frac{x_0^2}{\Delta}$$

serait moindre que

$$A(z-ax)^2+B(y-bx)^2+\frac{x^2}{\Delta};$$

donc cette dernière ne serait pas, comme on l'a supposé, un *minimum*.

Cela étant, si l'on observe qu'on peut toujours faire:

$$A(z-ax)^2+B(y-bx)^2+\frac{x^2}{\Delta}<\sqrt[3]{\left(\frac{2AB}{\Delta}\right)},$$

et *a fortiori:*

$$A(z-ax)^2+B(y-bx)^2<\sqrt[3]{\left(\frac{2AB}{\Delta}\right)},$$

on voit qu'en faisant croître continuellement Δ, la série des fractions $\frac{z}{x}$, $\frac{y}{x}$. converge indéfinément vers les limites a et b et que, pour chaque approximation, la somme des carrés des erreurs $z-ax$, $y-bx$, multipliés par les constantes A et B, est un *minimum*, c. à d. que cette somme augmente, si le dénominateur commun x diminue.

Ce qui précède, indique suffisamment une infinité d'autres conséquences analogues, qui toutes viennent dépendre de la recherche difficile, d'une limite précise du *minimum* d'une forme définie quelconque. Là-dessus je ne puis former qu'une conjecture. Mes premières recherches, dans le cas d'une forme à n variables de déterminant D, m'avaient donné la limite $(\frac{4}{3})^{\frac{1}{2}(n-1)}\sqrt[n]{D}$, je suis porté à présumer, mais sans pouvoir le démontrer, que le coefficient numérique $(\frac{4}{3})^{\frac{1}{2}(n-1)}$ doit être remplacé par $\frac{2}{\sqrt[n]{(n+1)}}$.

Comme application des mêmes principes, je considérerai encore la question suivante:

Étant donnée une expression imaginaire $a+b\sqrt{-1}$: déterminer les entiers complexes $x+y\sqrt{-1}$, $t+u\sqrt{-1}$, pour lesquels la norme de

$$(x+y\sqrt{-1})(a+b\sqrt{-1})-(t+u\sqrt{-1})$$

soit la plus petite possible, sous la condition que x^2+y^2 soit au dessous d'une certaine limite.

On cherchera les minima successifs de la forme à *quatre* variables:

$$f=(ax-by-t)^2+(ay+bx-u)^2+\frac{x^2+y^2}{\Delta},$$

pour toutes les valeurs de Δ, les diverses fractions complexes,

$$\frac{t+u\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{-1}},$$

auxquelles on parviendra ainsi, jouiront de cette propriété caractéristique, que

le module de la différence:

$$a+b\sqrt{-1}-\frac{t+u\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{-1}}$$

croîtra nécessairement en prenant toute autre fraction dont le dénominateur aurait un module moindre.

Mais une autre propriété de ces fractions, les rapprochera encore d'avantage des réduites de la théorie des fractions continues.

Soient

$$\frac{t+u\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{-1}},\quad \frac{t_0+u_0\sqrt{-1}}{x_0+y_0\sqrt{-1}},$$

deux fractions différentes qui correspondent à deux *minima* consécutifs de la forme f, de sorte que les deux valeurs de $\varDelta$ qui ont donné lieu à ces deux fractions, soient *infiniment peu* différentes l'une de l'autre. Alors, en observant que le déterminant de f est en général $\frac{1}{\varDelta^2}$, le premier minimum donnera, en admettant la conjecture ci-dessus,

$$(ax-by-t)^2+(ay+bx-u)^2+\frac{x^2+y^2}{\varDelta}<\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varDelta}},$$

et le second:

$$(ax_0-by_0-t_0)^2+(ay_0+bx_0-u_0)^2+\frac{x_0^2+y_0^2}{\varDelta+\omega}<\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\varDelta+\omega)}},$$

ω désignant une quantité aussi petite qu'on voudra. Cela posé, multiplions ces deux inégalités, membre à membre, on trouvera, en employant une formule bien connue *):

---

*) La formule d'*Euler* qui donne sous une forme de quatre carrés, le produit de deux sommes de 4 carrés, suit immédiatement de ce que le produit des deux déterminants $(ad-bc).(a'd'-b'c')$, est le déterminant du système

$$\begin{bmatrix} aa'+bc', & ab'+bd' \\ ca'+dc', & cb'+dd' \end{bmatrix}.$$

En effet, il suffit de supposer:

$$a=p+q\sqrt{-1},\quad b=r+s\sqrt{-1},\quad c=-r+s\sqrt{-1},\quad d=p-q\sqrt{-1},$$
$$a'=p'+q'\sqrt{-1},\quad b'=r'+s'\sqrt{-1},\quad c'=-r'+s'\sqrt{-1},\quad d'=p'-q'\sqrt{-1},$$

pour obtenir:

$$\begin{aligned}&(p^2+q^2+r^2+s^2)(p'^2+q'^2+r'^2+s'^2)\\ &=(pp'-qq'-rr'-ss')^2+(pq'+qp'+rs'-sr')^2\\ &+(pr'-qs'+rp'+sq')^2+(ps'+qr'+p's-q'r)^2.\end{aligned}$$

Celle de *Lagrange* vient en mettant $q\sqrt{A}$, $r\sqrt{B}$, $s\sqrt{AB}$ etc. au lieu de q, r, s etc.

$$\left\{(ax-by-t)(ax_0-by_0-t_0)+(ay+bx-u)(ay_0+bx_0-u_0)+\frac{xx_0+yy_0}{\sqrt{(\Delta(\Delta+\omega))}}\right\}^2$$
$$+\left\{-(ax-by-t)(ay_0+bx_0-u_0)+(ax_0-by_0-t_0)(ay+bx-u)+\frac{yx_0-y_0x}{\sqrt{(\Delta(\Delta+\omega))}}\right\}^2$$
$$+\left\{\frac{(\sqrt{(\Delta+\omega)}-\sqrt{\Delta})(a(yy_0-xx_0)+b(x_0y+xy_0)+t_0x-u_0y)+\sqrt{\Delta}(uy_0-u_0y+t_0x-x_0t)}{\sqrt{(\Delta(\Delta+\omega))}}\right\}^2$$
$$+\left\{\frac{(\sqrt{(\Delta+\omega)}-\sqrt{\Delta})(a(yx_0+xy_0)+b(xx_0-yy_0)-t_0y-u_0x)+\sqrt{\Delta}(ty_0-t_0y+ux_0-u_0x)}{\sqrt{(\Delta(\Delta+\omega))}}\right\}^2$$
$$<\frac{4}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\Delta(\Delta+\omega))}},$$

d'où en négligeant les deux premiers carrés et introduisant la condition que ω est infiniment petit:

$$(uy_0-u_0y+t_0x-x_0t)^2+(ty_0-t_0y+ux_0-u_0x)^2<\frac{4}{\sqrt{5}}$$

et par conséquent:

$$(uy_0-u_0y+t_0x-x_0t)^2+(ty_0-t_0y+ux_0-u_0x)^2=1.$$

Ainsi, la norme du numérateur de la différence de deux fractions complexes consécutives est *l'unité;* on eût obtenu *l'unité* ou le nombre *deux*, en employant dans l'expression du minimum de f, le facteur $(\frac{4}{3})^{\frac{1}{2}}$ au lieu du coefficient hypothétique $\frac{2}{\sqrt[4]{5}}$.

La méthode précédente s'applique encore aux nombres complexes $x+y\sqrt{-n}$, dont la théorie est plus difficile et sur laquelle je me propose de revenir. Mais ce n'est qu'au moyen de la réduction de formes de degrés plus élevés qu'on pourra résoudre les questions analogues à la précédente dans lesquelles entreraient, les nombres complexes *réels* $x+y\sqrt{n}$ et ceux qui dépendent d'irrationnelles numériques plus compliquées que les radicaux carrés.

Voici maintenant une autre série de questions importantes dont la solution dépend encore de la recherche du minimum d'une forme quadratique et qu'on peut comprendre dans cet énoncé général:

Trouver, en nombres entiers, le minimum du produit d'un certain nombre de fonctions linéaires et homogènes, à coefficients réels ou imaginaires. —

Nommons

$$f_1, f_2, \ldots f_n$$

les fonctions linéaires à coefficients réels,

$$g_1, g_2, \ldots g_{n'}; \quad h_1, h_2, \ldots h_{n'}$$

les fonctions à coefficients imaginaires, g_i et h_i étant des fonctions conjuguées. Si l'on suppose que leur produit prenne la plus petite valeur possible en attribuant aux indéterminées les valeurs entières $x=x_0$, $y=y_0$ etc. et qu'on désigne alors par

$$f_1^0,\ f_2^0,\ \ldots\ f_n^0,$$

ce que deviennent les facteurs linéaires réels, et de même par

$$g_1^0,\ h_1^0;\ g_2^0,\ h_2^0;\ \ldots\ g_{n'}^0,\ h_{n'}^0,$$

es diverses couples de facteurs conjugués, *je dis que la forme quadratique*

$$\left(\frac{f_1}{f_1^0}\right)^2+\left(\frac{f_2}{f_2^0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{f_n}{f_n^0}\right)^2$$
$$+2\frac{g_1h_1}{g_1^0h_1^0}+2\frac{g_2h_2}{g_2^0h_2^0}+\cdots+2\frac{g_{n'}h_{n'}}{g_{n'}^0h_{n'}^0},$$

sera elle même la plus petite possible, pour $x=x_0$, $y=y_0$, etc.

Supposons en effet qu'on puisse avoir

$$\left(\frac{f_1}{f_1^0}\right)^2+\left(\frac{f_2}{f_2^0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{f_n}{f_n^0}\right)^2$$
$$+2\frac{g_1h_1}{g_1^0h_1^0}+2\frac{g_2h_2}{g_2^0h_2^0}+\cdots+2\frac{g_{n'}h_{n'}}{g_{n'}^0h_{n'}^0}=\mathrm{M},$$

M étant moindre que $n+2n'$, comme le produit des facteurs:

$$(a.)\qquad \left(\frac{f_1}{f_1^0}\right)^2\left(\frac{f_2}{f_2^0}\right)^2\cdots\left(\frac{f_n}{f_n^0}\right)^2,\quad \left(\frac{g_1h_1}{g_1^0h_1^0}\right)^2\left(\frac{g_2h_2}{g_2^0h_2^0}\right)^2\cdots\left(\frac{g_{n'}h_{n'}}{g_{n'}^0h_{n'}^0}\right)^2$$

sera toujours inférieur à son *maximum*

$$\left(\frac{\mathrm{M}}{n+2n'}\right)^{n+2n},$$

la supposition de $\mathrm{M}<n+2n'$ conduirait à

$$f_1f_2\ldots f_n.g_1h_1.g_2h_2\ldots g_{n'}h_{n'}<f_1^0f_2^0\ldots f_n^0.g_1^0h_1^0.g_2^0h_2^0\ldots g_{n'}^0h_{n'}^0$$

et par suite, le produit des facteurs linéaires ne serait pas, contre l'hypothèse, le plus petit possible pour $x=x_0$, $y=y_0$, etc. J'ajoute qu'en faisant $\mathrm{M}=n+2n'$, le produit $(a.)$ ne pourra atteindre son maximum ou l'unité qu'autant qu'on aura:

$$\left(\frac{f_1}{f_1^0}\right)^2=1,\ \left(\frac{f_2}{f_2^0}\right)^2=1,\ \ldots\ \left(\frac{f_n}{f_n^0}\right)^2=1,$$
$$\frac{g_1h_1}{g_1^0h_1^0}=1,\ \frac{g_2h_2}{g_2^0h_2^0}=1,\ \ldots\ \frac{g_{n'}h_{n'}}{g_{n'}^0h_{n'}^0}=1.$$

Nous voici donc encore conduit, comme Vous le voyez, Monsieur, à cette recherche singulière *de tous les minima, d'une forme quadratique, correspondants aux divers systèmes de valeurs de plusieurs paramètres qu'il faudra supposer passer par tous les états possibles de grandeur*. Telle est du moins la voie qui nous est ouverte, par l'analyse précédente, pour la solution de nombreuses questions, parmi lesquelles je choisirai celle-ci:

$\varphi(\alpha)$ désignant un nombre entier complexe, composé avec une racine α de l'équation $F(x)=0$ à coefficients entiers, celui du premier terme étant l'unité, trouver toutes les solutions de l'équation

$$\text{Norme } \varphi(\alpha)=1.$$

Soit M, un *minimum* d'une quelconque des formes définies

$$\Phi=\left(\frac{\varphi\alpha_1}{A_1}\right)^2+\left(\frac{\varphi\alpha_2}{A_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\varphi\alpha_n}{A_n}\right)^2+2\frac{\varphi\beta_1\,\varphi\gamma_1}{K_1^2}+2\frac{\varphi\beta_2\,\varphi\gamma_2}{K_2^2}+\cdots+2\frac{\varphi\beta_{n'}\,\varphi\gamma_{n'}}{K_{n'}^2},$$

dans lesquelles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ désignent les racines réelles et $\beta_1, \gamma_1;\ \beta_2, \gamma_2;\ \ldots\ \beta_{n'}, \gamma_{n'}$, les couples de racines imaginaires de l'équation $F(x)=0$. En faisant, pour abréger, $n+2n'=m$, on déduira de la limite

$$\text{M} < \left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(m-1)}.\sqrt[m]{D},$$

où D est le déterminant de Φ, la relation suivante:

$$\text{Norme } \varphi^2(\alpha) < \left(\tfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}m(m-1)}\frac{\Delta}{m^m}$$

dans laquelle

$$\Delta = F'\alpha_1 F'\alpha_2 \ldots F'\beta_{n'} F'\gamma_{n'},$$

et où n'entrent plus les valeurs de A_1, A_2, .. K_1, K_2 etc.

Donc, quelles que soient les quantités, A_1, A_2, .. $K_{n'}$, le minimum de Φ conduit à une valeur toujours limitée pour la norme de $\varphi\alpha$; mais ce qui a été établi précédemment, fait voir, de plus, qu'en faisant passer A_1, A_2, .. K_1, K_2, .. par tous les états possibles de grandeur, on obtiendra nécessairement toutes les *unités complexes*, toutes les solutions de l'équation:

$$\text{Norme } \varphi\alpha = 1.$$

Considérons une solution particulière telle que N. $\varphi_0(\alpha)=1$, elle sera donnée par le minimum de Φ, dans l'hypothèse suivante:

$$\Phi=\left(\frac{\varphi\alpha_1}{\varphi_0\alpha_1}\right)^2+\left(\frac{\varphi\alpha_2}{\varphi_0\alpha_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\varphi\alpha_n}{\varphi_0\alpha_n}\right)^2+2\frac{\varphi\beta_1\,\varphi\gamma_1}{\varphi_0\beta_1\,\varphi_0\gamma_1}+\cdots+2\frac{\varphi\beta_{n'}\,\varphi\gamma_{n'}}{\varphi_0\beta_{n'}\,\varphi_0\gamma_{n'}}.$$

Mais ne pourrait-il pas exister deux ou plusieurs autres représentations distinctes du même *minimum* et conduisant par suite à de nouvelles solutions?

Observons, à cet effet, qu'on a les conditions

$$\left(\frac{\varphi\alpha_1}{\varphi_0\alpha_1}\right)^2=1,\quad \left(\frac{\varphi\alpha_2}{\varphi_0\alpha_2}\right)^2=1,\quad ..\quad \left(\frac{\varphi\alpha_n}{\varphi_0\alpha_n}\right)^2=1,$$

$$\frac{\varphi\beta_1\,\varphi\gamma_1}{\varphi_0\beta_1\,\varphi_0\gamma_1}=1,\quad ..\quad \frac{\varphi\beta_{n'}\,\varphi\gamma_{n'}}{\varphi_0\beta_{n'}\,\varphi_0\gamma_{n'}}=1,$$

déjà établies précédemment, de sorte qu'en supposant l'équation $F(x)=0$ irréductible, si l'on prend, $\varphi\alpha_1=\varphi_0\alpha_1$, la même équation aura lieu pour toute autre racine réelle ou imaginaire, et il en serait de même en partant de la condition $\varphi\alpha_1=-\varphi_0\alpha_1$. Or le premier cas conduit nécessairement à $x=x_0$, $y=y_0$, etc. et le second, à $x=-x_0$, $y=-y_0$, etc.

Mais si toutes les racines étaient imaginaires, la démonstration serait en défaut; dans ce cas on est conduit à détacher de l'ensemble général des solutions, un certain nombre d'entre elles qui offrent ce caractère singulier, de donner lieu *à des entiers complexes dont le module analytique est l'unité.* Ainsi du minimum de la forme

$$\Phi=\frac{\varphi\beta_1\,\varphi\gamma_1}{\varphi_0\beta_1\,\varphi_0\gamma_1}+\frac{\varphi\beta_2\,\varphi\gamma_2}{\varphi_0\beta_2\,\varphi_0\gamma_2}+\ ..\ +\frac{\varphi\beta_{n'}\,\varphi\gamma_{n'}}{\varphi_0\beta_{n'}\,\varphi_0\gamma_{n'}},$$

on déduira non seulement:

$$\varphi\beta_1=\varphi_0\beta_1,\qquad \varphi\gamma_1=\varphi_0\gamma_1,\qquad ..\ \varphi\beta_{n'}=\varphi_0\beta_{n'},\qquad \varphi\gamma_{n'}=\varphi_0\gamma_{n'},$$

mais encore:

$$\varphi\beta_1=\varphi_0\beta_1.\psi\beta_1,\ \varphi\gamma_1=\varphi_0\gamma_1.\psi\gamma_1,\ ..\ \varphi\beta_{n'}=\varphi_0\beta_{n'}.\psi\beta_{n'},\ \varphi\gamma_{n'}=\varphi_0\gamma_{n'}.\psi\gamma_{n'},$$

les nombres entiers complexes ψ satisfaisant aux conditions suivantes:

$$\psi\beta_1.\psi\gamma_1=1,\quad \psi\beta_2.\psi\gamma_2=1,\quad ..\quad \psi\beta_{n'}.\psi\gamma_{n'}=1,$$

et on pourra en faire abstraction puisqu'ils peuvent être déterminés d'avance. J'ai trouvé du moins *qu'ils ne pouvaient être que de cette forme, savoir:*

$$\psi=e^{\frac{2k\pi}{l}\sqrt{-1}},$$

k et l étant entiers. Le dénominateur l est sans doute égal au nombre $2n'+1$, mais je n'ai pu encore suffisamment approfondir toutes ces circonstances qui me paraissent bien singulières.

Quoiqu'il en soit, les considérations qui précèdent, établissent qu'on n'aura jamais à rechercher qu'une seule représentation en nombres entiers, de chacun des minima distincts qu'offrira la forme Φ, lorsque les quantités

$$A_1,\ A_2,\ ..\ A_n,\quad K_1,\ K_2,\ ..\ K_{n'}$$

passeront par tous les états possibles de grandeur. Mais une fois amenés à cette nouvelle recherche, il faut recourir à la théorie de la ***réduction*** des formes quadratiques quelconques. Je vais avant tout définir ***ce que j'appelle réduire une forme donnée.***

Soit f cette forme, et f', f'' etc. la série entière de toutes celles qui lui sont équivalentes et que je représenterai, d'une manière générale, par

$$f = \sum_1^n{}_j \sum_1^n{}_i a_{j,i} x_{i,j},$$

en supposant que les coefficients des carrés, rangés par ordre croissant de grandeur, soient

$$a_{1,1}, \quad a_{2,2}, \quad .\ . \quad a_{n,n}.$$

Cela étant, nous subdiviserons, progressivement, l'ensemble de toutes les formes équivalentes, en réunissant dans un même groupe:

1°. toutes les formes où . . . . . . $a_{1,1}$ a la plus petite valeur possible,

2°. parmi celles-ci, toutes celles où $a_{2,2}$ est également un minimum,

3°. parmi les précédentes, celles où $a_{3,3}$ est encore un minimum,

et ainsi de suite, de telle sorte qu'après avoir épuisé la série $a_{1,1}, a_{2,2}, .\ . \ a_{n,n}$, on arrive à ***une*** ou à ***plusieurs*** formes dont les coefficients des carrés sont nécessairement les mêmes.

Ces formes offrent un caractère essentiel qui consiste en ce que toutes les expressions quadratiques

$$(a_{i,i}, \ b_{i,j}, \ a_{j,j})$$

sont réduites. Cette remarque prouve qu'on a la limite:

$$a_{1,1} \,.\, a_{2,2} \ldots a_{n,n} < \mu \,.\, D,$$

μ étant un coefficient numérique ne dépendant que du nombre n des variables: mais je ne m'arrêterai pas à la démonstration.

Revenons au dernier groupe de formes équivalentes auquel nous venons de parvenir, il pourra être subdivisé de nouveau, d'après la grandeur des déterminants

$$A_{i,j} = a_{i,i} a_{j,j} - a_{i,j}^2,$$

en réunissant ensemble,

1°. toutes les formes où . . . . $A_{1,1}$ sera le plus petit possible.

2°. parmi ces dernières toutes celles où $A_{1,2}$ est également un minimum.

3°. parmi les précédentes celles où . . $A_{1,3}$ est encore un minimum.

et ainsi de suite, de telle sorte qu'après avoir épuisé la série:

$$A_{1,1},\ A_{1,2},\ \ldots\ A_{1,n},$$

on passe à la suivante:

$$A_{2,2},\ A_{2,3},\ \ldots\ A_{2,n};$$

puis à celle-ci:

$$A_{3,3},\ A_{3,4},\ \ldots\ A_{3,n},$$

et on continuera jusqu'à ce qu'on soit arrivé, en dernière analyse, à une ou à plusieurs formes offrant des valeurs numériques égales, pour toutes les quantités $A_{i,j}$.

Mais il est évident qu'alors les valeurs *absolues* des coefficients $a_{i,j}$ sont pareillement les mêmes. Or la forme unique qu'il faudra définitivement choisir pour réduite, s'obtiendra par la considération des déterminants ternaires

$$A_{i,j,k} = a_{i,i}a_{j,j}a_{k,k} + 2a_{i,j}a_{i,k}a_{j,k} - a_{i,i}a_{j,k}^2 - a_{j,j}a_{i,k}^2 - a_{k,k}a_{i,j}^2,$$

en opérant comme on l'a fait précédemment avec les fonctions $A_{i,j}$. Les formes réunies en dernier lieu, offrant les mêmes valeurs des diverses expressions $A_{i,j,k}$, deviendront *identiques*, en rendant positifs par exemple, comme cela est toujours possible, tous les coefficients $a_{0,i}$.

Réduire une forme donnée *f*, ce sera donc chercher la transformation de cette forme en la réduite équivalente telle qu'elle vient d'être définie. Cette réduite, comme Vous le voyez, Monsieur, n'est pas celle à laquelle conduit la méthode que j'ai eu l'honneur de Vous soumettre dans ma dernière lettre. Il y aura donc lieu d'espérer une nouvelle substitution, mais jusqu'ici je n'ai vu d'autre moyen à employer que celui qui est indiqué par l'analyse précédente et qui consiste à former la série entière des formes aux plus petits coefficients des carrés. Seulement il est facile de démontrer *que leur nombre a une limite indépendante du déterminant et qui est fonction uniquement du nombre des indéterminées.*

Dans le cas des formes ternaires, les réduites jouissent d'une propriété qui mérite peut-être d'être remarquée, *car elle ne me parait pas s'étendre aux formes contenant un plus grand nombre de variables.* Elle consiste en ce que *toute forme ternaire réduite* $\varphi(x, y, z)$ *prend une valeur moindre, en diminuant celle des variables dont la valeur absolue est la plus grande.*

Soit

$$\varphi = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy.$$

En supposant quelconques les signes des coefficients b, b', b'', on peut ad-

mettre que les indéterminées sont positives. Or en supposant $x \geqq y$, $x > z$, on prouve aisément la proposition énoncée, dans chacun des quatre cas qu'offrent les signes de b' et b'', au moyen des équations identiques,

$$\begin{aligned} &\varphi(x-1, y, z) - \varphi(x, y, z) \\ &= -2(x-1)(a+b''+b') + 2b''(x-y-1) + 2b'(x-z-1) - a \\ &= -2(x-1)(a+b') - 2b''y + 2b'(x-z-1) - a \\ &= -2(x-1)(a+b'') + 2b''(x-y-1) - 2b'z - a \\ &= -2(x-1)a - 2b''y - 2b'z - a, \end{aligned}$$

les quatre expressions précédentes correspondant aux quatre cas:

$$\begin{aligned} b' &: - \; - \; + \; + \\ b'' &: - \; + \; - \; + . \end{aligned}$$

Je reviens maintenant à la recherche de toutes les représentations distinctes des divers *minima*, de la forme quadratique:

$$\Phi = \left(\frac{\varphi(\alpha_1)}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\varphi(\alpha_2)}{A_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\varphi(\alpha_n)}{A_n}\right)^2 + 2\frac{\varphi\beta_1\varphi\gamma_1}{K_1^2} + 2\frac{\varphi\beta_2\varphi\gamma_2}{K_2^2} + \cdots + 2\frac{\varphi\beta_{n'}\varphi\gamma_{n'}}{K_{n'}^2},$$

correspondants à tous les systèmes possibles de valeurs de A_1, A_2, etc., K_1, K_2, etc.

Dans cette forme, les quantités $\varphi\alpha$ sont les valeurs d'une expression telle que

$$x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \cdots + \alpha^{m-1} x_{m-1},$$

en supposant α, l'une quelconque des racines de l'équation, $F(x) = 0$, dont le degré $n+2n'$ est toujours désigné par m. Cela posé, soit pour un système déterminé de valeurs des quantités A et K,

$$\begin{aligned} x_0 &= a_0 y_0 + a_1 y_1 + \cdots + a_{m-1} y_{m-1} \\ x_1 &= b_0 y_0 + b_1 y_1 + \cdots + b_{m-1} y_{m-1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m-1} &= l_0 y_0 + l_1 y_1 + \cdots + l_{m-1} y_{m-1}, \end{aligned}$$

la substitution propre à réduire Φ. En posant pour abréger:

$$\begin{aligned} (\alpha)_i &= a_i + \alpha b_i + \alpha^2 c_i + \cdots + \alpha^{m-1} l_i \\ \psi(\alpha) &= y_0(\alpha)_0 + y_1(\alpha)_1 + \cdots\cdots + y_{m-1}(\alpha)_{m-1}, \end{aligned}$$

la transformée réduite sera:

$$\Psi = \left(\frac{\psi(\alpha_1)}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{\psi(\alpha_2)}{A_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\psi(\alpha_n)}{A_n}\right)^2$$
$$+ 2\frac{\psi\beta_1\psi\gamma_1}{K_1^2} + 2\frac{\psi\beta_2\psi\gamma_2}{K_2^2} + \cdots + 2\frac{\psi\beta_{n'}\psi\gamma_{n'}}{K_{n'}^2}.$$

Mais on peut l'écrire d'une autre manière.

Soit y_0 celle des indéterminées dont le carré a le plus petit coefficient, et posons:

$$N = (\alpha_1)_0(\alpha_2)_0 \,.\,.\, (\alpha_n)_0(\beta_1)_0(\gamma_1)_0 \,.\,.\, (\beta_{n'})_0(\gamma_{n'})_0,$$

il est clair que, α désignant l'une quelconque des racines, $\frac{N}{(\alpha)_0}$ sera un polynome à coefficients entiers en α, et qu'il en sera de même de

$$\frac{N}{(\alpha)_0}\cdot(\alpha)_i,$$

que je désignerai par $\psi_i(\alpha)$. Or de la valeur-limite du produit des coefficients des carrés des indéterminées dans toute forme réduite, telle qu'elle a été indiquée plus haut, on déduit facilement, *que tous ces polynomes $\psi_i(\alpha)$ ont pour coefficients des nombres entiers ayant aussi des limites finies.* Il en est de même d'ailleurs de N, comme on l'a vu précédemment d'une manière spéciale. Donc transformant ainsi les fonctions $\psi(\alpha)$, savoir:

$$\psi(\alpha) = \frac{(\alpha)_0}{N}\{y_0N + y_1\psi_1(\alpha) + y_2\psi_2(\alpha) + \cdots + y_{m-1}\psi_{m-1}(\alpha)\},$$

et posant:

$$\chi(\alpha) = y_0N + y_1\psi_1(\alpha) + y_2\psi_2(\alpha) + \cdots + y_{m-1}\psi_{m-1}(\alpha),$$
$$\frac{(\alpha_i)_0}{NA_i} = \frac{1}{A'_i}, \quad \frac{(\beta_i)_0(\gamma_i)_0}{N^2K_i^2} = \frac{1}{K_i'^2},$$

l'expression de ψ devient:

$$\Psi = \left(\frac{\chi(\alpha_1)}{A'_1}\right)^2 + \left(\frac{\chi(\alpha_2)}{A'_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\chi(\alpha_n)}{A'_n}\right)^2 + 2\frac{\chi(\beta_1)\chi(\gamma_1)}{K_1'^2} + \text{etc.}$$

et c'est là *le type analytique* *) auquel je voulais arriver pour y rapporter toute forme réduite. Le nombre de ces types, comme on le voit d'après la caractère des fonctions $\chi(\alpha)$, est essentiellement *fini* et c'est là un résultat qui ouvre la voie à un nouvel ordre de recherches destinées, si je ne m'abuse étrangement, à jeter un grand jour sur la nature si inconnue des irrationnelles algébriques.

*) D'après M. *Hermite* deux de ces types sont les mêmes lorsqu'ils ne diffèrent entr'eux que par rapport aux quantités A' et K'. *J.*

Et d'abord, *on en déduit immédiatement une démonstration directe, de la possibilité de l'équation que je me suis proposé de résoudre*, savoir

$$\text{Norme}\ \varphi(\alpha) = 1.$$

En effet, on a pour cela le théorème, *que lorsqu'une substitution*,

$$\begin{aligned} x_0 &= p_0 y_0 + p_1 y_1 + \cdots + p_{m-1} y_{m-1} \\ x_1 &= q_0 y_0 + q_1 y_1 + \cdots + q_{m-1} y_{m-1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m-1} &= s_0 y_0 + s_1 y_1 + \cdots + s_{m-1} y_{m-1}, \end{aligned}$$

correspondante à un système différent de valeurs de A_1, A_2, etc., K_1, K_2, etc., *conduit au même type réduit* Ψ, *le nombre entier complexe représenté par le déterminant des quantités:*

$$\begin{matrix} (\alpha)_0 & (\alpha)_1 & \cdots & (\alpha)_{m-1} \\ q_0 & q_1 & \cdots & q_{m-1} \\ r_0 & r_1 & \cdots & r_{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_0 & s_1 & \cdots & s_{m-1}, \end{matrix}$$

aura pour norme l'unité.

J'ai trouvé aussi, *qu'il suffisait d'obtenir le système des substitutions propres à réduire la forme* Φ, *dans un intervalle fini des quantités* A *et* K, *les substitutions correspondantes à toutes les autres valeurs de ces mêmes quantités se déduisant de celles-là.*

De là on déduit que toutes les solutions de l'équation

$$\text{Norme}\ \varphi(\alpha) = 1,$$

peuvent s'obtenir par un nombre *limité* d'entre elles, convenablement choisies, mais d'autres considérations menent à la même conséquence. Je vais les indiquer en restant dans le cas particulier qui me les a fait découvrir.

Désignons par α la racine réelle, et par β et γ les deux racines imaginaires de l'équation du 3[e] degré à coefficients entiers:

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Soient aussi φ et ψ, deux unités complexes de la forme $x + \alpha y + \alpha^2 z$, je dis *que de ces deux unités en résulte une troisième dont elles sont l'une et l'autre des puissances entières.*

Posons en effet:

$$\Phi = \varphi^m \psi^n, \qquad \Psi = \varphi^{m_0} \psi^{n_0},$$

m, n, m_0, n_0 étant quatre nombres entiers tels que

$$mn_0 - nm_0 = 1,$$

on aura réciproquement,

$$\varphi = \Phi^{n_0}\Psi^{-n}, \qquad \psi = \Psi^{m}\Phi^{-m_0}.$$

De deux choses l'une: ou l'on pourra faire p. ex. $\Phi = 1$, et le théorème est démontré: ou bien au moins $\Phi = \Psi^{\frac{\varepsilon}{n}}$, ε étant moindre que l'unité et n pouvant prendre une infinité de valeurs différentes. Or, ayant toujours, Norme $\Phi = 1$, on conclurait qu'il existe une infinité de solutions de cette équation dans lesquelles la valeur de l'unité complexe réelle et celle du module analytique des deux unités conjuguées imaginaires, seraient aussi voisines du nombre 1 qu'on le voudrait, ce qui est absurde.

Une méthode toute semblable m'a conduit à démontrer que dans le cas des *trois racines réelles*, toutes les unités sont les produits des puissances de *deux* d'entre elles qui ne sont pas réductibles l'une et l'autre aux puissances entières d'une troisième, et il ne me parait pas difficile d'étendre les mêmes considérations au cas le plus général.

Quatrième lettre.

La dernière lettre que j'ai eu l'honneur de Vous écrire, était à peine partie que j'ai eu communication par M. *Liouville,* d'une note tirée des comptes-rendus de Votre académie et dans laquelle Vous traitez de la réduction des formes quadratiques, à coefficients entiers, sous un point de vue qui ne se serait jamais présenté à mon esprit et qui m'a vivement intéressé. Le résultat plein d'élégance auquel Vous arrivez par une méthode si simple, m'a fait rechercher si dans ce nouveau type de formes réduites, il y avait encore possibilité d'obtenir *des limitations, des coefficients, fonctions seulement du déterminant.*

En particulier j'ai considéré, les formes définies ternaires:

$$f = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy,$$

dans lesquelles, d'après le principe de Votre méthode, il faut faire p. ex.

$$x = \frac{b}{\omega}\xi + \beta\eta,$$

$$y = -\frac{b'}{\omega}\xi + \beta'\eta,$$

ω désignant le p. g. c. diviseur de b et b', déterminé par l'équation:

$$\omega = b\beta' + b'\beta.$$

On obtient ainsi la transformée:

$$\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{A}'\eta^2 + a''z^2 + 2\mathfrak{B}\xi\eta + 2\omega\eta z,$$

où l'un des rectangles des indéterminées a disparu.

Cela posé, *si les coefficients de la forme proposée sont limités, au moyen du déterminant D, il en sera de même des coefficients de la transformée.* En particulier $\mathfrak{A}$ peut s'écrire,

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\omega^2}(ab^2 + a'b'^2 - 2bb'b'') = \frac{1}{\omega^2}(aa'a'' - a''b''^2 - D),$$

donc

$$\mathfrak{A} < \frac{aa'a''}{\omega^2}.$$

Or on peut ensuite supposer

$$2\mathfrak{B} < \mathfrak{A},$$

en déterminant convenablement β et β' dans l'équation $\omega = b\beta' + \beta b'$ ou, ce qui est au fond la même chose, en changeant dans la transformée, ξ en $\xi + m\eta$. Quant à la limite du dernier coefficient $\mathfrak{A}'$, elle se tire de l'équation,

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}' - \mathfrak{B}^2 = aa' - b''^2.$$

En revenant aux premières considérations qui m'avaient fait entrevoir, il y a long-temps, l'importance de la recherche du minimum des formes à un nombre quelconque de variables, j'ai été conduit à présenter de la manière suivante, les idées que Vous avez le premier émises sur l'impossibilité de certaines fonctions périodiques.

Soient, pour les fonctions d'une seule variable,

$$a + b\sqrt{-1}, \quad a' + b'\sqrt{-1}, \quad a'' + b''\sqrt{-1}$$

trois indices quelconques de périodicité, je considère la forme définie ternaire,

$$f(ax + a'y + a''z)^2 + (bx + b'y + b''z)^2 + \frac{z^2}{\varDelta^2},$$

dont le déterminant

$$D = \left(\frac{ab' - ba'}{\varDelta}\right)^2.$$

Si $ab' - ba'$ n'est pas nul et que les deux équations:

$$ax + a'y + a''z = 0, \quad bx + b'y + b''z = 0,$$

ne peuvent avoir lieu en nombres entiers, la fonction sera impossible. Car pouvant faire pour toute valeur de $\varDelta$:

$$f < \sqrt[3]{(2D)}$$

et *a fortiori:*

$$(ax + a'y + a''z)^2 + (bx + b'y + b''z)^2 < \sqrt[3]{(2D)},$$

on déduirait des indices proposés, une période dont le module serait infiniment petit. Mais cette conclusion n'a plus lieu si $ab' - ba' = 0$. Alors je considère la forme binaire,

$$f = (ax + a'y)^2 + (bx + b'y)^2 + \frac{y^2}{\varDelta^2},$$

dont le déterminant, dans l'hypothèse admise, se trouve être

$$D = \frac{a^2 + b^2}{\varDelta^2}.$$

Or il est maintenant facile de prouver *que lorsque* $ab' - ba' = 0$, l'on ne

peut même admettre les deux périodes, $a+b\sqrt{-1}$ et $a'+b'\sqrt{-1}$, si on les suppose irréductibles, c. à d. si les équations,

$$ax+a'y=0,\quad bx+b'y=0,$$

ne peuvent avoir lieu en nombres entiers. On peut faire en effet, pour toute valeur de Δ:

$$f<\sqrt{(\tfrac{4}{3}D)},$$

et a fortiori:

$$(ax+a'y)^2+(bx+b'y)^2<\sqrt{(\tfrac{4}{3}D)},$$

ce qui conduit de nouveau à une période infiniment petite.

Les fonctions de plusieurs variables à périodes coëxistantes que Vous avez introduites le premier dans l'analyse, peuvent être traitées par les mêmes principes.

Soient

$$a_i+b_i\sqrt{-1},\quad c_i+d_i\sqrt{-1},\quad ..\quad k_i+l_i\sqrt{-1},$$

n indices simultanés de périodicité correspondants, respectivement, aux variables

$$x,\quad y,\quad ..\quad u,$$

dans une fonction telle que $\mathfrak{F}(x, y, .. u)$, je dis *que si le nombre de ces groupes d'indices, supposés irréductibles surpasse $2n$, la fonction proposée sera impossible, dans ce sens qu'on sera forcé d'admettre un groupe d'indices simultanés infiniment-petits.*

Faisons pour abréger:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_{2n+1}x_{2n+1}\\
\mathfrak{B} &= b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_{2n+1}x_{2n+1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathfrak{K} &= k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_{2n+1}x_{2n+1}\\
\mathfrak{L} &= l_1x_1+l_2x_2+\cdots+l_{2n+1}x_{2n+1},
\end{aligned}$$

le déterminant D de la forme,

$$f=\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\cdots+\mathfrak{K}^2+\mathfrak{L}^2+\frac{x_{2n+1}^2}{\Delta^2},$$

sera, comme on le trouve aisément:

$$D=\frac{1}{\Delta^2}\cdot\text{dét.}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & .. & k_1 & l_1\\ a_2 & b_2 & .. & k_2 & l_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{2n} & b_{2n} & .. & k_{2n} & l_{2n}\end{pmatrix}^2$$

et la conséquence que je voulais obtenir, découle, comme précédemment, de

la relation,

$$f < (\tfrac{4}{3})^n \sqrt[2n+1]{D},$$

à laquelle on peut toujours satisfaire quelque grand que soit Δ.

Si l'on suppose que le déterminant qui entre dans l'expression de D, s'évanouisse, la démonstration n'est plus applicable, mais la proposition n'en a pas moins lieu, et on obtient ainsi le premier terme d'une série de nouveaux cas d'impossibilité dont voici les conditions analytiques.

Soit pour abréger:

$$\begin{array}{l}
\mathfrak{A}_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{2n+1-i} x_{2n+1-i} \\
\mathfrak{B}_i = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_{2n+1-i} x_{2n+1-i} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathfrak{K}_i = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_{2n+1-i} x_{2n+1-i} \\
\mathfrak{L}_i = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \cdots + l_{2n+1-i} x_{2n+1-i},
\end{array}$$

et D_i le déterminant de la forme

$$f_i = \mathfrak{A}_i^2 + \mathfrak{B}_i^2 + \cdots + \mathfrak{K}_i^2 + \mathfrak{L}_i^2 + \frac{x_{2n+1-i}^2}{\Delta^2}.$$

Si l'on suppose D_{i-1} nul, on trouve que $\Delta^2 D_i$ s'obtient en faisant la somme des carrés de tous les déterminants que fournit le système:

$$\begin{array}{ccccc}
a_1, & b_1, & \dots & k_1, & l_1 \\
a_2, & b_2, & \dots & k_2, & l_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{2n-i}, & b_{2n-i}, & \dots & k_{2n-i}, & l_{2n-i},
\end{array}$$

en employant, d'une manière quelconque, $2n-i$ lignes verticales. Or toute fonction périodique de n variables sera impossible lorsqu'ayant $2n-i$ groupes de périodes simultanées irréductibles savoir:

$$\{a_\mu + b_\mu\sqrt{-1},\quad c_\mu + d_\mu\sqrt{-1},\quad \dots\quad k_\mu + l_\mu\sqrt{-1}\}_{\mu=1}^{\mu=2n-i},$$

le déterminant D_i de la forme f_i, composé avec ces indices, s'annullera. En effet, on arrivera à un système de périodes simultanées infiniment petites, en considérant dans la série des formes:

$$f_{i+1},\quad f_{i+2},\quad \dots\quad f_{2n-1},$$

la première de celles dont le déterminant ne s'évanouit point. La dernière d'ailleurs est dans ce cas, car on trouve aisément:

$$D_{2n-1} = \frac{1}{\Delta^2}(a_1^2 + b_1^2 + \cdots + k_1^2 + l_1^2).$$

L'analyse que je viens d'employer, s'applique à une question bien différente, *à la théorie des unités complexes les plus générales*, et donne ce théorème:

„Soit m' le nombre des racines réelles et des *couples* de racines imaginaires d'une équation irréductible à coefficients entiers et dont le premier „coefficient est l'unité, si l'on a m' unités complexes quelconques, formées „avec les racines de cette équation, elles peuvent toujours s'exprimer par „les produits des puissances entières, positives ou négatives, de $m'-1$ „autres convenablement choisies *)."

Nommons

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ .. \ \alpha_n,$$

les racines réelles de l'équation proposée, et

$$\beta_1, \gamma_1; \ \beta_2, \gamma_2; \ .. \ \beta_{n'}, \gamma_{n'},$$

les diverses couples de ses racines imaginaires. Soit encore

$$\varphi_i(\alpha) = a_i + \alpha b_i + \alpha^2 c_i + \cdots + \alpha^{m-1} l_i,$$

une unité complexe quelconque, et

$$\log \varphi_i^2(\alpha) = (\alpha)_i$$
$$\log \varphi_i(\beta)\varphi_i(\gamma) = (\beta,\gamma)_i$$
$$F(\alpha) = x_1(\alpha)_1 + x_2(\alpha)_2 + \cdots + x_{m'}(\alpha)_{m'}$$
$$F(\beta,\gamma) = x_1(\beta,\gamma)_1 + x_2(\beta,\gamma)_2 + \cdots + x_{m'}(\beta,\gamma)_{m'},$$

je dis qu'il est toujours possible de déterminer pour $x_1, x_2, .. x_{m'}$, un système de valeurs entières, positives ou négatives, telles qu'on ait

$$(1.) \quad F(\alpha) = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi_1^{2x_1}(\alpha).\varphi_2^{2x_2}(\alpha) \ .. \ \varphi_{m'}^{2x_{m'}}(\alpha) = 1.$$

Cette condition, d'ailleurs, aura nécessairement lieu à la fois pour toutes les racines, réelles ou imaginaires, puisqu'elles appartiennent, par hypothèse, à une équation irréductible.

Supposons en effet, l'équation (1.) impossible, et voyons quelles conséquences vont s'ensuivre.

---

*) Le théorème complet savoir: *Qu'il y a effectivement, dans tous les cas, $m'-1$ unités complexes indépendantes par les produits des puissances desquelles on puisse représenter toutes les autres,* est un des plus importants mais aussi un des plus épineux de la science des nombres. La démonstration rigoureuse de ce théorème a été donnée par M. *Lejeune Dirichlet,* dans les Comptes rendus mensuels de l'Acad. de Berlin du 30 Mars 1846. Voir aussi ceux d'Avril 1842 et d'Octobre 1841, et une lettre du même auteur à M. *Liouville* (J. d. M. Vol. V. 1840). J

En premier lieu, deux systèmes distincts de valeurs entières des indéterminées, $x_1, x_2, \ldots x_{m'}$, ne donneront jamais la même valeur de $F(\alpha)$. Car ayant p. ex.

$$x_1(\alpha)_1+x_2(\alpha)_2+\cdots+x_{m'}(\alpha)_{m'}=y_1(\alpha)_1+y_2(\alpha)_2+\cdots+y_{m'}(\alpha)_{m'},$$

on en déduirait

$$(x_1-y_1)(\alpha)_1+(x_2-y_2)(\alpha)_2+\cdots+(x_{m'}-y_{m'})(\alpha)_{m'}=0,$$

c. à d. une solution de l'équation (1.), ce qui est contre l'hypothèse admise.

Cela posé, je considère la forme quadratique:

$$F=F^2(\beta_1,\gamma_1)+F^2(\beta_2,\gamma_2)+\cdots+F^2(\beta_{n'},\gamma_{n'})$$
$$+F^2(\alpha_1)+F^2(\alpha_2)+\cdots+F^2(\alpha_{n-1})+\frac{x_{m'}^2}{\Delta^2},$$

dont le déterminant est:

$$D=\frac{1}{\Delta^2}\,\text{dét.}\begin{Bmatrix} (\alpha_1)_1 & (\alpha_1)_2 & \cdot\cdot & (\alpha_1)_{m'-1} \\ (\alpha_2)_1 & (\alpha_2)_2 & \cdot\cdot & (\alpha_2)_{m'-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_{n-1})_1 & (\alpha_{n-1})_2 & \cdot\cdot & (\alpha_{n-1})_{m'-1} \\ (\beta_1,\gamma_1)_1 & (\beta_1,\gamma_1)_2 & \cdot\cdot & (\beta_1,\gamma_1)_{m'-1} \\ (\beta_2,\gamma_2)_1 & (\beta_2,\gamma_2)_2 & \cdot\cdot & (\beta_2,\gamma_2)_{m'-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\beta_{n'},\gamma_{n'})_1 & (\beta_{n'},\gamma_{n'})_2 & \cdot\cdot & (\beta_{n'},\gamma_{n'})_{m'-1} \end{Bmatrix}^2$$

et je le supposerai d'abord différent de zéro.

Dans ce cas, si je cherche les minima de la forme F, pour des valeurs indéfiniment croissantes de Δ, il est clair qu'en posant

$$F^2(\alpha)=\log\Phi^2(\alpha)$$

et par suite,

$$F^2(\beta,\gamma)=\log\Phi^2(\beta)\Phi^2(\gamma),$$

j'obtiendrai une infinité d'unités complexes, $\Phi(\alpha)$, toutes différentes, d'après la remarque précédemment faite, et dont les valeurs absolues réelles, ainsi que les modules des valeurs imaginaires, seront aussi voisins de l'unité qu'on voudra. Or on aurait de la sorte, m' fonctions linéaires et homogènes, à m' indéterminées entières, qui seraient susceptibles de prendre une infinité de valeurs numériques inégales et comprises dans un intervalle limité, ce qui est absurde.

Lorsque le déterminant D sera différent de zéro, on peut donc satisfaire par des nombres entiers à l'équation,

$$x_1(\alpha)_1+x_2(\alpha)_2+\cdots+x_{m'}(\alpha)_{m'}=0.$$

Cela posé, je fais

$$y_1(\alpha)_1 + y_2(\alpha)_2 + \cdots + y_{m'}(\alpha)_{m'} = \log Y(\alpha)$$
$$z_1(\alpha)_1 + z_2(\alpha)_2 + \cdots + z_{m'}(\alpha)_{m'} = \log Z(\alpha)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$v_1(\alpha)_1 + v_2(\alpha)_2 + \cdots + v_{m'}(\alpha)_{m'} = \log V(\alpha),$$

les nombres entiers $y, z, \ldots v$, étant pris de manière que le déterminant relatif à ces équations linéaires et à la précédente, soit l'unité. Il est clair qu'on pourra tirer de là, les valeurs des m' unités $\varphi_i(\alpha)$, exprimées par les produits des puissances entières de $Y(\alpha)$, $Z(\alpha)$, .. $V(\alpha)$, qui représentent d'autres unités complexes, au nombre seulement de $m'-1$.

Il me reste à examiner le cas où le déterminant de la forme F, est supposé s'évanouir. Soit alors:

$$F_i(\alpha) = x_1(\alpha)_1 + x_2(\alpha)_2 + \cdots + x_{m'-i}(\alpha)_{m'-i},$$
$$F_i(\beta,\gamma) = x_1(\beta,\gamma)_1 + x_2(\beta,\gamma)_2 + \cdots + x_{m'-i}(\beta,\gamma)_{m'-i},$$

et D_i le déterminant de la forme

$$F_i = F_i^2(\beta_1,\gamma_1) + F_i^2(\beta_2,\gamma_2) + \cdots + F_i^2(\beta_{n'},\gamma_{n'})$$
$$+ F_i^2(\alpha_1) + F_i^2(\alpha_2) + \cdots + F_i^2(\alpha_{n-1}) + \frac{x_{m'-i}^2}{\Delta^2}.$$

Si l'on suppose D_{i-1} nul, on trouve, tout-à-fait comme précédemment, que $\Delta^2 D_i$ s'obtient en faisant la somme des carrés des divers déterminants que fournit le système:

$$\begin{matrix}
(\alpha_1)_1 & (\alpha_2)_1 & \ldots (\alpha_{n-1})_1 & (\beta_1,\gamma_1) & (\beta_2,\gamma_2)_1 & \ldots (\beta_{n'},\gamma_{n'}) \\
(\alpha_1)_2 & (\alpha_2)_2 & \ldots (\alpha_{n-1})_2 & (\beta_1,\gamma_1) & (\beta_2,\gamma_2)_2 & \ldots (\beta_{n'},\gamma_{n'}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(\alpha_1)_{m'-1-i} & (\alpha_2)_{m'-1-i} & \ldots (\alpha_{n-1})_{m'-1-i} & (\beta_1,\gamma_1)_{m'-1-i} & (\beta_2,\gamma_1)_{m'-1-i} & \ldots (\beta_{n'},\gamma_{n'})_{m'-1-i}
\end{matrix}$$

en employant $m'-1-i$ lignes verticales. Considérant donc dans la série des formes

$$F_1, \quad F_2, \quad \ldots \quad F_{m'-2},$$

la première de celles dont le déterminant ne s'évanouit point (et la dernière est toujours dans ce cas), on obtiendra absolument les mêmes résultats que ceux auxquels nous sommes parvenus tout-à-l'heure, puisque le déterminant D_i devient d'une petitesse arbitraire pour des valeurs suffisamment grandes de Δ.

Je ne sais, Monsieur, si ces résultats et la méthode que j'ai employée, sont connus, et nommément s'ils se trouvent déjà dans les travaux de M. *Kummer*, que Vous avez eu la bonté de m'indiquer. M. *Liouville* sans doute les publierait de suite dans son journal, si nous pouvions trouver un traducteur, et ce serait pour moi en particulier, un grand plaisir de prendre connaissance de ces recherches d'après ce que Vous m'en avez écrit. L'introduction du nombre complexe auquel M. *Kummer* donne le nom *d'idéal,* m'intéresserait surtout au plus haut degré.

P. S. L'expression des unités complexes au moyen d'un nombre déterminé d'entre elles, donne lieu à une remarque essentielle et que j'ai omise, lorsque les racines qui entrent dans leur composition, sont toutes imaginaires. L'analyse que j'ai employée, conduit alors de nouveau à isoler celles de ces unités dont le module analytique est *un,* si toutefois il en existe. C'est au reste le même résultat auquel je suis parvenu par une toute autre voie dans ma dernière lettre.

12.

Auszug zweier Schreiben des Herrn Prof. Hesse und eines Schreibens an Herrn Prof. Hesse.

Königsberg den 27. November 1849.

Ihr Brief ist mir von unschätzbarem Werthe, weil ich daraus Ihre alte Freundschaft entnehme, und er mir zugleich das bringt, wonach ich mich lange gesehnt habe. Sie schreiben von meiner Meisterschaft in gewissen mathematischen Dingen und beweisen gleich darauf, wie viel mir daran fehlt. Das lasse ich mir schon gerne gefallen, da dieser Beweis von unberechenbarem Nutzen für meine Bemühungen zu werden verspricht. Ich bedauere nichts mehr, als dafs 80 Meilen zwischen uns liegen, was mit einem halben Jahre gleichbedeutend ist. Im Sommer haben Sie den Beweis gemacht, der für mich vielleicht eine Lebensfrage ist, und im Winter erst kann ich ihn erfahren.

Reductionen der Art kommen in der Geometrie oft vor. *So läfst sich z. B. der Grad der Gleichung der Schmiegungs-Ebene einer Curve doppelter Krümmung, entstanden aus dem Schnitt zweier algebraischen Oberflächen, immer um 2 Einheiten in Rücksicht auf die Coordinaten des Berührungspunctes mit Hülfe der Gleichungen der beiden Oberflächen reduciren.* Die reducirten Gleichungen, zu weitläuftig hier hinzuschreiben, werde ich alsbald an das Journal schicken.

Ich erlaube mir noch in Rücksicht auf die Wendepuncte eine Bemerkung hinzuzufügen, die ich eben jetzt gemacht habe, und die mir interessant scheint. Wenn u eine homogene Function von $x, y, z,$ und wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

so ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}:\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}:\ldots:\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}:\ldots=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}:\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}:\ldots:\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}:\ldots,$$

wo v die aus den zweiten partiellen Differentialquotienten von u zusammengesetzte Determinante ist. Hieraus erklärt sich auch, warum in einen Doppelpunct immer 6 Wendepuncte zusammenfallen.

Mit dem innigen Wunsche Ihres Wohlergehens

Ihr treu ergebener Schüler

Otto Hesse.

Königsberg den 7. December 1849.

— — — Sie haben durch Ihren Beweis von den Doppeltangenten zugleich dargethan, dafs auch der Grad jedes Gliedes der Reihe

$$f(x+bh,\ y-ah) = \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 + \cdot\cdot,$$

wo $b = \frac{\partial f}{\partial y}$, $a = \frac{\partial f}{\partial x}$, mit Hülfe der Gleichung, $f(x, y) = 0$, sich um 2 Einheiten erniedrigen läfst. Wie sich aber durch diese Erniedrigung die Coëfficienten α_2, α_3, .. gestalten, läfst sich aus Ihren Andeutungen nicht schliefsen, (Sie haben das ja auch gar nicht gewollt) und doch wäre gerade die wirkliche Darstellung der reducirten α in einer einfachen Form für mich von der höchsten Wichtigkeit.

Schliefslich erwähne ich noch einer Eliminationsmethode zur Anwendung auf Curven 3ter und 4ter Ordnung. Ich habe mir nämlich die Aufgabe gestellt, die Gleichungen dieser Curven durch Liniencoordinaten auszudrücken, wenn sie in Punctcoordinaten gegeben sind, d. h. die Variabeln aus den 4 Gleichungen zu eliminiren:

$$(1.)\quad \frac{\partial u}{\partial x_1} = \alpha_1,\quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \alpha_2,\quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = \alpha_3,$$

$$(2.)\quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0,$$

wenn $u = 0$ die Gleichung der Curve ist. Zu diesem Zwecke bilde ich für die Curven 3ten Grades die Determinante v aus den Gröfsen

$$\begin{matrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} & \alpha_1 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} & \alpha_2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0, \end{matrix}$$

und eliminire die Variabeln x_1, x_2, x_3, λ aus den linearen Gleichungen

$$(2.)\quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

$$(3.)\quad \frac{\partial v}{\partial x_1} + \lambda\alpha_1 = 0,\quad \frac{\partial v}{\partial x_2} + \lambda\alpha_2 = 0,\quad \frac{\partial v}{\partial x_3} + \lambda\alpha_3 = 0.$$

Dieses Verfahren für die Curven 3ter Ordnung ist ein anderes als das, welches ich bereits bekannt gemacht habe und was auch *Cayley* bekannt gewesen sein soll.

In dem Falle, wenn $u=0$ eine Curve 4ter Ordnung ist, bilde ich aus der Gleichung (2.) 6 andere Gleichungen durch Multiplication mit x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2, und eliminire aus diesen 6 Gleichungen, den 3 Gleichungen (1.) und den 3 Gleichungen (3.), wie aus linearen Gleichungen, die 11 Unbekannten x_1^3, $x_1^2x_2$, . . und λ.

Otto Hesse.

Von dem ersten Satz Ihres gütigen Schreibens vom 27ten Nov. habe ich einen Beweis gesucht. Man hat die n identischen Gleichungen:

$$x_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_i}+x_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_i}\cdots+x_n\frac{\partial^2 u}{\partial x_n\partial x_i}=(m-1)\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

wenn u vom m^{ten} Grade ist. Durch ihre Auflösung erhalte man:

$$vx_i=(m-1)\left\{U_{1,i}\frac{\partial u}{\partial x_1}+U_{,i}\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdots+U_{n,i}\frac{\partial u}{\partial x_n}\right\},$$

wo $U_{i,k}=U_{k,i}$. Differentiirt man diese Gleichung nach x_k, so wird

$$\frac{\partial v}{\partial x_k}x_i=(m-1)\left\{\frac{\partial U_{1.i}}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial U_{2,i}}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdots+\frac{\partial U_{n,i}}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_n}\right\},$$

wo x_k von x_i verschieden. Differentiirt man nochmals nach x_l, so erhält man

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_k\partial x_l}x_i=(m-1)\left\{\frac{\partial^2 U_{1,i}}{\partial x_k\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 U_{2,i}}{\partial x_k\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdots+\frac{\partial^2 U_{n,i}}{\partial x_k\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_n}\right\}$$
$$-(m-1)\left\{U_{1,i}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial x_k\partial x_l}+U_{2,i}\frac{\partial^3 u}{\partial x_2\partial x_k\partial x_l}\cdots+U_{n,i}\frac{\partial^3 u}{\partial x_n\partial x_k\partial x_l}\right\}.$$

Wenn $l=i$, kommt rechts noch $(m-1)\frac{\partial v}{\partial x_k}$ hinzu.

Es sei jetzt

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=0,\quad \ldots \quad \frac{\partial u}{\partial x_n}=0,$$

so wird

$$\Delta=0,\quad \frac{\partial\Delta}{\partial x_k}=0,\quad U_{i,k}=Nx_ix_k,$$

wo N für sämmtliche Combinationen von i und k Dasselbe bleibt. Es folgt daher aus der zuletzt gefundnen identischen Gleichung:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_k\partial x_l}=-(m-1)(m-2)N.\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_l};$$

was Ihren Satz giebt.

C. G. J. Jacobi.

13.

Auszug mehrerer Schreiben des Hrn. Dr. Rosenhain über die hyperelliptischen Transcendenten.

I.

Dominium Wiersbel, Kreis Falkenberg in Oberschlesien
den 3. September 1844.

Meine Arbeit über die *dreifach* periodischen Functionen *) habe ich immer nur als eine Vorarbeit angesehen, die mir bei der Untersuchung der *vierfach* periodischen Functionen manchen Fingerzeig geben könnte. Diese Ansicht hat sich jetzt bei mir vollkommen befestigt. *Ich habe nämlich jetzt vierfach periodische Functionen, durch deren Differentiation man auf das hyperelliptische Integral,*

$$\int \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{(x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x))}},$$

kommt.

Sie erinnern sich vielleicht noch, dafs ich kurz vor meiner Abreise von Königsberg Ihnen unendliche Producte mittheilte, von denen ich vermuthete, dafs sie auf das hyperelliptische Integral führen würden, weil ich sie auf ähnliche Art aus den dreifach periodischen Functionen zusammengesetzt hatte, wie die doppelt periodischen aus den einfach periodischen zusammengesetzt werden. Nachdem ich mit meiner Habilitation in Breslau fertig war, nahm ich diesen Gedanken wieder auf. Ich sah aber bald, wie es sehr schwer sei, von diesen Producten aus durch wirkliche Ausführung der Multiplication auf einfache Reihen zu kommen. Ich versuchte mich daher lieber unmittelbar an den unendlichen Reihen selbst, und bildete mir dergleichen aus den dreifach periodischen Functionen (oder vielmehr aus ihren Zählern und Nennern) auf ähnliche Art, wie die Functionen ϑ aus der einfach periodischen Function zusammengesetzt werden. Diese Reihen konnten eben so behandelt werden, wie die Functionen ϑ von

---

*) Mit dieser nicht publicirten Arbeit hatte Hr. Dr. *Rosenhain* in Königsberg den Doctorgrad erworben. *J.*

Ihnen in Ihren Vorlesungen behandelt worden sind. Mit der gröfsesten Zuversicht, dafs ich wirklich auf das hyperelliptische Integral kommen würde, ging ich an die Arbeit, nachdem ich bemerkt hatte, dafs die eine der Reihen, aus welcher sich die übrigen 15 durch Vermehrung der Argumente um halbe Indices ergeben, wenn man von constanten Factoren absieht, die Form habe,

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{am^2+bn^2+2cmn+2dm+2en},$$

d. h. nichts anderes sei, als eine Summe von Exponentialgröfsen, deren Exponenten aus einem vollständigen Ausdruck zweiter Ordnung mit *zwei* Variablen dadurch erhalten werden, dafs man für die beiden Variablen alle positiven und negativen ganzen Zahlen setzt. Denn ähnlich war der Zähler von Δ am, den Sie in den Vorlesungen mit $\vartheta_3(v)$ bezeichnet haben,

$$\vartheta_3(v) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{am^2+2vm},$$

wo $a = \log q$, oder eine Summe von Exponentialgröfsen, deren Exponenten aus einem vollständigen Ausdruck 2ter Ordnung mit *einer* Variablen dadurch erhalten werden, dafs man für die Variable alle positiven und negativen ganzen Zahlen setzt.

Doch ich vergesse ganz, dafs ich Ihnen dergleichen nicht so weitläufig auszuführen brauche. Ich will Ihnen daher nur die Resultate kurz hinschreiben.

Es ist nach Ihrer Bezeichnungsart in den Vorlesungen,

$$\vartheta_3(v,p) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} p^{n^2}e^{2nv}, \qquad \vartheta_2(v,p) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} p^{(\frac{1}{2}(2n+1))^2}e^{(2n+1)v}$$

$$\vartheta(v,p) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n p^{n^2}e^{2nv}, \qquad \vartheta_1(v,p) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n p^{(\frac{1}{2}(2n+1))^2}e^{(2n+1)v}.$$

Wenn nun k irgend einen von den Indices 0, 1, 2, 3 dieser 4 Functionen ϑ bezeichnet, so sind die 16 neuen Reihen durch folgende Bezeichnungen gegeben:

$$\varphi_{k,3}(v,w,p,q) = \Sigma q^{n^2}e^{2nw}\vartheta_k(v+2n\alpha,p)$$
$$\varphi_{k,2}(v,w,p,q) = \Sigma q^{(\frac{1}{2}(2n+1))^2}e^{(2n+1)w}\vartheta_k(v+(2n+1)\alpha,p)$$
$$\varphi_{k,0}(v,w,p,q) = \Sigma(-1)^n q^{n^2}e^{2nw}\vartheta_k(v+2n\alpha,p)$$
$$\varphi_{k,1}(v,w,p,q) = \Sigma(-1)^n q^{(\frac{1}{2}(2n+1))^2}e^{(2n+1)w}\vartheta_k(v+(2n+1)\alpha,p),$$

oder auch

$$\varphi_{3,k}(v,w,p,q) = \Sigma p^{m^2} e^{2mv} \vartheta_k(w+2m\alpha, q)$$
$$\varphi_{2,k}(v,w,p,q) = \Sigma p^{(\frac{1}{2}(2m+1))^2} e^{(2m+1)v} \vartheta_k(w+(2m+1)\alpha, q)$$
$$\varphi_{0,k}(v,w,p,q) = \Sigma(-1)^m p^{m^2} e^{2mv} \vartheta_k(w+2m\alpha, q)$$
$$\varphi_{1,k}(v,w,p,q) = \Sigma(-1)^m p^{(\frac{1}{2}(2m+1))^2} e^{(2m+1)v} \vartheta_k(w+(2m+1)\alpha, q).$$

Wie Sie sehen, hat die Function

$$\varphi_{3,3}(v,w,p,q) = \Sigma\Sigma p^{m^2} q^{n^2} e^{4mn\alpha+2mv+2nw}$$

die Form der angegebenen Doppelsumme.

Diese Function φ habe ich nun auf ähnliche Art behandelt, wie Sie die Functionen ϑ behandelten, um von denselben aus auf das elliptische Integral zu kommen. Die Resultate dieser Arbeit sind bis jetzt ungefähr folgende.

Ich will kurz setzen $\varphi_{i,k}(v,w)$ statt $\varphi_{i,k}(v,w,p,q,\alpha)$ und $\varphi_{i,k}$ statt $\varphi_{i,k}(0,0,p,q,\alpha)$. Der Index i gehört zu v und p, der Index k zu w und q; der Modul α gehört sowohl zu v als zu w.

Setzt man

$$\varkappa = \frac{\varphi_{2,3}\varphi_{2,2}}{\varphi_{3,3}\varphi_{3,2}}, \quad \lambda = \frac{\varphi_{2,0}\varphi_{2,2}}{\varphi_{3,0}\varphi_{3,2}}, \quad \mu = \frac{\varphi_{2,0}\varphi_{2,3}}{\varphi_{3,0}\varphi_{3,3}},$$

woraus $\varkappa > \lambda > \mu$ folgt, und bedient man sich der von Herrn Prof. *Richelot* eingeführten Bezeichnungen,

$$\varkappa_1^2 = 1-\varkappa^2, \qquad = 1-\lambda^2, \qquad \mu_1^2 = 1-\mu^2$$
$$\mu_\varkappa^2 = \varkappa^2-\mu^2, \qquad \mu_\lambda^2 = \lambda^2-\mu^2, \qquad \lambda_\varkappa^2 = \varkappa^2-\lambda^2,$$

so wird

$$\varkappa_1 = \frac{\varphi_{0,3}\varphi_{0,2}}{\varphi_{3,3}\varphi_{3,2}}, \qquad \lambda_1 = \frac{\varphi_{0,0}\varphi_{0,2}}{\varphi_{3,0}\varphi_{3,2}}, \qquad \mu_1 = \frac{\varphi_{0,0}\varphi_{0,3}}{\varphi_{3,0}\varphi_{3,3}}$$
$$\mu_\varkappa = \frac{\varphi_{1,1}\varphi_{0,3}\varphi_{2,3}}{\varphi_{3,0}\varphi_{3,2}\varphi_{3,3}}, \qquad \lambda_\varkappa = \frac{\varphi_{1,1}\varphi_{0,2}\varphi_{2,2}}{\varphi_{3,0}\varphi_{3,2}\varphi_{3,3}}, \qquad \mu_\lambda = \frac{\varphi_{1,1}\varphi_{0,0}\varphi_{2,0}}{\varphi_{3,0}\varphi_{3,2}\varphi_{3,3}}.$$

Damit Sie alle Formeln, die sich auf die Moduln beziehen, beisammen haben, bemerke ich noch folgende, die sich aus den vorstehenden Formeln ergeben

$$\frac{\varphi_{0,0}^2}{\varphi_{3,3}^2} = \frac{\varkappa\mu_1\mu_\lambda}{\lambda\mu_\varkappa}, \qquad \frac{\varphi_{0,2}^2}{\varphi_{3,3}^2} = \frac{\mu\varkappa_1\lambda_\varkappa}{\lambda\mu_\varkappa}, \qquad \frac{\varphi_{0,3}^2}{\varphi_{3,3}^2} = \frac{\mu_1\varkappa_1}{\lambda_1}$$
$$\frac{\varphi_{1,1}^2}{\varphi_{3,3}^2} = \frac{\lambda_\varkappa\mu_\lambda}{\lambda\lambda_1}, \qquad \frac{\varphi_{2,2}^2}{\varphi_{3,3}^2} = \frac{\varkappa\mu_1\lambda_\varkappa}{\lambda_1\mu_\varkappa}, \qquad \frac{\varphi_{2,0}^2}{\varphi_{3,3}^2} = \frac{\mu\varkappa_1\mu_\lambda}{\lambda_1\mu_\varkappa}$$
$$\frac{\varphi_{2,3}^2}{\varphi_{3,3}^2} = \frac{\varkappa\mu}{\lambda}, \qquad \frac{\varphi_{3,0}^2}{\varphi_{3,3}^2} = \frac{\varkappa\varkappa_1\mu_\lambda}{\lambda\lambda_1\mu_\varkappa}, \qquad \frac{\varphi_{3,2}^2}{\varphi_{3,3}^2} = \frac{\mu\mu_1\lambda_\varkappa}{\lambda\lambda_1\mu_\varkappa}.$$

Setzt man ferner

$$1)\quad \frac{1}{\varkappa\lambda\mu}\cdot\frac{\varphi^2_{1,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = -x_1x_2$$

$$2)\quad \frac{\varkappa_1\lambda_1\mu_1}{\varkappa\lambda\mu}\cdot\frac{\varphi^2_{2,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = -(1-x_1)(1-x_2),$$

so wird:

$$3)\quad \varkappa_1\lambda_1\mu_1\cdot\frac{\varphi^2_{3,0}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

$$= -\left\{\frac{\sqrt{[x_2(1-x_2)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1)]}\pm\sqrt{[x_1(1-x_1)(1-\varkappa^2x_2)(1-\lambda^2x_2)(1-\mu^2x_2)]}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

$$4)\quad \frac{\varkappa_1\lambda_\varkappa\mu_\varkappa}{\lambda\mu}\cdot\frac{\varphi^2_{3,1}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = (1-\varkappa^2x_1)(1-\varkappa^2x_2)$$

$$5)\quad \frac{\lambda_1\lambda_\varkappa\mu_\lambda}{\varkappa\mu}\cdot\frac{\varphi^2_{3,2}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = (1-\lambda^2x_1)(1-\lambda^2x_2)$$

$$6)\quad \frac{\mu_1\mu_\varkappa\mu_\lambda}{\varkappa\lambda}\cdot\frac{\varphi^2_{3,3}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)} = (1-\mu^2x_1)(1-\mu^2x_2)$$

$$7)\quad \frac{\lambda_1\mu_1\lambda_\varkappa\mu_\varkappa}{\lambda\mu}\cdot\frac{\varphi^2_{0,1}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

$$= -\left\{\frac{\sqrt{[(1-\lambda^2x_2)(1-\mu^2x_2)x_1(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)]}\pm\sqrt{[(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1)x_2(1-x_2)(1-\varkappa^2x_1)]}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

$$8)\quad \frac{\varkappa_1\mu_1\lambda_\varkappa\mu_\lambda}{\varkappa\mu}\cdot\frac{\varphi^2_{0,2}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

$$= -\left\{\frac{\sqrt{[(1-\varkappa^2x_2)(1-\mu^2x_2)x_1(1-x_1)(1-\lambda^2x_1)]}\pm\sqrt{[(1-\varkappa^2x_1)(1-\mu^2x_1)x_2(1-x_2)(1-\lambda^2x_1)]}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

$$9)\quad \frac{\varkappa_1\lambda_1\mu_\varkappa\mu_\lambda}{\varkappa\lambda}\cdot\frac{\varphi^2_{0,3}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

$$= -\left\{\frac{\sqrt{[(1-\varkappa^2x_2)(1-\lambda^2x_2)x_1(1-x_1)(1-\mu^2x_1)]}\pm\sqrt{[(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)x_2(1-x_2)(1-\mu^2x_1)]}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

$$10)\quad \frac{\lambda_1\mu_1\lambda_\varkappa\mu_\varkappa}{\varkappa}\cdot\frac{\varphi^2_{1,1}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

$$= \left\{\frac{\sqrt{[(1-x_2)(1-\varkappa^2x_2)x_1(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1)]}\pm\sqrt{[(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)x_2(1-\lambda^2x_2)(1-\mu^2x_1)]}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

$$11)\quad \frac{\varkappa_1\mu_1\lambda_\varkappa\mu_\lambda}{\lambda}\cdot\frac{\varphi^2_{1,2}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

$$= \left\{\frac{\sqrt{[(1-x_2)(1-\lambda^2x_2)x_1(1-\varkappa^2x_1)(1-\mu^2x_1)]}\pm\sqrt{[(1-x_1)(1-\lambda^2x_1)x_2(1-\varkappa^2x_2)(1-\mu^2x_1)]}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

$$12)\quad \frac{\varkappa_1\lambda_1\mu_\varkappa\mu_\lambda}{\mu}\cdot\frac{\varphi^2_{1,3}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

$$=\left\{\frac{\sqrt{[(1-x_2)(1-\mu^2x_2)x_1(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)]}\pm\sqrt{[(1-x_1)(1-\mu^2x_1)x_2(1-\varkappa^2x_2)(1-\lambda^2x_2)]}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

$$13)\quad \frac{\varkappa_1\lambda_\varkappa\mu_\varkappa}{\varkappa}\cdot\frac{\varphi^2_{2,1}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

$$=\left\{\frac{\sqrt{[x_2(1-\varkappa^2x_2)(1-x_1)(1-\lambda^2x_1)(1-\mu^2x_1)]}\pm\sqrt{[x_1(1-\varkappa^2x_1)(1-x_2)(1-\lambda^2x_2)(1-\mu^2x_2)]}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

$$14)\quad \frac{\lambda_1\lambda_\varkappa\mu_\lambda}{\lambda}\cdot\frac{\varphi^2_{2,2}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

$$=\left\{\frac{\sqrt{[x_2(1-\lambda^2x_2)(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\mu^2x_1)]}\pm\sqrt{[x_1(1-\lambda^2x_1)(1-x_2)(1-\varkappa^2x_2)(1-\mu^2x_2)]}}{x_2-x_1}\right\}^2$$

$$15)\quad \frac{\mu_1\mu_\varkappa\mu_\lambda}{\mu}\cdot\frac{\varphi^2_{2,3}(v,w)}{\varphi^2_{0,0}(v,w)}$$

$$=\left\{\frac{\sqrt{[x_2(1-\mu^2x_2)(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)]}\pm\sqrt{[x_1(1-\mu^2x_1)(1-x_2)(1-\varkappa^2x_2)(1-\lambda^2x_2)]}}{x_2-x_1}\right\}^2.$$

Diese 15 algebraischen Ausdrücke von x_1 und x_2 sind genau dieselben, von welchen ich in meiner Doctordissertation die Vermuthung aussprach, dafs sie sich sämmtlich auf gleich einfache Art als gebrochene transcendente Functionen der zwei Argumente v und w würden darstellen lassen, und zwar mit gemeinschaftlichem Nenner.

Die partiellen Differentialquotienten von $\sqrt{(x_1x_2)}$ und $\sqrt{[(1-x_1)(1-x_2)]}$ kann man sehr bequem darstellen. Man setze

$$du=\frac{1-\lambda^2x_1}{\sqrt{(x_1,\varkappa,\lambda,\mu)}}dx_1+\frac{1-\lambda^2x_2}{\sqrt{(x_2,\varkappa,\lambda,\mu)}}dx_2$$

$$du'=\frac{1-\mu^2x_1}{\sqrt{(x_1,\varkappa,\lambda,\mu)}}dx_1+\frac{1-\mu^2x_2}{\sqrt{(x_2,\varkappa,\lambda,\mu)}}dx_2,$$

wo

$$(x,\varkappa,\lambda,\mu)=x(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)$$

ist; dann erhält man unmittelbar

$$2\mu_\lambda^2\frac{\partial\sqrt{(x_1x_2)}}{\sqrt{[(1-\mu^2x_1)(1-\mu^2x_2)]}\,\partial u}$$

$$=\frac{\sqrt{[x_2(1-\mu^2x_2)(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)]}-\sqrt{[x_1(1-\mu^2x_1)(1-x_2)(1-\varkappa^2x_2)(1-\lambda^2x_2)]}}{x_2-x_1}$$

$$-2\mu_\lambda^2\frac{\partial\sqrt{[(1-x_1)(1-x_2)]}}{\sqrt{[(1-\mu^2x_1)(1-\mu^2x_2)]}\,\partial u}$$

$$=\frac{\sqrt{[(1-x_2)(1-\mu^2x_2)x_1(1-\varkappa^2x_1)(1-\lambda^2x_1)]}-\sqrt{[(1-x_1)(1-\mu^2x_1)x_2(1-\varkappa^2x_2)(1-\lambda^2x_2)]}}{x_2-x_1}$$

$$-2\mu_\lambda^2\frac{\partial\sqrt{(x_1x_2)}}{\sqrt{[(1-\lambda^2x_1)(1-\lambda^2x_2)]}\,\partial u'}$$

$$=\frac{\sqrt{[x_2(1-\lambda^2x_2)(1-x_1)(1-\varkappa^2x_1)(1-\mu^2x_1)]}-\sqrt{[x_1(1-\lambda^2x_1)(1-x_2)(1-\varkappa^2x_2)(1-\mu^2x_1)]}}{x_2-x_1}$$

$$2\mu_\lambda^2\frac{\partial\sqrt{[(1-x_1)(1-x_2)]}}{\sqrt{[(1-\lambda^2x_1)(1-\lambda^2x_2)]}\,\partial u'}$$

$$=\frac{\sqrt{[(1-x_2)(1-\lambda^2x_2)x_1(1-\varkappa^2x_1)(1-\mu^2x_1)]}-\sqrt{[(1-x_1)(1-\lambda^2x_1)x_2(1-\varkappa^2x_2)(1-\mu^2x_2)]}}{x_2-x_1}$$

Wird dann gesetzt,

$$du = Adv+Bdw$$
$$du' = A'dv+B'dw,$$

so ergiebt sich

$$(A.)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial\sqrt{(x_1x_2)}}{\partial v} = A\dfrac{\partial\sqrt{(x_1x_2)}}{\partial u}+A'\dfrac{\partial\sqrt{(x_1x_2)}}{\partial u'}\\[2ex]\dfrac{\partial\sqrt{(x_1x_2)}}{\partial w} = B\dfrac{\partial\sqrt{(x_1x_2)}}{\partial u}+B'\dfrac{\partial\sqrt{(x_1x_2)}}{\partial u'},\end{cases}$$

und Ähnliches für $\sqrt{[(1-x_1)(1-x_2)]}$.

Die Differentialquotienten von $\sqrt{(x_1x_2)}$ und $\sqrt{[(1-x_1)(1-x_2)]}$ stellen sich je als Producte von zwei jener 15 gleichberechtigten algebraischen Ausdrücke von x_1 und x_2 dar. Wenn Sie daher in den Gleichungen (*A.*) statt x_1 und x_2 die Ausdrücke in v und w substituiren, so erhalten Sie die Differentialquotienten von

$$\frac{\varphi_{1,0}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)},\quad\frac{\varphi_{2,0}(v,w)}{\varphi_{0,0}(v,w)}$$

durch die übrigen Functionen φ dargestellt. Die Ausdrücke für diese Differentialquotienten, wie auch die oben mitgetheilten Werthe der übrigen 13 algebraischen Ausdrücke, habe ich gefunden, indem ich genau denselben Weg einschlug, auf welchem Sie uns in den Vorlesungen von den Functionen ϑ zu den elliptischen Integralen geführt haben.

Von den 16 Functionen $\varphi_{i,k}(v, w)$ verschwinden für $v = w = 0$ die 6 folgenden,

$$\varphi_{1,0}(v, w),\quad \varphi_{0,1}(v, w),\quad \varphi_{1,2}(v, w),$$
$$\varphi_{2,1}(v, w),\quad \varphi_{1,3}(v, w),\quad \varphi_{3,1}(v, w),$$

als ungerade Functionen der Variabeln v und w. Die Constanten A, B, A', B', welche Functionen der drei Moduln $\varkappa$, λ, μ oder der Gröfsen p, q, α sind, setzen sich nun aus den Werthen zusammen, welche die 10 Functionen φ, die für $v = w = 0$ nicht verschwinden, und die Differentialquotienten der für diese Annahme verschwindenden 6 Functionen φ, für $v = w = 0$ annehmen. Vier von diesen 6 Functionen lassen sich auf die beiden übrigen zurückführen, so dafs im Ganzen in den Ausdrücken von A, A', B, B' noch die Werthe zu bestimmen übrig bleiben, welche die 4 partiellen Differentialquotienten von 2 jener 6 Functionen φ für $v = w = 0$ annehmen. Es ist zu vermuthen, dafs auch diese Werthe der Differentialquotienten sich auf eine einfache Art auf die Werthe der andern 10 Functionen φ für $v = w = 0$ zurückführen lassen werden, nach Analogie Ihrer Gleichung $\vartheta_1'(0) = \vartheta(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)$; doch ist mir bis jetzt diese Reduction noch nicht gelungen.

Über die Intervalle, in welchen die Grenzen x_1 und x_2 liegen, und über die Indices der Perioden, erlaube ich mir, noch einige Bemerkungen hinzuzufügen.

Wenn v und w beide *reell* sind, so liegt x_1 zwischen $-\infty$ und 0, x_2 zwischen 1 und $\frac{1}{\varkappa^2}$. Wenn aber v und w beide den Factor $\sqrt{-1}$ haben, so liegt x_1 zwischen 0 und 1, x_2 zwischen $\frac{1}{\varkappa^2}$ und $\frac{1}{\lambda^2}$. Durch Änderungen von v und w um die halben Indices der Perioden kommen die Grenzen x_1 und x_2 in andere Intervalle zu liegen.

Was die *Periodicität* betrifft, so sind die 4 Indices von v:

$$i\pi,\quad 0,\quad \log p,\quad 2\alpha,$$

denen nach der Reihe die Indices von w:

$$0,\quad i\pi,\quad 2\alpha,\quad \log q$$

entsprechen. Ich habe noch nicht streng untersucht, zwischen welchen Grenzen die ganzen Integrale zu nehmen sind, damit sie diesen Werthen gleich werden, oder vielmehr, welchem von den 8 ganzen Integralen jeder der 8 Indices von v und w gleich wird. Man kann sich aber a, b, a', b' immer so bestimmt denken, dafs

$$2\int_0^1 \frac{a+bx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\,dx = \pi, \qquad 2\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{a+bx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\,dx = 0$$

$$2\int_0^1 \frac{a'+b'x}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\,dx = 0, \qquad 2\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{a'+b'x}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\,dx = \pi.$$

Dann müssen p, q, α, wenn man mit ε und ε_1 die positive oder negative Einheit bezeichnet, den Gleichungen

$$2\varepsilon\int_{-\infty}^{0} \frac{a+bx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\,dx = i\log p, \qquad 2\varepsilon_1\int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{a+bx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\,dx = 2i\alpha,$$

$$2\varepsilon\int_{-\infty}^{0} \frac{a'+b'x}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\,dx = 2i\alpha, \qquad 2\varepsilon_1\int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{a'+b'x}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\,dx = i\log q$$

genügen; und dazu ist die Bedingungsgleichung

$$\varepsilon\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}} - \varepsilon\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}$$

$$= \varepsilon_1\int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}} - \varepsilon_1\int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dx}{\sqrt{(x,\varkappa,\lambda,\mu)}}$$

erforderlich, die auch unter der Form,

$$\varepsilon\int_{-\infty}^{0}\int_0^1 \frac{(y-z)\,dy\,dz}{\sqrt{(y,\varkappa,\lambda,\mu)}\sqrt{(z,\varkappa,\lambda,\mu)}} = -\varepsilon_1\int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}}\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{(y-z)\,dy\,dz}{\sqrt{(y,\varkappa,\lambda,\mu)}\sqrt{(z,\varkappa,\lambda,\mu)}},$$

dargestellt werden kann.

Diese Gleichung ist entweder eine *identische*, oder aber die Moduln $\varkappa$, λ, μ wären nicht alle drei willkürlich anzunehmen, sondern einer als Function der beiden andern aus dieser Gleichung bestimmt. Da ich nicht im Stande war, von vorn herein der Gleichung anzusehen, ob sie identisch sei, oder nicht, so liefs ich vorläufig die Sache auf sich beruhen, und absolvirte zuerst den Beweis, dafs die Functionen φ wirklich auf ein hyperelliptisches Integral führen. Nachdem dies geschehen ist, und ich wenigstens zwischen den für $\varkappa$, λ, μ angenommenen Werthen,

$$\varkappa = \frac{\varphi_{2,3}\varphi_{2,2}}{\varphi_{3,3}\varphi_{3,2}}, \qquad \lambda = \frac{\varphi_{2,0}\varphi_{2,2}}{\varphi_{3,0}\varphi_{3,2}}, \qquad \mu = \frac{\varphi_{2,0}\varphi_{2,3}}{\varphi_{3,0}\varphi_{3,3}},$$

keine Relation entdecken kann, soll es nun meine nächste Arbeit sein, die Gleichung zwischen den Doppel-Integralen zu untersuchen. Ich halte es für das Gerathenste, zu diesem Zwecke das *Abel*sche Theorem auf Doppel-Integrale auszudehnen, worüber Sie einen Fingerzeig in Ihrer Recension von *Legendres* „Traité" gegeben haben. Es ist anzunehmen, dafs auch zwischen den vielfachen bestimmten Integralen hier Relationen Statt finden. Eine derselben ist schon von *Haedenkamp*, nachdem Sie das Resultat vorher erwähnt hatten, im *Crelle*schen Journal bekannt gemacht. So viel ich mich erinnere, ist es für die nächste Gattung hyperelliptischer Integrale ein 6faches Integral, das dort $\frac{1}{2}\pi$ proportional gefunden wird, und die Erweiterung der Relation ist, welche zwischen den ganzen elliptischen Integralen der ersten und zweiten Gattung Statt findet.

Wird $\lambda = \mu = 0$ gesetzt, so wird die in Rede stehende Gleichung von selbst erfüllt, wenn $\varepsilon = -\varepsilon_1$ gesetzt wird.

Es wäre vom höchsten Interesse, nun auch die Reihen

$$\Sigma e^{f(m_1, m_2, m_3, .. m_{n-1})}$$

zu untersuchen, in denen $f(m_1, m_2, m_3, .. m_{n-1})$ eine vollständige rationale ganze Function der $n-1$ Gröfsen $m_1, m_2, m_3, .. m_{n-1}$ vom zweiten Grade bedeutet, und die Summe Σ so zu nehmen ist, dafs diesen $n-1$ Gröfsen die Werthe aller ganzen positiven und negativen Zahlen beigelegt werden. Nach der Analogie der elliptischen und der ersten Classe der hyperelliptischen Integrale sollte man erwarten, dafs diese Reihen auf das hyperelliptische Integral der $(n-2)$ten Classe führen werden, in welchem die Gröfse unter dem Wurzelzeichen auf den $(2n)$ten oder $(2n-1)$ten Grad steigt. Dieses Integral hat aber nur $2n-3$ von einander unabhängige Moduln, während in der Reihe, wenn man die $(n-1)$ Coëfficienten der *ersten* Potenzen der $n-1$ Gröfsen m_υ als die $n-1$ *Argumente* betrachtet, $\frac{1}{2}(n-1)n$ *Moduln* vorkommen; wenn man nämlich Moduln die in die *zweiten* Potenzen der Zahlen m_υ multiplicirten Gröfsen nennt. Man sieht leicht, dafs diese Reihen sich auf dieselbe Art behandeln lassen, wie die ϑ und φ, indem man nämlich den Satz, dafs sich eine Summe von 4 Quadraten noch einmal als Summe von 4 andern Quadraten darstellen läfst, auch hier in Anwendung bringen kann. Es ist daher ein Weg da, um auch von diesen Reihen auf die zugehörigen Integrale zu kommen. Für die nächste Reihe mit drei Argumenten

$$\Sigma e^{am^2+bn^2+ck^2+2dnk+2ekm+2fmn+2um+2vn+2wk},$$

welche auf die Form,

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} . r^{k^2} e^{2kw} \varphi_{3,3}(u+2k\beta,\ v+2k\gamma,\ p,\ q,\ \alpha),$$

zurückkommt, wird sich die Sache mit Hülfe der für die Function φ schon gefundenen Formeln ohne gar zu grofse Schwierigkeit ausführen lassen. Indessen werde ich auf jeden Fall erst die Functionen φ von 2 Variabeln zu ergründen suchen; vielleicht eröffnet sich mir dadurch ein neuer Gesichtspunct für den Gegenstand. Der Weg, von den Reihen zu den Integralen überzugehen, wird bei einer gröfsern Anzahl Variabeln nicht etwa wegen der Methode, sondern wegen der ungeheuern Anzahl von Formeln, aus welchen man die passenden heraussuchen mufs, so sehr unangenehm. Schon bei den Functionen φ war die Aufgabe nicht ohne Schwierigkeit, und nur die Analogie mit den Functionen ϑ und die Vorarbeit über die dreifach periodischen Functionen setzten mich in den Stand, mich schneller in dem Labyrinthe von Formeln zurechtzufinden.

II.

Breslau, den 13. Mai 1846.

Was die noch in Frage stehende Relation zwischen den Indices der vier Perioden betrifft, so habe ich versucht, ob die Ausdehnung des *Abel*schen Theorems auf Doppel-Integrale, welche Sie mir bei meiner Anwesenheit in Berlin mitzutheilen die Güte hatten, das geeignete Instrument zur Erledigung dieser Untersuchung sei. Es handelt sich hier freilich nur um die Vergleichung *zweier* Doppel-Integrale; allein die Ansätze können hiezu sehr verschieden gemacht werden, und es ist im Allgemeinen eine sehr verwickelte Aufgabe, über die Realität und die Grenzen der Intervalle der Wurzeln von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten Rechenschaft zu geben.

Bezeichnen X und Y die Ausdrücke,

$$X = (a_1-x)(a_2-x)(a_3-x)(a_4-x)(a_5-x)(a_6-x)$$
$$Y = (a_1-y)(a_2-y)(a_3-y)(a_4-y)(a_5-y)(a_6-y),$$

so haben die Integrale, um welche es sich handelt, die Form

$$\iint\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(XY)}}.$$

Die Summe zweier solcher Integrale soll gleich 0 werden. Die zu integrirende Function ist aber in Bezug auf x und y symmetrisch. Setzt man daher

$$(x-a)(y-a) = t, \qquad (x-b)(y-b) = u,$$

und führt statt x und y die neuen Variabeln t und u ein, so verwandelt sich das zu untersuchende Integral in

$$\iint\frac{dt\,du}{\sqrt{F(t,u)}},$$

wo $F(t,u)$ das Product aus 6 Factoren von der Form $A+Bt+Cu$ ist.

Zwei Gattungen von Ansätzen habe ich nun vorzüglich untersucht. Der eine ist von der Form:

$$f(x,y) = (a_1-x)(a_2-x)(\beta-y)^2-\gamma^2.(a_3-x)(a_4-x)(a_5-y)(a_6-y) = 0$$
$$\varphi(x,y) = (a_1-y)(a_2-y)(\beta-x)^2-\gamma^2.(a_3-y)(a_4-y)(a_5-x)(a_6-x) = 0,$$

wo $\varphi(x,y) = f(y,x)$. Für jedes Paar conjugirter Wurzeln x, y der beiden Gleichungen, $f=0$, $\varphi=0$, erhält man die Gleichung

$$\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(X.Y)}} = \frac{\gamma(x-y)^2\,d\beta\,d\gamma}{f'(x)\varphi'(y)-f'(y)\varphi'(x)}.$$

Die Ausdrücke

$$\frac{f(x,y)-\varphi(x,y)}{x-y},\quad \frac{xf(x,y)-y\varphi(x,y)}{x-y},\quad \frac{yf(x,y)-x\varphi(x,y)}{x-y}$$

werden aber symmetrische Functionen von x und y, d. h. ganze rationale Functionen der beiden Gröfsen

$$t=(x-a)(y-a),\quad u=(x-b)(y-b),$$

und zwar der erste Ausdruck in Bezug auf t und u vom ersten, die anderen beiden sind vom zweiten Grade. Ferner hat man

$$f'(x)\varphi'(y)-\varphi'(x)f'(y)=(b-a)(x-y)^2\{\chi'(t)\psi'(u)-\psi'(t)\chi'(u)\},$$

wenn

$$\frac{f(x,y)-\varphi(x,y)}{x-y}=\chi(t,u),$$

$$\frac{xf(x,y)-y\varphi(x,y)}{x-y}=\psi(t,u)$$

gesetzt wird.

Aus der oben aufgestellten Differentialgleichung erhält man daher nach einem bekannten Verfahren die Summe zweier Integrale von der Form $\iint\frac{dt\,du}{\sqrt{(F(t,u))}}$ gleich 0, wenn man als Grenzen die Werthe nimmt, welche die beiden Wurzelpaare der Gleichungen

$$\chi(t,u)=0,\quad \psi(t,u)=0$$

für die Grenzwerthe der beiden variabeln Coëfficienten β und γ annehmen. Die Anzahl der Ansätze von dieser Form ist sehr grofs, weil man in denselben die Constanten a_1, a_2, .. a_6 auf sehr verschiedene Arten mit einander vertauschen kann. Ich habe aber unter ihnen keinen finden können, bei welchem die Grenzen der Integrale sämmtlich in die verlangten Intervalle zu liegen kommen.

In der anderen Gattung von Ansätzen, welche ich betrachtet habe, sind die Functionen $f(x,y)$ und $\varphi(x,y)$ von der Form

$$f(x,y)=(a_1-x)(a_1-y)-m(a_2-x)(a_2-y)$$

$$\varphi(x,y)=(a_3-x)(a_3-y)(a_5-x)(a_5-y)-n.(a_4-x)(a_4-y)(a_6-x)(a_6-y),$$

wo m und n oder vielmehr $\sqrt{m}$ und $\sqrt{n}$ die neuen Variabeln sind. Hier sind f und φ geradezu symmetrische Functionen von x und y und daher ganze

rationale Functionen von t und u: f vom *ersten* und φ vom *zweiten* Grade; mithin erhält man aus diesem Ansatze wiederum die Summe von nur 2 Integralen der angegebenen Form gleich 0. Er führt indefs eben so wenig zum gewünschten Ziele, als andere weniger regelmäfsige, an welchen ich mich ebenfalls längere Zeit versucht habe.

Ich entschlofs mich nun endlich, die Richtigkeit der in Frage stehenden Gleichung durch *Reihen-Entwicklung* zu prüfen. Ich hatte einige Scheu vor dieser Arbeit, weil die Methoden einer solchen Entwicklung nicht gerade auf der Hand liegen. Nicht ohne viele Mühe und nach mancher beschwerlichen Rechnung gelangte ich endlich zu den Reihen für die 8 einfachen Integrale, aus welchen sich die beiden zu untersuchenden Doppel-Integrale zusammensetzen, und hatte nun die Freude, die in Frage stehende Relation in den 4 ersten Gliedern, welche ich berechnet hatte, wirklich bestätigt zu finden.

Ich versuchte jetzt wieder auf's neue das *Abel*sche Theorem, das ich auf alle mir zu Gebote stehende Arten handhabte, auch durch andere Methoden, wie rationale Substitutionen, welche ich unmittelbar auf das Doppel-Integral $\iint \frac{dt\,du}{\sqrt{F(t,u)}}$ anzuwenden versuchte; aber vergeblich. Vielleicht ist der Weg, welchen ich eingeschlagen habe, ein ganz falscher. Denn es ist ja gar nicht nothwendig, dafs diese Relation zwischen den bestimmten Integralen sich aus einer Gleichung zwischen unbestimmten Integralen müsse ableiten, und diese letztere sich durch eine *algebraische* Relation zwischen den Variabeln müsse ersetzen lassen; und dies habe ich bei diesen Versuchen immer stillschweigend vorausgesetzt. Ich habe deshalb zuletzt die Methode anzuwenden versucht, welche *Legendre* zum Beweise der Relation zwisehen den ganzen elliptischen Integralen von der ersten und zweiten Gattung gebraucht hat, nemlich die Differentiation nach den Moduln. Ich schreckte aber bald vor der Complication der Rechnung zurück.

Nun noch Einiges über die Art, wie ich die Reihen-Entwicklung angestellt habe. Wenn, wie vorher,

$$X = (a_1-x)(a_2-x)(a_3-x)(a_4-x)(a_5-x)(a_6-x)$$
$$Y = (a_1-y)(a_2-y)(a_3-y)(a_4-y)(a_5-y)(a_6-y)$$

gesetzt wird, und

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$$

ist, so hat man nach Ihrem Theorem:

37 *

$$\int_{a_1}^{a_2}\frac{dx}{\sqrt{(-X)}}-\int_{a_3}^{a_4}\frac{dx}{\sqrt{(-X)}}+\int_{a_5}^{a_6}\frac{dx}{\sqrt{(-X)}}=0$$

$$\int_{a_2}^{a_3}\frac{dx}{\sqrt{X}}-\int_{a_4}^{a_5}\frac{dx}{\sqrt{X}}+\int_{a_6}^{a_1}\frac{dx}{\sqrt{X}}=0$$

$$\int_{a_1}^{a_2}\frac{x\,dx}{\sqrt{(-X)}}-\int_{a_3}^{a_4}\frac{x\,dx}{\sqrt{(-X)}}+\int_{a_5}^{a_6}\frac{x\,dx}{\sqrt{(-X)}}=0$$

$$\int_{a_2}^{a_3}\frac{x\,dx}{\sqrt{X}}-\int_{a_4}^{a_5}\frac{x\,dx}{\sqrt{X}}+\int_{a_6}^{a_1}\frac{x\,dx}{\sqrt{X}}=0,$$

und hieraus erhält man unmittelbar,

$$M=\int_{a_1}^{a_2}\int_{a_2}^{a_3}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-XY)}}-\int_{a_4}^{a_5}\int_{a_5}^{a_6}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-XY)}}$$

$$=\int_{a_3}^{a_4}\int_{a_4}^{a_5}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-XY)}}+\int_{a_6}^{a_1}\int_{a_1}^{a_2}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-XY)}}$$

$$=\int_{a_5}^{a_6}\int_{a_6}^{a_1}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-XY)}}-\int_{a_2}^{a_3}\int_{a_3}^{a_4}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-XY)}}.$$

$M=0$ ist die Relation zwischen den ganzen Integralen, um welche es sich handelt. Für die canonische Form ist

$$a_1=\pm\infty,\quad a_2=0,\quad a_3=1,\quad a_4=\frac{1}{\varkappa^2},\quad a_5=\frac{1}{\lambda^2},\quad a_6=\frac{1}{\mu^2},$$

und daher werden, wenn

$$X=x(1-x)(1-\varkappa^2x)(1-\lambda^2x)(1-\mu^2x)=(x,\varkappa,\lambda,\mu)$$

gesetzt wird, die drei Formen des Ausdrucks M folgende:

$$M=\int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{1}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-(x,\varkappa,\lambda,\mu).(y,\varkappa,\lambda,\mu))}}-\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}}\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-(x,\varkappa,\lambda,\mu).(y,\varkappa,\lambda,\mu))}}$$

$$M=\int_{1}^{\frac{1}{\varkappa^2}}\int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-(x,\varkappa,\lambda,\mu).(y,\varkappa,\lambda,\mu))}}+\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-(x,\varkappa,\lambda,\mu)(y,\varkappa,\lambda,\mu))}}$$

$$M=\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-(x,\varkappa,\lambda,\mu).(y,\varkappa,\lambda,\mu))}}-\int_{0}^{1}\int_{1}^{\frac{1}{\varkappa^2}}\frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-(x,\varkappa,\lambda,\mu)(y,\varkappa,\lambda,\mu))}}.$$

Ich habe nun die dritte Form des Ausdrucks M gewählt und sie nach Potenzen von $\lambda^2-\mu^2$ entwickelt. Zur Reihen-Entwicklung habe ich mich

einer von *Dirichlet* bei den elliptischen Integralen angewandten Methode bedient, welche mir *Joachimsthal* vor längerer Zeit mitgetheilt hat. Sie beruht auf der Gleichung

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2} = \frac{\pi}{2ab}.$$

Sind nämlich a und b irrationale Functionen von x, z. B. $a = \sqrt{(1-x^2)}$, $b = \sqrt{(1-\varkappa^2 x^2)}$, so hat man

$$\tfrac{1}{2}\pi \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2))}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^1 \frac{d\varphi\, dx}{(1-x^2)\cos\varphi^2 + (1-\varkappa^2 x^2)\sin\varphi^2}$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^1 \frac{d\varphi\, dx}{1 - x^2 \varDelta^2(\varphi, \varkappa_1)}.$$

Die Integration wird nun zuerst in Bezug auf x ausgeführt; dann wird nach Potenzen von $\varkappa_1^2 = 1 - \varkappa^2$ entwickelt und jeder einzelne Term der Entwicklung in Bezug auf φ integrirt; und so erhält man die von *Legendre* gegebene Entwicklung von $F^1 = K$ für den Fall, wo $\varkappa$ nahe an 1 liegt.

Ich bin in meinem Falle von dem dreifachen Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_{x_0}^{x_1} \frac{(\alpha + \beta x^2)\, d\varphi\, d\psi\, dx}{(A^2\cos\varphi^2 + B^2\sin\varphi^2)(C^2\cos\psi^2 + D^2\sin\psi^2)} = \tfrac{1}{4}\pi^2 \int_{x_0}^{x} \frac{(\alpha + \beta x^2)\, dx}{ABCD}$$

ausgegangen, indem ich

$$A^2 = x^2 - 1, \quad B^2 = \varkappa^2 x^2 - 1, \quad C^2 = \mu^2 x^2 - 1, \quad D^2 = \lambda^2 x^2 - 1$$

gesetzt habe. Nachdem linker Hand die Integration in Bezug auf x zuerst ausgeführt ist, theilt sich das Integral in zwei Theile. Der eine ist in Bezug auf φ, der andere in Bezug auf ψ von der Form

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2},$$

so dafs nur noch eine Integration für jeden Theil zu leisten ist, welche erst nach der Entwicklung an den einzelnen Termen ausgeführt wird. Ich habe auf diese Art das Integral

$$2\int_{\frac{1}{\mu}}^{\infty} \frac{(\alpha + \beta x^2)\, dx}{\sqrt{((x^2-1)(\varkappa^2 x^2 - 1)(\lambda^2 x^2 - 1)(\mu^2 x^2 - 1))}} = \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} \frac{(\alpha + \beta x)\, dx}{\sqrt{(x, \varkappa, \lambda, \mu)}}$$

nach Potenzen von $\lambda^2 - \mu^2$ bis zu $(\lambda^2 - \mu^2)^3$ incl. entwickelt. Die Entwicklung der ganzen Integrale in den Grenzen 0 und 1, 1 und $\frac{1}{\varkappa^2}$, $\frac{1}{\lambda^2}$ und $\frac{1}{\mu^2}$ nach Potenzen von $\lambda^2 - \mu^2$ macht weniger Schwierigkeit. Der logarithmische Theil,

welcher in der Entwicklung von $\int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{(x,\,\varkappa,\,\lambda,\,\mu)}}$ enthalten ist, fällt bei dem Doppel-Integral

$$\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \int_{\frac{1}{\mu^2}}^{\infty} \frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-(x,\,\varkappa,\,\lambda,\,\mu)(y,\,\varkappa,\,\lambda,\,\mu))}}$$

weg, und die Entwicklung dieses Integrals nach Potenzen von $\lambda^2-\mu^2$ stimmt in den 4 ersten Gliedern, welche ich berechnet habe, mit der Entwicklung von

$$\int_0^1 \int_1^{\frac{1}{\varkappa^2}} \frac{(x-y)\,dx\,dy}{\sqrt{(-(x,\,\varkappa,\,\lambda,\,\mu)(y,\,\varkappa,\,\lambda,\,\mu))}}$$

vollkommen überein.

III.

Breslau, den 21. Mai 1847.

Meine Concurrenzschrift hat die Devise aus Göthes Iphigenie:

Das Wenige verschwindet leicht dem Blick,
Der vorwärts sieht, wie viel noch übrig bleibt.

Sie werden dieselbe um so passender finden, wenn ich Ihnen sage, dafs ich mit der Arbeit eigentlich nicht ganz fertig geworden bin, sondern mich habe beeilen müssen, um nur noch den Beweis mit aufnehmen zu können, dafs die fast zu ausführlich behandelte Transcendente φ wirklich auf das hyperelliptische Integral führt.

Der Gang, den ich in meiner Abhandlung genommen habe, ist kurz folgender.

In einer kurzen Einleitung erörtere ich zuerst den Stand der Frage, und setze auseinander, dafs ich das Problem nicht direct, wie es gewöhnlich gestellt wird, angegriffen, und die inversen Functionen der hyperelliptischen Integrale gesucht, sondern mir aus den Zählern und Nennern der dreifach periodischen Functionen zweier Variabeln, welche die inversen Functionen der elliptischen Integrale der dritten Gattung sind, neue Transcendenten nach demselben Gesetz gebildet habe, nach welchem sich die Zähler und Nenner der elliptischen Functionen aus dem Zähler und Nenner der einfach periodischen Function tang φ zusammensetzen. Die Quotienten von je 2 dieser neuen Transcendenten, bemerke ich, seien Functionen von 2 Variabeln mit 4facher Periodicität, und daher sei die Untersuchung derselben und ihrer inversen Functionen an und für sich von Interesse. Sie liefsen sich eben so behandeln, wie die Functionen ϑ, und ich hätte nun umgekehrt als ihre inversen Functionen, durch die von Ihnen für die Functionen ϑ gegebene Methode, die erste Gattung der hyperelliptischen Integrale der ersten Classe gefunden.

Zur Sache selbst übergehend, entwickle ich ganz kurz Ihre Formeln zwischen den Functionen ϑ, mit 4 verschiedenen Argumenten, wobei ich mich der Zeichen Ihrer Vorlesungen bediene. Darauf leite ich mit Hülfe dieser Formeln die Ausdrücke der dreifach periodischen Functionen ab, welche die inversen Functionen der elliptischen Integrale der dritten Gattung sind. Dann bilde ich aus der Function

$$e^{2v}\vartheta_3(w+2A,\, q)+e^{-2v}\vartheta_3(w-2A,\, q),$$

welche einen der Zähler der dreifach periodischen Functionen bildet, mit Hülfe

eines neuen Moduls p, die Reihe

$$\varphi_{3,3}(v, w, p, q, A) = 1 + \sum_{m=1}^{m=\infty} p^{m^2} \{e^{2mv} \vartheta_3(w + 2mA, q) + e^{-2mv} \vartheta_3(w - 2mA, q)\}$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} p^{m^2} e^{2mv} \vartheta_3(w + 2mA, q)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2} e^{2nw} \vartheta_3(v + 2nA, p)$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{m^2 \log p + n^2 \log q + 4mnA + 2mv + 2nw}.$$

Dieses Bildungsgesetz ist demjenigen analog, nach welchem die Function

$$\vartheta_3(w, q) = 1 + \sum_{m=1}^{m=\infty} q^{m^2}(e^{2mw} + e^{-2mw})$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} q^{m^2} e^{2mw} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{m^2 \log q + 2mw}$$

aus der Function $e^{2w} + e^{-2w}$ mit Hülfe eines Moduls q gebildet wird. Von den übrigen 15 Functionen $\varphi_{r,s}(v, w)$, wo r und s irgend einen der 4 Indices 0, 1, 2, 3 bedeuten, erwähne ich vor der Hand nur, dafs sie Alle dieselbe Form

$$\sum\sum e^{m^2 \log p + n^2 \log q + 4mnA + 2ma + 2nb + c}$$

haben, wo a, b, c lineäre Functionen von v und w sind.

Ich behandle darauf die Function $\varphi_{3,3}(v, w)$ auf ähnliche Art, wie Sie in den Vorlesungen die Transcendenten $\vartheta_3(v)$ behandelt haben. Ich zeige, dafs $\varphi_{3,3}(v, w)$ zwei Perioden hat, deren *conjugirte Indices* 0 und $i\pi$ und $i\pi$ und 0 sind; dann, dafs eben so $e^{\frac{w^2}{\log p}} \varphi_{3,3}(v, w)$ und $e^{\frac{w^2}{\log q}} \varphi_{3,3}(v, w)$ doppelt periodische Functionen sind, und zwar die erstere mit den conjugirten Indices $\log p$ und $2A$, 0 und $i\pi$, die letztere dagegen mit den Index-Paaren $i\pi$ und 0, $2A$ und $\log q$; endlich, wenn

$$\frac{v^2 \log q + w^2 \log p - 4Avw}{\log p \log q - 4A^2} = f(v, w)$$

gesetzt wird, dafs

$$e^{f(v,w)} \varphi_{3,3}(v, w) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{f(v + m \log p + 2nA,\, w + 2mA + n \log q)}$$

ebenfalls doppelt periodisch ist, indem die beiden Paare conjugirter Indices $\log p$ und $2A$, $2A$ und $\log q$ sind.

Setzt man

$$\frac{v \log q - 2Aw}{\log p \log q - 4A^2} = V, \quad \frac{w \log p - 2Av}{\log p \log q - 4A^2} = W,$$

mithin

$$V\log p + 2AW = v, \qquad W\log q + 2AV = w,$$

so kann man $f(v, w)$ auch noch auf folgende Arten ausdrücken:

$$f(v, w) = V^2\log p + W^2\log q + 4AVW$$
$$= \frac{v^2}{\log p} + \frac{\log p\log q - 4A^2}{\log p}W^2$$
$$= \frac{w^2}{\log q} + \frac{\log p\log q - 4A^2}{\log q}V^2.$$

Drückt man daher $e^{f(v,w)}\varphi_{3,3}(v, w)$ durch V und W aus, so werden in Bezug auf diese Variabeln die beiden Paare der conjugirten Indices 1 und 0, 0 und 1.

Die Ausdrücke von $e^{f(v,w)}\varphi_{3,3}(v, w)$ in v und W und in w und V sind folgende:

$$e^{\frac{v^2}{\log p} + \frac{\log p\log q - 4A^2}{\log p}W^2}\varphi_{3,3}(v, w) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{\log p\log q - 4A^2}{\log p}(W+n)^2} . e^{\frac{(v+2nA)^2}{\log p}}\vartheta_3(v+2nA, p)$$

$$e^{\frac{w^2}{\log q} + \frac{\log p\log q - 4A^2}{\log q}V^2}\varphi_{3,3}(v, w) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{\frac{\log p\log q - 4A^2}{\log q}(V+m)^2} . e^{\frac{(w+2mA)^2}{\log q}}\vartheta_3(w+2mA, q).$$

In dem ersteren gehören zu den Indices $\log p$ und $2A$ von v die Indices 0 und 1 von W, in dem letzteren zu den Indices $\log q$ und $2A$ von w die Indices 0 und 1 von V. Ich benutze diese beiden Formeln, oder eigentlich nur eine von ihnen, zur Ableitung der Reductionsformeln von

$$\varphi_{3,3}(iv, w), \quad \varphi_{3,3}(v, iw), \quad \varphi_{3,3}(iv, iw),$$

wo $i = \sqrt{-1}$, auf Functionen $\varphi_{3,3}$ mit reellen Argumenten, und erhalte mit Hülfe Ihres Theorems

$$e^{\frac{v^2}{\log p}}\vartheta_3(v, p) = \sqrt{\left(-\frac{\pi}{\log p}\right)}.\vartheta_3(iv', p'),$$

wo

$$\log p\log p' = \pi^2, \quad v' = \frac{\pi v}{\log p}, \quad v = \frac{\pi v'}{\log p'},$$

folgende drei, diesem entsprechende Theoreme:

Theorem I.

$$e^{\frac{v^2}{\log p}}\varphi_{3,3}(v,w,p,q,A) = \sqrt{\left(-\frac{\pi}{\log p}\right)}.\varphi_{3,3}(iv',w',p',q',A')$$

$$\pi^2 = \log p \log p' = \frac{\log p \log q - 4A^2}{\log q}.\frac{\log p' \log q' - 4A'^2}{\log q'}$$

$$\log q' = \frac{\log p \log q - 4A^2}{\log p}, \quad \log q = \frac{\log p' \log q' - 4A'^2}{\log p'}$$

$$A' = \frac{i\pi A}{\log p}, \quad v' = \frac{\pi v}{\log p}, \quad w' = \frac{w \log p - 2Av}{\log p}$$

$$iA = \frac{\pi A'}{\log p'}, \quad v = \frac{\pi v'}{\log p'}, \quad w = \frac{w' \log p' - 2iA'v'}{\log p'}.$$

Das zweite Theorem ergiebt sich von selbst aus dem ersten durch Vertauschung von v und w, p und q, und das dritte setzt sich aus dem ersten und zweiten zusammen. Ich glaube indefs, es wird Ihnen nicht unangenehm sein, wenn ich die Formeln auch für diese Theoreme hinschreibe.

Theorem II.

$$e^{\frac{w^2}{\log q}}\varphi_{3,3}(v,w,p,q,A) = \sqrt{\left(-\frac{\pi}{\log q}\right)}.\varphi_{3,3}(v_1,iw_1,p_1,q_1,A_1)$$

$$\pi^2 = \log q \log q_1 = \frac{\log p \log q - 4A^2}{\log p}.\frac{\log p_1 \log q_1 - 4A_1^2}{\log p_1}$$

$$\log p_1 = \frac{\log p \log q - 4A^2}{\log q}, \quad \log p = \frac{\log p_1 \log q_1 - 4A_1^2}{\log q_1}$$

$$A_1 = \frac{i\pi A}{\log q}, \quad w_1 = \frac{\pi w}{\log q}, \quad v_1 = \frac{v \log q - 2Aw}{\log q}$$

$$iA = \frac{\pi A_1}{\log q_1}, \quad w = \frac{\pi w_1}{\log q_1}, \quad v = \frac{v_1 \log q_1 - 2iA_1 w_1}{\log q_1}.$$

Theorem III.

$$e^{f(v,w,p,q,A)}\varphi_{3,3}(v,w,p,q,A) = \frac{\pi}{\sqrt{(\log p \log q - 4A^2)}}\varphi_{3,3}(iv'_1, iw'_1, p'_1, q'_1, A'_1)$$

$$\pi^2 - 4AA'_1 = \log p \log p'_1 = \log q \log q'_1$$

$$A \log p'_1 + A'_1 \log q = 0, \quad A \log q'_1 + A'_1 \log p = 0$$

$$\pi^4 = (\log p \log q - 4A^2)(\log p'_1 \log q'_1 - 4A'^2_1)$$

$$\log p'_1 = \frac{\pi^2 \log q}{\log p \log q - 4A^2}, \quad \log p = \frac{\pi^2 \log q'_1}{\log p'_1 \log q'_1 - 4A'^2_1}$$

$$\log q'_1 = \frac{\pi^2 \log p}{\log p \log q - 4A^2}, \quad \log q = \frac{\pi^2 \log p'_1}{\log p'_1 \log q'_1 - 4A'^2_1}$$

$$A'_1 = \frac{-\pi^2 A}{\log p \log q - 4A^2}, \quad A = \frac{-\pi^2 A'_1}{\log p'_1 \log q'_1 - 4A'^2_1}$$

$$v' = \pi\frac{v \log q - 2Aw}{\log p \log q - 4A^2} = \frac{v \log p'_1 + 2A'_1 w}{\pi}$$

$$v = \pi\frac{v'_1 \log q'_1 - 2A'_1 w'_1}{\log p'_1 \log q'_1 - 4A'^2_1} = \frac{v'_1 \log p + 2Aw'_1}{\pi}$$

$$w'_1 = \pi\frac{w \log p - 2Av}{\log p \log q - 4A^2} = \frac{w \log q'_1 + 2A'_1 v}{\pi}$$

$$w = \pi\frac{w'_1 \log p'_1 - 2A'_1 v'_1}{\log p'_1 \log q'_1 - 4A'^2_1} = \frac{w'_1 \log p + 2Av'_1}{\pi}$$

$$f(v,w,p,q,A) = f(v'_1, w'_1, p'_1, q'_1, A'_1)$$

$$= \frac{v^2 \log q + w^2 \log p - 4Avw}{\log p \log q - 4A^2} = \frac{v'^2_1 \log p + w'^2_1 \log q + 4Av'_1 w'_1}{\pi^2}.$$

Nachdem ich noch bemerkt habe, dafs man in allen diesen Formeln $\log p$, $\log q$, $2A$ um gerade Vielfache von $i\pi$ ändern kann, und auch um ungerade, wenn nur gleichzeitig $2v$ und $2w$ um dieselben geändert werden (ganz ebenso, wie Sie es in Ihren Vorlesungen bei den Functionen ϑ gemacht haben), dafs man also, wenn man eine analytische Transformation von $\varphi_{3,3}(v,w)$ gefunden hat, welche von der Theilung eines Index, z. B. des Index $i\pi$ abhängt, mit Hülfe dieser drei Theoreme zu den übrigen gelangen kann, welche von der Theilung der andern Indices selbst, oder der Summen von Vielfachen dieser Indices abhängen, wende ich mich zu den Formeln *für die analytische Transformation der Function* $\varphi_{3,3}(v,w)$.

Diese finde ich, nach der von Ihnen in dem Briefe an *Hermite* für die Functionen ϑ angegebenen Methode, durch Bildung des Products

$$\prod_{h=1}^{h=n} \varphi(v+a_h,\ w+b_h,\ p,\ q,\ A) = P(v,\ w,\ p,\ q,\ A).$$

Nachdem ich zunächst $P(v, w, p, q, A)$ unter 4 verschiedenen Formen erhalten habe, verallgemeinere ich diese, indem ich v und w um $n$te Theile der Indices vermehre. Dadurch entstehen folgende 4 Hauptformeln:

$$1.\quad P\left(v+\frac{ki\pi}{n},\ w+\frac{li\pi}{n},\ p,\ q,\ A\right)$$

$$= \sum_\beta\sum_\gamma A_{\beta,\gamma} e^{\frac{\beta k+\gamma l}{n}2i\pi+2\beta v+2\gamma w}\varphi_{3,3}\left\{\begin{matrix} nv+\Sigma a_h+\beta\log p+2\gamma A, \\ nw+\Sigma b_h+2\beta A+\gamma\log q, \\ p^n,\ q^n,\ nA \end{matrix}\right\}$$

$$2.\quad p^{\frac{\beta^2}{n}} q^{\frac{\gamma^2}{n}} e^{2\beta\left(v+\frac{\Sigma a_h}{n}+\frac{\gamma A}{n}\right)+2\gamma\left(w+\frac{\Sigma b_h}{n}+\frac{\beta A}{n}\right)} P\left\{\begin{matrix} v+\frac{\beta}{n}\log p+\frac{\gamma}{n}2A, \\ w+\frac{2\beta A}{n}+\frac{\gamma}{n}\log q, \\ p,\ q,\ A \end{matrix}\right\}$$

$$= \sum_k\sum_l e^{-\frac{k\beta+l\gamma}{n}2i\pi} B_{k,l}\varphi_{3,3}\left\{\begin{matrix} v+\frac{1}{n}\Sigma a_h+\frac{ki\pi}{n}, \\ w+\frac{1}{n}\Sigma b_h+\frac{li\pi}{n}, \\ p^{\frac{1}{n}},\ q^{\frac{1}{n}},\ \frac{A}{n} \end{matrix}\right\}$$

$$3.\quad p^{\frac{\beta^2}{n}} e^{2\beta\left(v+\frac{1}{n}\Sigma a_h\right)} P\left(v+\frac{\beta}{n}\log p,\ w+\frac{2\beta A}{n}+\frac{li\pi}{n},\ p,\ q,\ A\right)$$

$$= \sum_k\sum_\gamma e^{-\frac{k\beta-\gamma l}{n}2i\pi} C_{k,\gamma} e^{2\gamma w}\varphi_{3,3}\left\{\begin{matrix} v+\frac{1}{n}\Sigma a_h+\frac{2\gamma A}{n}+\frac{ki\pi}{n}, \\ nw+\Sigma b_h+\gamma\log q, \\ p^{\frac{1}{n}},\ q^n,\ A \end{matrix}\right\}$$

$$4.\quad q^{\frac{\gamma^2}{n}} e^{2\gamma\left(w+\frac{1}{n}\Sigma b_h\right)} P\left\{\begin{matrix} v+\frac{2\gamma A}{n}+\frac{ki\pi}{n}, \\ w+\frac{\gamma}{n}\log q, \\ p,\ q,\ A \end{matrix}\right\}$$

$$= \sum_\beta\sum_l e^{\frac{\beta k-l\gamma}{n}2i\pi} D_{\beta,l} e^{2\beta v}\varphi_{3,3}\left\{\begin{matrix} nv+\Sigma a_h+\beta\log p, \\ w+\frac{1}{n}\Sigma b_h+\frac{2\beta A}{n}+\frac{li\pi}{n}, \\ p^n,\ q^{\frac{1}{n}},\ A \end{matrix}\right\}$$

Die Summen Σ_{a_h}, Σ_{b_h} sind in Bezug auf h von 1 bis n zu nehmen; die übrigen Summen in Bezug auf β, γ, k, l sämmtlich von 0 bis $n-1$. Wenn sie nicht als Summen-Indices stehen, bezeichnen diese Buchstaben irgend eine der n Zahlen von 0 bis $n-1$.

Vermittelst der bekannten Eigenschaften der Wurzeln der Einheit erhält man aus diesen Formeln durch Umkehrung folgende 4 Gleichungen:

$$n^2 A_{\beta,\gamma} e^{2\beta v+2\gamma w}\varphi_{3,3}\left\{\begin{matrix} n v+\Sigma a_h+\beta\log p+2\gamma A, \\ nw+\Sigma b^h+2\beta A+\gamma\log q, \\ p^n,\ q^n,\ nA \end{matrix}\right\} = \sum_k\sum_l e^{-\frac{k\beta+l\gamma}{n}2i\pi}\prod_{h=1}^{h=n}\varphi_{3,3}\left\{\begin{matrix} v+a_h+\frac{ki\pi}{n}, \\ w+b_h+\frac{li\pi}{n}, \\ p,\ q,\ A \end{matrix}\right\}$$

$$2.\quad n^2 B_{k,l}\varphi_{3,3}\left\{\begin{matrix} v+\frac{1}{n}\Sigma a_h+\frac{ki\pi}{n}, \\ w+\frac{1}{n}\Sigma b_h+\frac{li\pi}{n}, \\ p^{\frac{1}{n}},\ q^{\frac{1}{n}},\ \frac{A}{n} \end{matrix}\right\}$$

$$=\sum_\beta\sum_\gamma\left\{p^{\frac{\beta^2}{n}}q^{\frac{\gamma^2}{n}}e^{2\beta\left[v+\frac{1}{n}\Sigma a_h+\frac{ki\pi}{n}+\frac{\gamma A}{n}\right]+2\gamma\left[w+\frac{1}{n}\Sigma b_h+\frac{li\pi}{n}+\frac{\beta A}{n}\right]}\prod_{h=1}^{h=n}\varphi_{3,3}\left\{\begin{matrix} v+a_h+\frac{\beta\log p+2\gamma A}{n}, \\ w+b_h+\frac{2\beta A+\gamma\log q}{n}, \\ p,\ q,\ A \end{matrix}\right\}\right\}$$

$$3.\quad nC_{k,\gamma}.e^{2\gamma w}\varphi_{3,3}\left\{\begin{matrix} v+\frac{1}{n}\Sigma a_h+\frac{2\gamma A}{n}+\frac{ki\pi}{n}, \\ nw+\quad\Sigma b_h+\gamma\log q, \\ p^{\frac{1}{n}},\ q^n,\ A \end{matrix}\right\}$$

$$=\sum_\beta\sum_l e^{\frac{\beta k-l\gamma}{n}2i\pi}p^{\frac{\beta^2}{n}}e^{2\beta\left(v+\frac{1}{n}\Sigma a_h\right)}\prod_{h=1}^{h=n}\varphi_{3,3}\left\{\begin{matrix} v+a_h+\frac{\beta}{n}\log p, \\ w+b_h+\frac{2\beta A}{n}+\frac{li\pi}{n}, \\ p,\ q,\ A \end{matrix}\right\}$$

$$4.\quad n^2 D_{\beta,l}e^{2\beta v}\varphi_{3,3}\left\{\begin{matrix} nv+\quad\Sigma a_h+\beta\log p, \\ w+\frac{1}{n}\Sigma b_h+\frac{2\beta A}{n}+\frac{li\pi}{n}, \\ p^n,\ q^{\frac{1}{n}},\ A \end{matrix}\right\}$$

$$=\sum_k\sum_\gamma e^{\frac{\gamma l-k\beta}{n}2i\pi}q^{\frac{\gamma^2}{n}}e^{2\gamma\left(w+\frac{1}{n}\Sigma b_h\right)}\prod_{h=1}^{h=n}\varphi_{3,3}\left\{\begin{matrix} v+a_h+\frac{2\gamma A}{n}+\frac{ki\pi}{n}, \\ w+b_h+\frac{\gamma}{n}\log q, \\ p,\ q,\ A \end{matrix}\right\}$$

Diese Formeln dienen nun zunächst dazu, die constanten Coëfficienten

$$A_{\beta,\gamma},\quad B_{k,l},\quad C_{k,\gamma},\quad D_{\beta,l}$$

durch Functionen $\varphi_{3,3}$ mit constanten Argumenten und verschiedenen Moduln auszudrücken; dann aber sind sie die Quelle der directen und inversen Transformation der hyperelliptischen Integrale von der ersten Classe. Ich habe indeſs dies nur flüchtig erwähnt, weil ich eilen muſste, um den Zusammenhang der Transcendenten $\varphi_{r,s}$ mit den Integralen nachzuweisen, und habe in der eingeschickten Arbeit die eben mitgetheilten Formeln nur dazu benutzen können, um die Werthe von

$$\varphi'_{r,1}(v)_0\varphi'_{3,1}(w)_0-\varphi'_{r,1}(w)_0\varphi'_{3,1}(v)_0$$

durch die Functionen $\varphi_{r,s}$, in denen beide Argumente 0 sind, auszudrücken. Für die einzelnen Gröſsen

$$\varphi'_{r,1}(v)_0,\quad \varphi'_{r,1}(w)_0$$

habe ich keine Ausdrücke durch die Functionen $\varphi_{r,s}$ allein finden können, wohl aber für die Functionaldeterminante von je zweien. Die unten angehängte 0 soll bedeuten, daſs v und w nach der Differentiation 0 gesetzt werden.

Was $\varphi_{r,s}(v,w)$ bedeutet, werden Sie sich vielleicht noch erinnern. Sollte es nicht der Fall sein, so schreibe ich Ihnen hier zwei Formeln hin, aus welchen die Bedeutung hervorgeht:

$$\varphi_{r,3}(v,w)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2}e^{2nw}\vartheta_r(v+2nA,p)$$

$$\varphi_{3,s}(v,w)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} p^{m^2}e^{2mv}\vartheta_s(w+2mA,q),$$

wo r und s irgend welche von den 4 Indices 0, 1, 2, 3 sind.

Die Werthe, welche ich für die betreffenden Functional-Determinanten gefunden habe, will ich Ihnen kurz angeben. Ich setze

$$\varphi'_{r,1}(v)_0\varphi'_{s,1}(w)_0-\varphi'_{r,1}(w)_0\varphi'_{s,1}(v)_0=D_{r,s,1}=-D_{s,r,1}$$

$$\varphi'_{1,r}(v)_0\varphi_{1,s}(w)_0-\varphi'_{1,r}(w)_0\varphi'_{1,s}(v)_0=D_{1,r,s}=-D_{1,s,r}$$

$$\varphi'_{r,1}(v)_0\varphi'_{1,s}(w)_0-\varphi'_{r,1}(w)_0\varphi'_{1,s}(v)_0=D_{r,1,s},$$

und erhalte dann

$D_{[illegible]}=\varphi_{1,1}\varphi_{2,0}\varphi_{2,2}\varphi_{2,3}$; $\quad D_{2,0,1}=\varphi_{1,1}\varphi_{3,0}\varphi_{3,2}\varphi_{3,3}$; $\quad D_{2,3,1}=\varphi_{1,1}\varphi_{0,0}\varphi_{0,2}\varphi$[illegible]

$D_{[illegible]}=\varphi_{1,1}\varphi_{0,2}\varphi_{2,2}\varphi_{3,2}$; $\quad D_{1,0,2}=\varphi_{1,1}\varphi_{0,3}\varphi_{2,3}\varphi_{3,3}$; $\quad D_{1,3,2}=\varphi_{1,1}\varphi_{0,0}\varphi_{2,0}\varphi$[illegible]

$D_{[illegible]}$ [illegible] $\varphi_{0,0}\varphi_{2,2}\varphi_{3,2}\varphi_{0,3}$; $\quad -D_{0,1,3}=\varphi_{0,0}\varphi_{2,3}\varphi_{3,3}\varphi_{0,2}$; $\quad -D_{2,1,3}=\varphi_{2,2}\varphi_{3,3}\varphi_{2,0}\varphi$[illegible]

$D_{[illegible]}$ [illegible] $\varphi_{0,0}\varphi_{2,2}\varphi_{2,3}\varphi_{3,0}$; $\quad -D_{3,1,0}=\varphi_{0,0}\varphi_{3,2}\varphi_{3,3}\varphi_{2,0}$; $\quad -D_{3,1,2}=\varphi_{2,2}\varphi_{3,3}\varphi_{0,2}\varphi$[illegible]

$D_{[illegible]}$ [illegible] $\varphi_{0,2}\varphi_{2,0}\varphi_{0,3}\varphi_{3,0}$; $\quad -D_{2,1,2}=\varphi_{0,2}\varphi_{2,0}\varphi_{2,3}\varphi_{3,2}$; $\quad -D_{3,1,3}=\varphi_{0,3}\varphi_{3,0}\varphi_{2,3}\varphi$[illegible]

Durch fortgesetzte Anwendung der Transformation zweiter Ordnung erhält man nämlich

$$\frac{D_{3,0,1}(p,\, q,\, A)}{D_{3,0,1}(p^{4^\mu},\, q,\, 2^\mu A)} = \frac{(\varphi_{1,1}.\varphi_{2,0}.\varphi_{2,2}.\varphi_{2,3})(p,\, q,\, A)}{(\varphi_{1,1}.\varphi_{2,0}.\varphi_{2,2}.\varphi_{2,3})(p^{4^\mu},\, q,\, 2^\mu A)},$$

wo ich, wie bisher, $\varphi_{r,s}$ für $\varphi_{r,s}(0, 0)$ geschrieben und die verschiednen Systeme der Moduln hinzugefügt habe. Für μ gleich ∞ erhält man hieraus den oben gegebenen Werth von $D_{3,0,1}$. Die übrigen Ausdrücke ergeben sich dann mit Hülfe der Formeln zwischen den Functionen $\varphi_{r,s}$ mit 4 verschiedenen Argumentenpaaren und denselben Moduln, welche zugleich, wie in Ihrer Behandlung der Theorie der elliptischen Functionen, die Quelle der allgemeinen Additionsformeln sind.

Den folgenden Theil meiner Arbeit kennen Sie schon, und ich kann mich daher in Bezug auf ihn kürzer fassen. Nachdem ich die andern 15 Functionen $\varphi_{r,s}(v,\, w,\, p,\, q,\, A)$ definirt habe, wende ich mich zur Ableitung der zuletzt genannten Formeln, wozu ich die von Ihnen für die Functionen ϑ gegebenen benutze, welche ich, wie schon bemerkt, zum Behufe der Darstellung der dreifach periodischen Functionen gleich Anfangs hergeleitet hatte. Sind, wie in Ihren Vorlesungen,

$$v_1,\; v_1',\; v_1'',\; v_1'''$$

die lineären Functionen von $v,\, v',\, v'',\, v'''$, welche der Gleichung

$$v_1^2+v_1'^2+v_1''^2+v_1'''^2 = v^2+v'^2+v''^2+v'''^2$$

genügen, und sind

$$w_1,\; w_1',\; w_1'',\; w_1'''$$

dieselben Functionen von $w,\, w',\, w'',\, w'''$, und

$$M_1,\; M_1',\; M_1'',\; M_1'''$$

dieselben Functionen von $M,\, M',\, M'',\, M'''$, so habe ich in meiner Abhandlung nur ein System von 4 oder 8 Formeln gegeben, welche sich in die einzige,

$$(a.)\qquad M^2+M'^2+M''^2+M'''^2 = M_1^2+M_1'^2+M_1''^2+M_1'''^2,$$

zusammenfassen lassen, und worin jedes $M,\, M',\, M'',\, M'''$ die Summe von

2 Producten aus 4 Functionen $\varphi_{r,s}$ ist, welche der Reihe nach die Argumente

$$v,\ w;\ v',\ w';\ v'',\ w'';\ v''',\ w'''$$

haben. Die Gröfsen M_1, M_1', M_1'', M_1''' sind ähnliche Ausdrücke aus Functionen $\varphi_{r,s}$ mit den Argumenten

$$v_1,\ w_1;\ v_1',\ w_1';\ v_1'',\ w_1'';\ v_1''',\ w_1'''.$$

Die Ordnung der Gröfsen M, M', M'', M''' und M_1, M_1', M_1'', M_1''' habe ich stets so gewählt, dafs sie den Gleichungen

$$(b.)\quad \begin{cases} 2M_1 = M+M'+M''+M''' \\ 2M_1' = M+M'-M''-M''' \\ 2M_1'' = M-M'+M''-M''' \\ 2M_1''' = M-M'-M''+M''' \end{cases}$$

genügen. Es reichte daher hin, in der Formeltafel, welche ich meiner Abhandlung beigefügt habe, die Gröfsen $M^{(r)}$ und $M_1^{(r)}$ unter der symbolischen Bezeichnung

$$(A.)\quad \begin{cases} M^{(r)} = a^{(r)}m\,.\,b^{(r)}m'\,.\,c^{(r)}m''\,.\,d^{(r)}m''' \pm a^{(r)}n\,.\,b^{(r)}n'\,.\,c^{(r)}n''\,.\,d^{(r)}n''' \\ M_1^{(r)} = a_1^{(r)}m_1\,.\,b_1^{(r)}m_1'\,.\,c_1^{(r)}m_1''\,.\,d_1^{(r)}m_1''' \pm a_1^{(r)}n_1\,.\,b_1^{(r)}n_1'\,.\,c_1^{(r)}n_1''\,.\,d_1^{(r)}n_1''' \end{cases}$$

aufzuführen. Die durch Puncte getrennten Paare von Buchstaben bedeuten die Indices t und s der Functionen $\varphi_{t,s}$, aus denen sich die Ausdrücke $M^{(r)}$ und $M_1^{(r)}$ zusammensetzen, so dafs man unmittelbar

$$M^{(r)} = \varphi_{a^{(r)},m}(v,w)\,.\,\varphi_{b^{(r)},m'}(v',w')\,.\,\varphi_{c^{(r)},m''}(v'',w'')\,.\,\varphi_{d^{(r)},m'''}(v''',w''')$$
$$\pm\varphi_{a^{(r)},n}(v,w)\,.\,\varphi_{b^{(r)},n'}(v',w')\,.\,\varphi_{c^{(r)},n''}(v'',w'')\,.\,\varphi_{d^{(r)},n'''}(v''',w''')$$

hat, und eben so den Ausdruck für $M_1^{(r)}$, wenn man die Indices und die Argumente der Functionen φ unten mit einem Strich versieht.

Jede Seite meiner Tafel enthält nun 2 Columnen mit Ziffer-Ausdrücken von der Form (*A.*). In der ersten Columne gehören je 4 Zeilen, von denen jede einen Ausdruck (*A.*) enthält, zu demselben System von Werthen $M^{(r)}$ und an der Seite von jeder solchen Gruppe von 4 Zeilen lieset man der Reihe nach

$$M \text{ et } M_1;\quad M' \text{ et } M_1';\quad M'' \text{ et } M_1'';\quad M''' \text{ et } M_1'''.$$

In der ersten Columne befinden sich nämlich die Materialien zu denjenigen

Formeln, in welchen die Indices der Functionen $\varphi_{t,s}(v, w)$ in den Ausdrücken von $M_1^{(r)}$ und $M^{(r)}$ der Reihe nach dieselben sind. In der zweiten Columne dagegen gehören 8 aufeinanderfolgende Zeilen zu zwei Systemen ($b.$), und an den Eingängen einer solchen Gruppe von 8 Zeilen befinden sich der Reihe nach die Inschriften

$$M \text{ ou } M_1; \quad M' \text{ ou } M_1'; \quad M'' \text{ ou } M_1''; \quad M''' \text{ ou } M_1''';$$

$$M_1 \text{ ou } M; \quad M_1' \text{ ou } M'; \quad M_1'' \text{ ou } M''; \quad M_1''' \text{ ou } M'''.$$

Der erste Buchstabe jeder Inschrift gehört zu dem einen, der zweite zu dem andern der Systeme ($b.$), welche in der Tafel durch die Gruppe von 8 Zeilen repräsentirt werden, und von denen also eines aus dem andern dadurch hervorgeht, dafs man die 4 Argumentenpaare $v^{(r)}$, $w^{(r)}$ mit den 4 Argumentenpaaren $v_1^{(r)}$, $w_1^{(r)}$ vertauscht. Je zwei aufeinanderfolgende Gruppen von 4 Zeilen der ersten Columne und die danebenstehende Gruppe von 8 Zeilen in der zweiten Columne sind mit derselben Nummer bezeichnet und die darin enthaltnen 4 Systeme von je 4 Gröfsen durch die Buchstaben a, b, c, d von einander unterschieden. Dies ist deshalb geschehen, weil sie nothwendig zusammengehören. Hat man nemlich für das erste der beiden Systeme, deren Elemente in den 2 mal 4 Zeilen der ersten Columne enthalten sind,

$$M^{(r)} = A^{(r)} + B^{(r)}, \quad M_1^{(r)} = A_1^{(r)} + B_1^{(r)},$$

und für das zweite

$$M^{(r)} = C^{(r)} - D^{(r)}, \quad M_1^{(r)} = C_1^{(r)} - D_1^{(r)},$$

so ist für das eine von den in den danebenstehenden 8 Zeilen der zweiten Columne enthaltnen beiden Systeme,

$$M^{(r)} = A^{(r)} - B^{(r)}, \quad M_1^{(r)} = C_1^{(r)} + D_1^{(r)},$$

und für das andere,

$$M^{(r)} = C^{(r)} + D^{(r)}, \quad M_1^{(r)} = A_1^{(r)} - B_1^{(r)}.$$

Die 4 mit derselben Nummer bezeichneten Systeme ergeben sich aus einem von ihnen. Wenn man nämlich in demselben $w''' + i\pi$ für w setzt, erhält man ein zweites, und aus den beiden so erhaltnen Systemen ergeben sich die beiden andern, wenn man darin w, w', w'' um $\frac{1}{2}i\pi$ vermehrt, w''' aber um dieselbe Gröfse vermindert. Ich glaube, dafs diese Einrichtung der Tafel ganz angemessen ist.

Die Art, wie man von den Gleichungen von der Form (*a.*) zu den Integralen gelangt, kennen Sie. Ich beschränke mich also darauf, Ihnen mitzutheilen, dafs ich aus den genannten Formeln zuerst die Modulargleichungen oder vielmehr die algebraischen Relationen zwischen den Functionen $\varphi_{r,s}(0,0)$ ableite; dann die algebraischen Relationen zwischen den Gröfsen $\varphi_{r,s}(v,w)$ selbst. Für die Quotienten der ersteren gebe ich die Ausdrücke durch 3 Moduln $\varkappa, \lambda, \mu$; für die Quotienten der letzteren ihre Ausdrücke durch zwei Variabeln x_1 und x_2, von denen sie symmetrische Functionen sind. Endlich zeige ich, dafs diese Gröfsen x_1 und x_2 die Variabeln der 4 hyperelliptischen Integrale erster Gattung sind, und zwar von so beschaffenen Integralen, dafs die Summe von je zweien mit demselben Zähler eine ganze lineäre Function der beiden Argumente v und w ist.

IV.

Breslau, den 22ten Februar 1849.

Nach mannigfachen vergeblichen Versuchen ist es mir endlich am vergangenen Sonntage gelungen, die Ihnen bekannte Relation zwischen den bestimmten ganzen *Abel*schen Integralen auf die eleganteste und kürzeste Art zu beweisen, und zwar ***ganz allgemein für den Fall, in welchem die Gröfse unter dem Wurzelzeichen auf den 2n^ten Grad steigt.***

Es sei

$$\begin{aligned} F(t) &= (t-\alpha_1)(t-\alpha_2) \quad \dots (t-\alpha_n) \\ F_1(t) &= (t-\alpha_{n+1})(t-\alpha_{n+2}) \dots (t-\alpha_{2n}) \\ \varphi(t) &= (t-t_1)(t-t_2) \quad \dots (t-t_{n-1}) \\ \varphi_1(t) &= (t-t_{n+1})(t-t_{n+2}) \dots (t-t_{2n-1}), \end{aligned}$$

ferner bezeichne man das Product aus den Differenzen der Gröfsen $x_1, x_2, \dots x_m$ mit

$$\begin{aligned} \Pi(x_1, x_2, \dots x_m) = (x_2-x_1)(x_3-x_1) \dots (x_m-x_1) \\ (x_3-x_2) \dots (x_m-x_2) \\ \dots\dots\dots \\ (x_m-x_{m-1}). \end{aligned}$$

Die in den Functionen F, F_1, φ, φ_1 vorkommenden Constanten α_m, t_m sollen der Gröfse nach geordnet sein, so dafs sie mit zunehmendem Index wachsen. Es sei ferner

$$\alpha_m < t_m < \alpha_{m+1},$$

für alle Werthe des Index m von $m=1$ bis $m=n-1$ und von $m=n+1$ bis $m=2n-1$, so dafs also mit Ausnahme der beiden Intervalle zwischen α_n und α_{n+1} und zwischen α_{2n} über $\pm\infty$ bis α_1, in jedem Intervall, α_m bis α_{m+1}, ein Werth t_m liegt.

Setzt man daher

$$U = \int^{n-1} \frac{\Pi(t_1, t_2, \dots t_{n-1})\,dt_1\,dt_2 \dots dt_{n-1}}{\sqrt{((-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} F(t_1)F_1(t_1) . F(t_2)F_1(t_2) \dots F(t_{n-1})F_1(t_{n-1}))}}$$

$$V = \int^{n-1} \frac{\Pi(t_{n+1}, t_{n+2}, \dots t_{2n-1})\,dt_{n+1}\,dt_{n+2} \dots dt_{2n-1}}{\sqrt{((-)^{\frac{1}{2}n(n-1)} F(t_{n+1})F_1(t_{n+1}) . F(t_{n+2})F_1(t_{n+2}) \dots F(t_{2n-1})F_1(t_{2n-1}))}},$$

so bleiben zufolge der gemachten Annahme die Gröfsen unter dem Wurzelzeichen immer positiv.

Wird die Integration in Beziehung auf jede der Variabeln t_m über das ganze Intervall von $t_m = \alpha_m$ bis $t_m = \alpha_{m+1}$ ausgedehnt, so will ich dies da-

durch andeuten, dafs ich setze

$$U = \begin{bmatrix} 2, 3, \ldots n \\ 1, 2, \ldots n-1 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} n+2, n+3, \ldots 2n \\ n+1, n+2, \ldots 2n-1 \end{bmatrix}.$$

In diesen Zeichen ausgedrückt, stellt sich die Relation, welche bewiesen werden soll, so dar:

$$\begin{bmatrix} 2, 3, \ldots n \\ 1, 2, \ldots n-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+2, n+3, \ldots 2n \\ n+1, n+2, \ldots 2n-1 \end{bmatrix}.$$

Um die Richtigkeit dieser Gleichung zu beweisen, führe ich statt der beiden Systeme von Variabeln t_p symmetrische Functionen derselben ein, und zwar für jedes der beiden Systeme von je $n-1$ Variabeln ein System von n Variabeln, welche die Bedingung erfüllen, dafs die Summe ihrer Quadrate gleich 1 sei.

Es sei

$$\frac{x_1^2}{t-\alpha_1} + \frac{x_2^2}{t-\alpha_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{t-\alpha_n}$$

$$= \frac{\varphi(t)}{F(t)} = \frac{t-t_1 . t-t_2 \ldots t-t_{n-1}}{t-\alpha_1 . t-\alpha_2 \ldots t-\alpha_{n-1} . t-\alpha_n},$$

$$\frac{y_1^2}{t-\alpha_{n+1}} + \frac{y_2^2}{t-\alpha_{n+2}} + \cdots + \frac{y_n^2}{t-\alpha_{2n}}$$

$$= \frac{\varphi_1(t)}{F_1(t)} = \frac{t-t_{n+1} . t-t_{n+2} \ldots t-t_{2n-1}}{t-\alpha_{n+1} . t-\alpha_{n+2} \ldots t-\alpha_{2n-1} . t-\alpha_{2n}},$$

so hat man

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1,$$

und, wenn m eine der Zahlen 1, 2, .. n bedeutet,

$$x_m^2 = \frac{\varphi(\alpha_m)}{F'(\alpha_m)}$$

$$y_m^2 = \frac{\varphi_1(\alpha_{n+m})}{F_1'(\alpha_{n+m})},$$

wo

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x), \quad \frac{dF_1(x)}{dx} = F_1'(x)$$

gesetzt ist.

Liegen die Variabeln t_m in den angegebenen Intervallen, d. h. ist

$$\alpha_m < t_m < \alpha_{m+1},$$

so sind sämmtliche x_p^2 und y_p^2 positiv. Umgekehrt: sind die letzteren $2n$ Gröfsen sämmtlich positiv, so folgt aus bekannten Betrachtungen, dafs die $2n$ Wurzeln t_m der beiden Gleichungen,

$$\varphi(t) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_1(t) = 0,$$

sämmtlich reell sind und in den angegebenen Intervallen liegen.

Da nun jedem System der positiven Gröfsen $x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2$, deren Summe $= 1$ ist, immer nur *ein* System der Gröfsen $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ entspricht, welche in den angegebnen Intervallen liegen, und umgekehrt, jedem System der Gröfsen $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$, welche in den angegebnen Intervallen liegen, immer nur *ein* System positiver Gröfsen $x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2$ entspricht, deren Summe $= 1$ ist, so folgt, dafs wenn die Integration in Bezug auf $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ über die ganzen Intervalle ausgedehnt wird, in welchen diese Gröfsen liegen, sie auch über alle positiven Gröfsen $x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2$ ausgedehnt werden mufs, deren Summe $= 1$ ist, und umgekehrt. Dasselbe gilt in Bezug auf die Gröfsen $t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots t_{2n}$ und die Gröfsen $y_1^2, y_2^2, \ldots y_n^2$.

Zum Behuf der Transformation der beiden vielfachen Integrale hat man, wenn $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ die neuen unabhängigen Variabeln sind, die Gleichungen:

$$\frac{\partial x_m}{\partial t_p} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{t_p - \alpha_m}\sqrt{\frac{\varphi(\alpha_m)}{F'(\alpha_m)}},$$

$$T_p\frac{\partial t_p}{\partial x_m} = \frac{2x_m}{t_p - \alpha_m} - \frac{2x_m}{t_p - \alpha_n},$$

oder auch

$$\frac{\partial t_p}{\partial x_m} = \frac{2(\alpha_n - \alpha_m)}{T_p(\alpha_n - t_p)(t_p - \alpha_m)}\sqrt{\frac{\varphi(\alpha_m)}{F'(\alpha_m)}},$$

wo

$$T_p = -\frac{\varphi'(t_p)}{F(t_p)} = \frac{x_1^2}{(t_p - \alpha_1)^2} + \frac{x_2^2}{(t_p - \alpha_2)^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{(t_p - \alpha_n)^2}.$$

In diesen Formeln bedeuten p und m einen der Indices $1, 2, \ldots n-1$. Man erhält aus denselben die entsprechenden Gleichungen für die n Gröfsen y_m, wenn man y statt x setzt, die Indices der Gröfsen t, T, α um n vermehrt, und φ, F in φ_1, F_1 verwandelt.

Aus den vorstehenden Formeln ergeben sich die Werthe der Functionaldeterminanten durch die Gleichungen,

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial t_1} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \cdots \frac{\partial x_{n-1}}{\partial t_{n-1}}$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sqrt{\frac{\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2) \cdots \varphi(\alpha_{n-1})}{F'(\alpha_1)F'(\alpha_2) \cdots F'(\alpha_{n-1})}} \Sigma \pm \frac{1}{t_1-\alpha_1} \cdot \frac{1}{t_2-\alpha_2} \cdots \frac{1}{t_{n-1}-\alpha_{n-1}}$$
$$T_1 T_2 \cdots T_{n-1} \Sigma \pm \frac{\partial t_1}{\partial x_1} \frac{\partial t_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial t_{n-1}}{\partial x_{n-1}}$$
$$= 2^{n-1} \sqrt{\frac{\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2) \cdots \varphi(\alpha_{n-1})}{F'(\alpha_1)F'(\alpha_2) \cdots F'(\alpha_{n-1})}\,\frac{F'(\alpha_n)}{\varphi(\alpha_n)}} \Sigma \pm \frac{1}{t_1-\alpha_1} \cdot \frac{1}{t_2-\alpha_2} \cdots \frac{1}{t_{n-1}-\alpha_{n-1}}.$$

Die Quadratwurzel soll positiv genommen und das Zeichen der Determinanten so bestimmt werden, dafs sie positive Werthe erhalten.

Den Werth der Determinante

$$\Sigma \pm \frac{1}{t_1-\alpha_1} \cdot \frac{1}{t_2-\alpha_2} \cdots \frac{1}{t_{n-1}-\alpha_{n-1}}$$

in passender Form kann man entweder aus den von Ihnen in der Abhandlung „De functionibus alternantibus" (*Crelle*, Bd. XXII.) bekannt gemachten Eigenschaften der alternirenden Functionen, oder aus dem Satze ableiten, dafs das Product zweier reciproken Functionaldeterminanten gleich 1 ist.

Auf dem erstgenannten Wege findet man

$$\Sigma \pm \frac{1}{t_1-\alpha_1} \cdot \frac{1}{t_2-\alpha_2} \cdots \frac{1}{t_{n-1}-\alpha_{n-1}}$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\,\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1})\,\Pi(t_1, t_2, \ldots t_{n-1})}{\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2) \cdots \varphi(\alpha_{n-1})},$$

wofür man auch

$$\Sigma \pm \frac{1}{(t_1-\alpha_1)(t_2-\alpha_2) \cdots (t_{n-1}-\alpha_{n-1})}$$
$$= \frac{\Pi(t_1, t_2, \ldots t_{n-1})}{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2) \cdots \varphi(\alpha_{n-1})} \sqrt{\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}F'(\alpha_1)\,F'(\alpha_2) \cdots F'(\alpha_{n-1})}{F'(\alpha_n)}}$$

setzen kann; denn es ist

$$F'(\alpha_1).F'(\alpha_2) \cdots F'(\alpha_{n-1})F'(\alpha_n)$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}(\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n))^2$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}(\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}))^2(F'(\alpha_n))^2.$$

Der Beweis der obigen Formel ergiebt sich durch die Betrachtung, dafs

$$\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2) \cdots \varphi(\alpha_{n-1}) \Sigma \pm \frac{1}{t_1-\alpha_1} \cdot \frac{1}{t_2-\alpha_2} \cdots \frac{1}{t_{n-1}-\alpha_{n-1}}$$

eine ganze rationale alternirende Function sowohl in Bezug auf die $n-1$ Gröfsen t_p als auch in Bezug auf die $n-1$ Gröfsen α_m ist. Es übersteigt aber

in dieser Function weder eine der Gröfsen t_p noch eine der Gröfsen α_m den $(n-2)$ten Grad; daher ist sie nicht blofs durch das Product

$$\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1})\,\Pi(t_1, t_2, \ldots t_{n-1})$$

theilbar, sondern, abgesehen vom Zeichen, diesem Producte selbst gleich, da ihre einzelnen Terme keine andern Zahlencoëfficienten haben, als ± 1. Da nun die Determinante positiv sein soll, so mufste rechts vom Gleichheitszeichen noch der Factor $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ hinzugefügt werden.

Auf die andere Art erhält man zunächst

$$T_1.T_2\ldots T_{n-1} = \frac{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_{n-1})}{F'(\alpha_1)F'(\alpha_2)\ldots F'(\alpha_{n-1})}\cdot\frac{F'(\alpha_n)}{\varphi(\alpha_n)}\left(\Sigma\pm\frac{1}{t_1-\alpha_1}\cdot\frac{1}{t_2-\alpha_2}\cdots\frac{1}{t_{n-1}-\alpha_{n-1}}\right)^2,$$

mithin, weil

$$\begin{aligned} T_1.T_2\ldots T_{n-1} &= (-1)^{n-1}\frac{\varphi'(t_1)\varphi'(t_2)\ldots\varphi'(t_{n-1})}{F(t_1)F(t_2)\ldots F(t_{n-1})} \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{(\Pi(t_1, t_2, \ldots t_{n-1}))^2}{F(t_1)F(t_2)\ldots F(t_{n-1})}, \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{(\Pi(t_1, t_2, \ldots t_{n-1}))^2}{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_{n-1})\varphi(\alpha_n)}, \end{aligned}$$

ebenso, wie vorhin,

$$\Sigma\pm\frac{1}{t_1-\alpha_1}\cdot\frac{1}{t_2-\alpha_2}\cdots\frac{1}{t_{n-1}-\alpha_{n-1}}$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{\Pi(t_1, t_2, \ldots t_{n-1})}{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_{n-1})}\sqrt{\frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}F'(\alpha_1)F'(\alpha_2)\ldots F'(\alpha_{n-1})}{F'(\alpha_n)}}.$$

Substituirt man diesen Werth der Determinante, so erhält man

$$\frac{1}{x_n}\Sigma\pm\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2}\cdots\frac{\partial x_{n-1}}{\partial t_{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\frac{\Pi(t_1, t_2, \ldots t_{n-1})}{\sqrt{((-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n))}} = \frac{1}{2^{n-1}}\frac{\Pi(t_1, t_2, \ldots t_{n-1})}{\sqrt{((-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}F(t_1)F(t_2)\ldots F(t_{n-1}))}}.$$

Man wird daher in dem ersten, mit U bezeichneten Integral unter dem Integralzeichen setzen können,

$$\frac{\Pi(t_1, t_2, \ldots t_{n-1})\,dt_1.dt_2\ldots dt_{n-1}}{\sqrt{((-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}F(t_1)F(t_2)\ldots F(t_{n-1}))}} = 2^{n-1}\frac{dx_1.dx_2\ldots dx_{n-1}}{x_n}.$$

Ganz auf dieselbe Weise sieht man, dafs man in dem mit V bezeichneten Integral unter dem Integralzeichen zu setzen hat,

$$\frac{\Pi(t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots t_{2n-1})\,dt_{n+1}.dt_{n+2}\ldots dt_{2n-1}}{\sqrt{((-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}F_1(t_{n+1})F_1(t_{n+2})\ldots F_1(t_{2n-1}))}} = 2^{n-1}\frac{dy_1.dy_2\ldots dy_{n-1}}{y_n}.$$

Damit nun die beiden Integrale, deren Gleichheit bewiesen werden soll, aus diesen Gleichungen hervorgehen, ist der erste der beiden vorstehenden

Differentialausdrücke noch durch die Quadratwurzel aus

$$F_1(t_1).F_1(t_2)\;..\;F_1(t_{n-1}) = \varphi(\alpha_{n+1}).\varphi(\alpha_{n+2})\;..\;\varphi(\alpha_{2n-1})\varphi(\alpha_{2n})$$

zu dividiren, der zweite durch die Quadratwurzel aus

$$F(t_{n+1}).F(t_{n+2})\;..\;F(t_{2n-1}) = \varphi_1(\alpha_1)\varphi_1(\alpha_2)\;..\;\varphi_1(\alpha_{n-1})\varphi_1(\alpha_n).$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{\varphi(\alpha_{n+p})}{F(\alpha_{n+p})} = M_p, \qquad -\frac{\varphi_1(\alpha_p)}{F_1(\alpha_p)} = N_p,$$

so wird

$$M_1 M_2\;..\;M_n = \frac{F_1(t_1)F_1(t_2)\;..\;F_1(t_{n-1})}{R^2}$$

$$N_1 N_2\;..\;N_n = \frac{F(t_{n+1})F(t_{n+2})\;..\;F(t_{2n+1})}{R^2},$$

wo

$$R^2 = F(\alpha_{n+1})F(\alpha_{n+2})\;..\;F(\alpha_{2n}) = (-1)^{n^2}F_1(\alpha_1)F_1(\alpha_2)\;..\;F_1(\alpha_n)$$

gesetzt ist. Nach der oben gewählten Bezeichnungsart wird also endlich

$$\frac{R}{2^{n-1}}.\begin{bmatrix}2, 3, \;..\; n \\ 1, 2, \;..\; n-1\end{bmatrix} = \int^{n-1}\frac{dx_1.dx_2\;..\;dx_n}{x_n\sqrt{(M_1.M_2\;..\;M_n)}}$$

$$\frac{R}{2^{n-1}}.\begin{bmatrix}n+2, n+3, \;..\; 2n \\ n+1, n+2, \;..\; 2n-1\end{bmatrix} = \int^{n-1}\frac{dy_1.dy_2\;..\;dy_n}{y_n\sqrt{(N_1.N_2\;..\;N_n)}},$$

und es ist daher zu beweisen, dafs

$$\int^{n-1}\frac{dx_1.dx_2\;..\;dx_n}{x_n\sqrt{(M_1.M_2\;..\;M_n)}} = \int^{n-1}\frac{dy_1.dy_2\;..\;dy_n}{y_n\sqrt{(N_1.N_2\;..\;N_n)}},$$

wo die Integration über alle positiven Werthe von $x_1, x_2, \;..\; x_{n-1}$ und von $y_1, y_2, \;..\; y_{n-1}$ zu erstrecken ist, welche den Gleichungen,

$$x_1^2+x_2^2+\;\cdot\cdot\;+x_n^2 = y_1^2+y_2^2+\;\cdot\cdot\;+y_n^2 = 1,$$

genügen. Dieser Beweis ergiebt sich aber sogleich, wenn man mittelst einer Ihrer Formeln jede der Gröfsen unter dem Integralzeichen wiederum durch ein $(n-1)$faches bestimmtes Integral ausdrückt.

Es ist nämlich

$$M_p = \frac{\varphi(\alpha_{n+p})}{F(\alpha_{n+p})} = \sum_{m=1}^{m=n}\frac{x_m^2}{\alpha_{n+p}-\alpha_m}$$

$$N_p = -\frac{\varphi_1(\alpha_p)}{F_1(\alpha_p)} = \sum_{m=1}^{m=n}\frac{y_m^2}{\alpha_{n+m}-\alpha_p}.$$

Schreibt man daher die n, in Bezug auf die n Variabeln $x_1^2, x_2^2, \;..\; x_n^2$ linearen Ausdrücke von $M_1, M_2, \;..\; M_n$ und ebenso die n, in Bezug auf die n Variabeln

$y_1^2, y_2^2, \ldots y_n^2$ linearen Ausdrücke von $N_1, N_2, \ldots N_n$, wie Systeme von n linearen Gleichungen untereinander, so unterscheiden sich die Coëfficienten der zwei Systeme nur dadurch, dafs die Horizontalreihen in dem einen System die Verticalreihen in dem Andern bilden. Hieraus folgt die identische Gleichung,

$$M_1 y_1^2 + M_2 y_2^2 + \cdots + M_n y_n^2$$
$$= N_1 x_1^2 + N_2 x_2^2 + \cdots + N_n x_n^2.$$

Es ist daher identisch

$$\int^{2n-2} \frac{dx_1 . dx_2 \ldots dx_{n-1} . dy_1 . dy_2 \ldots dy_{n-1}}{x_n y_n (M_1 y_1^2 + M_2 y_2^2 + \ldots + M_n y_n^2)^{\frac{1}{2}n}} = \int^{2n-2} \frac{dx_1 . dx_2 \ldots dx_{n-1} . dy_1 . dy_2 \ldots dy_{n-1}}{x_n y_n (N_1 x_1^2 + N_2 x_2^2 + \ldots + N_n x_n^2)^{\frac{1}{2}n}}.$$

Die Gröfsen

$$M_1, M_2, \ldots M_n; \quad N_1, N_2, \ldots N_n$$

sind, wie man aus ihren oben gegebenen Ausdrücken ersieht, sämmtlich positiv. Dehnt man die Integration über alle positiven Werthe der Variabeln aus, welche den Gleichungen

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1$$

genügen, so kann man, mit Hülfe der von Ihnen in der Abhandlung „De binis quibusl. functionibus etc." (*Crelle*, XII. S. 60) gefundenen Gleichung (15.),

$$\int^{n-1} \frac{dy_1 . dy_2 \ldots dy_{n-1}}{y_n (M_1 y_1^2 + M_2 y_2^2 + \ldots + M_n y_n^2)^{\frac{1}{2}n}} = \frac{S}{\sqrt{(M_1 . M_2 \ldots M_n)}},$$

wo S eine Zahl bedeutet,

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin \varphi_1^{n-2} d\varphi_1 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin \varphi_2^{n-3} d\varphi_2 \ldots \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin \varphi_{n-2} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi_{n-1},$$

die Integration links vom Gleichheitszeichen in Bezug auf die $(n-1)$ Variabeln y_p, rechts vom Gleichheitszeichen in Bezug auf die $(n-1)$ Variabeln x_p wirklich ausführen, und erhält so unmittelbar die zu beweisende Gleichheit.

Ich bin begierig, von Ihnen zu erfahren, ob Sie auf diesem von mir eingeschlagenen Wege oder auf einem andern zu dem Beweise der Relation zwischen den vielfachen Integralen gelangt sind.

Für $n = 2$ kommt diese Gleichung zwischen den transformirten $(n-1)$ fachen Integralen zurück auf die bekannte Relation,

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dt}{\sqrt{(-(t_1-\alpha_1)(t_1-\alpha_2)(t_1-\alpha_3)(t_1-\alpha_4))}} = \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} \frac{dt_2}{\sqrt{(-(t_2-\alpha_1)(t_2-\alpha_2)(t_2-\alpha_3)(t_2-\alpha_4))}},$$

welche auch aus einer Gleichung zwischen unbestimmten Integralen gefolgert

werden kann, die einer algebraischen Relation entspricht. Hierdurch wird es mir doch wieder wahrscheinlich, dafs die Relation zwischen den bestimmten Integralen auch für andere Werthe von n aus einer zwischen unbestimmten, welche einer algebraischen Relation entspricht, wird abgeleitet werden können, was ich so lange durch die verschiedenartigsten Mittel vergeblich versucht habe.

Für die elliptischen Integrale läfst sich die algebraische Relation, welche die Stelle der transcendenten vertritt, so darstellen:

$$0 = (\alpha_3-\alpha_2)x_1^2y_2^2-(\alpha_4-\alpha_1)y_1^2x_2^2$$

oder

$$x_1^2:y_1^2 = M_1:N_1,$$

folglich

$$x_2^2:y_2^2 = M_2:N_2;$$

alles in den oben definirten Zeichen. Man könnte allgemein die Substitution,

$$x_m^2:y_m^2 = M_m:N_m,$$

untersuchen, und zusehen, welche unbestimmte Transformationen sich durch dieselben leisten lassen. Ich bemerke deshalb, dafs diese Substitution die identische Gleichung,

$$M_1y_1^2+M_2y_2^2+\cdots+M_ny_n^2 = N_1x_1^2+N_2x_2^2+\cdots+N_nx_n^2,$$

auch abgesehen von den Werthen von M_m und N_m in x und y, identisch erfüllt.

Aufser der gefundnen Relation,

$$\begin{bmatrix}2,3,4,\ldots n\\1,2,3,\ldots n-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n+2,\ n+3,\ \ldots 2n\\n+1,\ n+2,\ \ldots 2n-1\end{bmatrix},$$

giebt es noch $(n-1)$ andere von derselben Art, *welche sich allgemein durch die Gleichung*

$$\begin{bmatrix}r+2,\ r+3,\ \ldots r+n\\r+1,\ r+2,\ \ldots r+n-1\end{bmatrix}$$
$$= (-1)^{n(r-1)}\begin{bmatrix}r+n+2,\ r+n+3,\ \ldots 2n,\quad 1,\ 2,\ 3,\ \ldots r\\r+n+1,\ r+n+2,\ \ldots 2n-1,\ 2n,\ 1,\ 2,\ \ldots r-1\end{bmatrix}$$

darstellen lassen, wo r eine von den Zahlen 1, 2, 3, .. $n-1$ *bedeutet.* Wenn man diese Relation auf dieselbe Art wie die oben gefundene ableiten wollte, so würde dies wegen der Grenzen der Integration Schwierigkeiten haben. Weil nämlich dann einige von den Variablen y_m^2 negativ werden, so könnte man die von Ihnen gegebene Gleichung nicht mehr benutzen. Allein die eine Relation reicht hin, um alle übrigen zu finden. Man hat hierzu nur

nöthig, nach dem Vorgange von *Richelot*, jedes einzelne der Integrale, welche die zwei Gruppen von je $(n-1)^2$ einfachen Integralen bilden, aus denen sich die beiden Seiten der gefundenen Gleichung als Determinanten zusammensetzen, durch *dieselbe* lineäre gebrochene Substitution zu transformiren, oder mit andern Worten: „man transformirt beide $(n-1)$fache Integrale durch die Substitution,

$$t_m = \frac{a+bv_m}{c+dv_m},$$

wo a, b, c, d Constanten sind und die Gröfsen v_m die neuen Variablen bedeuten."

Ich will allgemein setzen:

$$t = \frac{a+bv}{c+dv}, \quad \text{woraus} \quad -v = \frac{a-ct}{b-dt}.$$

Durchläuft t alle Werthe von α_1 bis α_{2n}, so erhält es in den $2n-1$ verschiedenen Intervallen die $(2n-1)$ Werthe $t_1, t_2, \ldots t_{2n-1}$, welche mit Ausschlufs von t_n die $2n-2$ Variablen der Integration sind. Dem Werthe t_m soll v_m entsprechen.

Man hat nun

$$\frac{dt}{dv} = \frac{bc-ad}{(c+dv)^2}.$$

Es sei

$$bc-ad > 0,$$

so wird v mit t zugleich wachsen und abnehmen. Es ist ferner

$$t-\alpha_m = \frac{a-\alpha_m c+(b-\alpha_m d)v}{c+dv}.$$

Ich setze

$$\beta_{r+m} = -\frac{a-\alpha_m c}{b-\alpha_m d} = -\frac{c}{d}+\frac{bc-ad}{d^2}\,\frac{1}{\frac{b}{d}-\alpha_m},$$

wo r eine von den Zahlen $1, 2, \ldots n-1$ bedeuten, und für $r+m$, wenn es gröfser als $2n$ ist, $r+m-2n$ gesetzt werden soll. Es wird dann

$$t-\alpha_m = \frac{b-\alpha_m d}{c+dv}(v-\beta_{r+m}).$$

Wie man sieht, ist β_{r+m} der Werth, den v für $t=\alpha_m$ annimmt. Die Reihe der Werthe von β_{r+m} wird also, von β_{r+1} angefangen, für fortschreitende Werthe des Index m so lange wachsen, bis das Intervall $\alpha_k \ldots \alpha_{k+1}$ erreicht

ist, in welchem $\frac{b}{d}$ liegt. Es sei $k=2n-r$, so dafs also

$$\alpha_{2n-r} < \frac{b}{d} < \alpha_{2n-r+1}.$$

Dann ist offenbar

$$\beta_{2n} = -\frac{a-\alpha_{2n-r}c}{b-\alpha_{2n-r}d}$$

die gröfste, und die nächstfolgende, dem α_{2n-r+1} entsprechende, nämlich

$$\beta_{2n+1} = \beta_1 = -\frac{a-\alpha_{2n-r+1}c}{b-\alpha_{2n-r+1}d},$$

die kleinste in der Reihe der $2n$ Gröfsen β_h. Es ist ferner

$$\beta_{r-m+1} = -\frac{a-\alpha_{2n-m+1}c}{b-\alpha_{2n-m+1}d}.$$

Nach dieser Beziehungsart hat man $\beta_h > \beta_{h+1}$ für jeden Werth von h von 1 bis $2n$ und es ist die Integration für die neue Variable v_m von β_{r+m} bis β_{r+m+1} anzustellen, wo für die Indices $r+m$ und $r+m+1$ die kleinsten positiven Zahlen zu setzen sind, welche ihnen in Bezug auf den Modul $2n$ congruent sind.

Bemerkt man die Gleichungen,

$$\Pi(t_1, t_2, \ldots t_{n-1}) = \frac{(bc-ad)^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)}\Pi(v_1, v_2, \ldots v_{n-1})}{(c+dv_1)^{n-2}(c+dv_2)^{n-2}\ldots(c+dv_{n-1})^{n-2}}$$

$$\Pi(t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots t_{2n-1}) = \frac{(bc-ad)^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)}\Pi(v_{n+1}, v_{n+2} \ldots v_{2n-1})}{(c+dv_{n+1})^{n-2}(c+dv_{n+2})^{n-2}\ldots(c+dv_{2n-1})^{n-2}}$$

$$dt_1 dt_2 \ldots dt_{n-1} = \frac{(bc-ad)^{n-1}dv_1\, dv_2 \ldots dv_{n-1}}{(c+dv_1)^2(c+dv_2)^2\ldots(c+dv_{n-1})^2}$$

$$dt_{n+1} dt_{n+2} \ldots dt_{2n-1} = \frac{(bc-ad)^{n-1}dv_{n+1}dv_{n+2}\ldots dv_{2n-1}}{(c+dv_{n+1})^2(c+dv_{n+2})^2\ldots(c+dv_{2n-1})^2},$$

so sieht man leicht, dafs die beiden $(n-1)$fachen Integrale U und V, welche einander gleich gefunden sind, sich in ganz ähnliche verwandeln, in denen nur die Gröfsen t und α durch die Gröfsen v und β ersetzt sind, von denen die letzteren wieder mit zunehmendem Index wachsen. Aber wenn früher t_m zwischen den Grenzen α_m und α_{m+1} zu nehmen war, ist jetzt v_m zwischen den Grenzen β_{r+m} und β_{r+m+1} zu nehmen. Man erhält also in der That,

$$\begin{bmatrix} r+2, r+3, \ldots r+n \\ r+1, r+2, \ldots r+n-1 \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{n(r-1)}\begin{bmatrix} r+n+2, r+n+3, \ldots 2n, & 1, & 2, 3, \ldots r \\ r+n+1, r+n+2, \ldots 2n-1, & 2n, & 1, 2, \ldots r-1 \end{bmatrix},$$

wo das Vorzeichen so bestimmt ist, dafs beide Integrale dasselbe Zeichen erhalten.

Für $n=3$ ergeben sich aus diesen Formeln die verlangten Relationen,

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\frac{(t_2-t_1)\,dt_1\,dt_2}{\sqrt{(F(t_1)F_1(t_1)F(t_2)F_1(t_2))}} = \int_{\alpha_4}^{\alpha_5}\int_{\alpha_5}^{\alpha_6}\frac{(t_5-t_4)\,dt_4\,dt_5}{\sqrt{(F(t_4)F_1(t_4)F(t_5)F_1(t_5))}}$$

$$\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}\frac{(t_2-t_1)\,dt_1\,dt_2}{\sqrt{(F(t_1)F_1(t_1)F(t_2)F_1(t_2))}} = \int_{\alpha_5}^{\alpha_6}\int_{\alpha_6}^{\alpha_1}\frac{(t_5-t_4)\,dt_4\,dt_5}{\sqrt{(F(t_4)F_1(t_4)F(t_5)F_1(t_5))}}$$

$$\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}\int_{\alpha_4}^{\alpha_5}\frac{(t_2-t_1)\,dt_1\,dt_2}{\sqrt{(F(t_1)F_1(t_1)F(t_2)F_1(t_2))}} = -\int_{\alpha_6}^{\alpha_1}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{(t_5-t_4)\,dt_4\,dt_5}{\sqrt{(F(t_4)F_1(t_4)F(t_5)F_1(t_5))}},$$

von denen sich indefs 2 aus der dritten schon vermöge der 4 Gleichungen zwischen den 12 einfachen ganzen Integralen ergeben.

Wie es sich in dieser Beziehung mit den Gleichungen zwischen den allgemeinen $(n-1)$fachen Integralen verhält, wie viele von ihnen nämlich neue, von den bis jetzt zwischen den $2n(n-1)$ ganzen Integralen bekannten $2(n-1)$ Relationen unabhängige Gleichungen darstellen, habe ich bis jetzt noch nicht ermittelt, und auch noch kein elegantes, übersichtliches Verfahren gefunden, um für den allgemeinen Fall aus jenen $2(n-1)$ von Ihnen zwischen den einfachen ganzen Integralen gefundenen Relationen zu den $(n-1)$fachen überzugehn. Für $n=3$ liegen die Combinationen, welchen man die $2(3-1)=4$ Gleichungen zu unterwerfen hat, um zu einer Relation zwischen *vier* von den hier betrachteten Doppel-Integralen zu gelangen, auf der Hand. Im Allgemeinen aber scheint es mir schwierig, diese Combinationen zu ermitteln.

Ich vermuthe, dafs wenn m ein Factor von $2n$ ist, allgemein die Gleichung

$$0=\begin{bmatrix}2,3,\ldots m\\1,2,\ldots m-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}m+2,\ m+3,\ldots 2m\\m+1,\ m+2,\ldots 2m-1\end{bmatrix}+\cdots$$
$$+(-1)^{\frac{2n}{m}-1}\begin{bmatrix}2n-m+2,\ 2n-m+3,\ldots 2n\\2n-m+1,\ 2n-m+2,\ldots 2n-1\end{bmatrix}$$

Statt findet, und Ihre Gleichungen zwischen den einfachen ganzen Integralen nur der specielle Fall von dieser für $m=2$ sind; ein ähnliches Verhältnifs wie zwischen den beiden elliptischen ganzen Integralen und den oben gegebenen Relationen zwischen den $(n-1)$fachen. Aber meine Versuche, dieses zu beweisen, sind bis jetzt noch vergeblich gewesen.

Erlauben Sie mir noch einige Bemerkungen in Bezug auf Ihre Abhandlung im 15ten Bande des mathematischen Journals „De integralibus qui-

busdam etc.", deren beide Theoreme, welche mir von großer Wichtigkeit scheinen, einer doppelten Verallgemeinerung fähig sind.

1) In den nach p und q und nach x und y zu integrirenden zwei Functionen,

$$\frac{U}{P'(r)N} \quad \text{und} \quad \frac{U}{\Pi'(z)O},$$

sind N^2 und O^2 als Functionen respective von p, q, r und von x, y, z durch die zwischen den 6 Variablen angenommenen Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$ bestimmt, welche in Bezug auf jedes der beiden Systeme von drei Variablen homogen sind, wofern nur $\mu\Pi+1$ und $\nu P+1$ homogene Functionen respective von den beiden Systemen Variabeln sind, Π von der μten und P von der νten Dimension. Diese Bedingung allein giebt schon die auf Seite 196 Ihrer Abhandlung gefundenen Gleichungen,

$$N.x = f'(y)\varphi'(z) - f'(z)\varphi'(y)$$
$$N.y = f'(z)\varphi'(x) - f'(x)\varphi'(z)$$
$$N.z = f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x),$$

aus welchen Sie den Ausdruck von N^2 in p, q, r, unabhängig von den Gleichungen $P=0$, $\Pi=0$, ableiten. Es wäre nun die Aufgabe, diese Gleichungen $P=0$, $\Pi=0$ so zu specialisiren, dafs man eine Gleichung zwischen Integralen von einfacher Form erhält. Interessant ist z. B. der Fall, wo man für $P=0$, $\Pi=0$, statt der Gleichungen zweier Kugeln, entweder die Gleichungen einer *Kugel* und eines *Rotationshyperboloïds*, oder die Gleichungen *zweier verschiedenen Gattungen angehörigen Rotationshyperboloïde* annimmt. Diese Annahme giebt sehr merkwürdige Gleichungen zwischen Doppel-Integralen.

2) Indem man die erweiterte Definition von Π und P beibehält, kann man die in Rede stehenden Theoreme auf eine beliebige Anzahl von Variablen ausdehnen. Nimmt man nämlich zwischen n Variablen $n-2$ homogene Gleichungen von der *ersten* und eine von der *zweiten* Ordnung an, deren Coëfficienten in beliebigen $n-2$ der vorgelegten $n-1$ Gleichungen *lineäre* homogene Functionen von n andern Variablen, in der $(n-1)$ten dieser Gleichungen aber homogene Functionen der *zweiten* Ordnung von denselben Variablen sind, so erhält man $n-1$ ähnliche Theoreme für $(n-1)$fache Integrale. Der Gang ist genau derselbe, wie der in Ihrer Abhandlung genommene. Man findet die Werthe von N^2 und O^2 als ganze rationale Functionen von je einem der beiden Systeme von n Variablen durch Elimination des andern Systems aus n lineären Gleichungen, von welchen $n-2$ die $n-2$ gegebenen

linearen Gleichungen selbst sein können, die andern beiden aber jede einen Coëfficienten von der Form $A-N$ haben. Man hat dann nur zu beweisen, dafs im Resultat der Elimination die erste Potenz von N verschwindet. Statt der mechanischen Rechnung, die sich für $n=3$ noch durchführen läfst, müssen natürlich hier wieder allgemeine Schlufsfolgerungen zum Ziele führen, zu denen Ihre Abhandlung über die Determinanten reichliches Material liefert. Ich behalte mir den allgemeinen Beweis noch vor. Bis jetzt habe ich die Sache nur durch Induction gefunden; es ist aber wohl kein Zweifel, dafs der Satz allgemein gilt, da er für $n=3$ und $n=4$ Statt findet.

Es wäre mir sehr erwünscht, wenn Sie Ihre Arbeiten über das auf Doppel-Integrale ausgedehnte *Abel*sche Additionstheorem bekannt machten, und dabei dasselbe ähnlich behandelten, wie das Theorem über einfache Integrale im 32ten Bande des *Crelle*schen Journals S. 220 u. ff. Die Art, wie Sie dort das Additionstheorem behandeln, hat nämlich das voraus, dafs sie auch diejenigen Gleichungen liefert, welche den elliptischen von der Form

$$\varkappa'^2 = \Delta\,\mathrm{am}\,u\,\Delta\,\mathrm{am}\,u'\,\Delta\,\mathrm{am}(u+u') - \varkappa^2\cos\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u'\cos\mathrm{am}(u+u')$$

$$\cos\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u' = \sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,u'\,\Delta\,\mathrm{am}(u+u') + \cos\mathrm{am}(u+u')$$

entsprechen. Bezeichnet man nämlich mit u_m nicht die Summe der Combinationen der Wurzeln der Gleichung

$$\frac{Ry^2+2Sy+T}{y} = 0,$$

sondern den Werth, den der erste Theil dieser Gleichung für $x=\alpha_m$ annimmt, und ist $x-\alpha_m$ ein Factor von $SS-RT$, so wird

$$yu_m = (m+uy)^2,$$

und man erhält daher auf die in der Abhandlung angegebene Art,

$$\varkappa_m\sqrt{(u_1)} + \lambda_m\sqrt{(u_2)} + \mu_m\sqrt{(u_m)} = 0.$$

Verschwindet endlich in S^2-RT der Coëfficient der höchsten Potenz von x, d. i. von x^{2n}, so wird auch y ein vollständiges Quadrat von der Form $(m+ny)^2$, und die Gleichung 2ten Grades nimmt die Form,

$$A\sqrt{(u_1)} + B\sqrt{(u_2)} = 1,$$

an.

Betrachtet man die Variabeln als Functionen der Integrale, so erhält man durch Vermehrung der Argumente um halbe Indices aus jeder dieser Gleichungen eine gewisse Anzahl anderer, in welchen aber die Functionen

der Summe beider Argumente unverändert geblieben sind. Diese kann man daher aus je zwei dieser Gleichungen ohne Mühe finden. Die Gleichung

$$A\sqrt{(u_1)} + B\sqrt{(u_2)} = 1$$

entspricht übrigens vollkommen der ersten von den zwei oben gegebenen elliptischen Formeln.

Ich schliefse endlich diesen etwas langen Brief, weil ich mich beeilen mufs, den Beweis der zwischen den bestimmten Integralen Statt findenden Relation der Pariser Akademie als ein Nachtrag zu meiner Arbeit zu übersenden, da der darin gegebene Beweis nicht für streng gehalten werden dürfte.

14.

Auszug eines Schreibens des Herrn Director P. A. Hansen.

Gotha den 21. November 1850.

In Betreff des von mir mit v_1 bezeichneten Bogens, über welchen ich Ihnen mehrere höchst interessante und lehrreiche Gespräche und Briefe verdanke, bin ich endlich auf folgende Betrachtungen gekommen, von welchen ich glaube, dafs sie die Sache klar machen.

Ich fange bei dem Satze an, den ich in der Ihnen handschriftlich mitgetheilten Abhandlung den *zweiten* nenne. Diesen habe ich, wie Sie wissen, bisher wie folgt ausgesprochen:

„Wenn L eine Function blofs von den auf *feste* rechtwinkliche Achsen „bezogenen Coordinaten x, y, z eines Planeten oder Satelliten ist, und Λ die „Function bedeutet, in die L übergeht, wenn man darin τ statt t substituirt, „in so fern die Zeit t nicht in den, in den Ausdrücken für x, y, z enthaltenen „veränderlichen willkürlichen Constanten vorkommt, dann ist in der gestörten „Bewegung, wie in der ungestörten,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \overline{\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \tau}\right)},$$

„wo der Strich über der Function bedeutet, dafs man nach der Differentiation „τ in t verwandeln soll."

Dieser Satz ist einer gröfseren Ausdehnung fähig, die ich, um möglichst kurz zu sein, mit einer Erklärung einleiten werde, welche den von Ihnen angewandten ***Terminus technicus*** betrifft.

Erklärung.

„***Ideale Coordinaten*** nenne ich alle Systeme von Coordinaten, die die „Eigenschaft besitzen, dafs ihre ersten Differentiale in Bezug auf die Zeit in „der gestörten Bewegung dieselbe Form haben wie in der ungestörten."

Zweiter Satz.

„Wenn L eine Function blofs von idealen Coordinaten ist, ohne deren „Differentiale oder die veränderlichen willkürlichen Constanten sonst zu ent„halten, und $\varDelta$ die Function bedeutet (etc. wie oben), dann ist (etc. wie oben)

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \overline{\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial \tau}\right)}."$$

Es mufs nun auseinandergesetzt werden, welche Coordinaten *ideale* sind. Zuvörderst sind die auf feste rechtwinkliche Achsen bezogenen Coordinaten x, y, z solche, denn für sie bestehen die folgenden Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} 0 = \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)\partial a + \left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)\partial b + \text{etc.} \\ 0 = \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)\partial a + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)\partial b + \text{etc.} \\ 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)\partial a + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)\partial b + \text{etc.,} \end{cases}$$

wo a, b, etc. die durch die Integration der Gleichungen der ungestörten Bewegung eingeführten willkürlichen Constanten bedeuten. Sei nun X, Y, Z irgend ein andres System von rechtwinklichen Coordinaten, und α, β, etc. die Cosinusse der Winkel, die die Achsen dieser Coordinaten mit denen jener machen, dann ist bekanntlich

$$(2.)\quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y + \gamma Z \\ y = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z \\ z = \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} X = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z \\ Y = \beta x + \beta' y + \beta'' z \\ Z = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z \end{cases} \quad (3.)$$

Wären nun α, β, etc. constante Gröfsen, so wäre ohne Weiteres X, Y, Z ein System idealer Coordinaten. Nehmen wir aber α, β, etc. als veränderliche Gröfsen, und zwar als Functionen der eben genannten willkürlichen Constanten an, dann werden X, Y, Z nur dann ideale Coordinaten, wenn wir die folgenden Bedingungsgleichungen aufstellen:

$$(4.)\quad \begin{cases} 0 = x\,\partial\alpha + y\,\partial\alpha' + z\,\partial\alpha'' \\ 0 = x\,\partial\beta + y\,\partial\beta' + z\,\partial\beta'' \\ 0 = x\,\partial\gamma + y\,\partial\gamma' + z\,\partial\gamma''. \end{cases}$$

Denn vermöge der Gleichungen (1.) und (4.) ist es klar, dafs nun erst die ersten Differentiale von (3.) in Bezug auf die Zeit dieselbe Form haben, man mag die in x, y, z, α, β, etc. enthaltenen willkürlichen Constanten veränderlich setzen oder nicht.

Untersuchen wir die Gleichungen (4.) näher. Substituiren wir in (4.) die Gleichungen (3.), und setzen zur Abkürzung,

$$(5.)\quad \begin{cases} \beta\partial\alpha+\beta'\partial\alpha'+\beta''\partial\alpha'' = C\partial t \\ \alpha\partial\gamma+\alpha'\partial\gamma'+\alpha''\partial\gamma'' = B\partial t \\ \gamma\partial\beta+\gamma'\partial\beta'+\gamma''\partial\beta'' = A\partial t, \end{cases}$$

dann gehen, in Folge der bekannten, zwischen α, β, etc. Statt findenden Bedingungsgleichungen, die Gleichungen (4.) in folgende über:

$$(6.)\quad 0=CY-BZ,\quad 0=CX-AZ,\quad 0=BX-AY,$$

die aber ersichtlich nur *zwei* wesentlich von einander verschiedene Gleichungen bilden. Es ist also jede der Gleichungen (4.) nothwendige Folge der beiden andern.

Da nun jedes bestimmte Coordinatensystem von *drei* von einander unabhängigen Gröfsen oder Bedingungen abhängt, so folgt, dafs durch die Gleichungen (3.) und (4.) eine (streng unendlich) grofse Anzahl von idealen Coordinatensystemen gegeben ist. Da ferner die Veränderlichkeit von α, β, etc. die Veränderlichkeit der Achsen dieser Coordinatensysteme mit sich bringt, so beziehen sich alle durch (3.) und (4.) gegebenen idealen Coordinatensysteme auf bewegliche Achsen. Ich führe hiebei noch folgenden Satz an:

„In allen auf bewegliche Achsen bezogenen Systemen idealer Coordi-„naten eines Planeten oder Satelliten fällt die instantane Drehungs-Achse stets „mit dem Radius-Vector des Planeten oder Satelliten zusammen."

Die Cosinusse der Winkel zwischen der instantanen Drehungs-Achse und den Achsen der x, y, z sind bekanntlich, resp.

$$\frac{\alpha A+\beta B+\gamma C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},\quad \frac{\alpha' A+\beta' B+\gamma' C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},\quad \frac{\alpha'' A+\beta'' B+\gamma'' C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},$$

und die Cosinusse der Winkel zwischen dem Radius-Vector und diesen Achsen,

$$\frac{\alpha X+\beta Y+\gamma Z}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}},\quad \frac{\alpha' X+\beta' Y+\gamma' Z}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}},\quad \frac{\alpha'' X+\beta'' Y+\gamma'' Z}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}}.$$

Es geben aber die Gleichungen (6.),

$$\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} = \frac{X}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}},$$

$$\frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} = \frac{Y}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}},$$

$$\frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} = \frac{Z}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}},$$

durch deren Substitution in die vorstehenden Ausdrücke der Satz erwiesen ist.

Um irgend ein auf bewegliche Achsen bezogenes ideales Coordinatensystem zu erhalten, dürfen wir dem Vorhergehenden zufolge den Gleichungen (4.) irgend eine willkürliche Bedingung hinzufügen, die nur dadurch beschränkt ist, dafs sie den Gleichungen (4.) oder (6.) nicht widersprechen darf. Ich werde daher im Folgenden annehmen, dafs für den Ort des Planeten oder Satelliten stets $Z=0$ sei. Hiemit ergeben sich statt (2.) und (3.) die folgenden Gleichungen:

$$(7.)\quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y \\ y = \alpha' X + \beta' Y \\ z = \alpha'' X + \beta'' Y \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{rcases} X = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z \\ Y = \beta x + \beta' y + \beta'' z \\ 0 = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z \end{rcases} \quad (8.)$$

und statt der Gleichungen (6.) erhalten wir $C=0$, $BX-AY=0$, oder welches dasselbe ist *)

$$(9.)\quad \begin{cases} 0 = \beta\partial\alpha + \beta'\partial\alpha' + \beta''\partial\alpha'' \\ 0 = (\alpha\partial\gamma + \alpha'\partial\gamma' + \alpha''\partial\gamma'')X - (\gamma\partial\beta + \gamma'\partial\beta' + \gamma''\partial\beta'')Y. \end{cases}$$

Ich werde nun beweisen, dafs v_1 in der That eine blofse Function der idealen Coordinaten X, Y ist. Ich bezeichne, wie Sie wissen, mit ∂v_1 den Winkel zwischen den, den Zeiten t und $t+\partial t$ entsprechenden Radii-Vectores r und $r+\partial r$ eines Planeten oder Satelliten. Wir haben demzufolge die Gleichung,

$$r^2\partial v_1^2 + \partial r^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2,$$

die leicht in folgende umgewandelt werden kann,

$$\partial v_1 = \frac{\sqrt{((x\partial y - y\partial x)^2 + (y\partial z - z\partial y)^2 + (z\partial x - x\partial z)^2)}}{x^2+y^2+z^2}.$$

Die Differentiale von (7.) und (8.) sind in der gestörten wie ungestörten Bewegung,

$$(10.)\quad \begin{cases} \partial x = \alpha\partial X + \beta\partial Y \\ \partial y = \alpha'\partial X + \beta'\partial Y \\ \partial z = \alpha''\partial X + \beta''\partial Y \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{rcases} \partial X = \alpha\partial x + \alpha'\partial y + \alpha''\partial z \\ \partial Y = \beta\partial x + \beta'\partial y + \beta''\partial z \\ 0 = \gamma\partial x + \gamma'\partial y + \gamma''\partial z \end{rcases} \quad (11.)$$

Combinirt man diese Gleichungen mit den Gleichungen (7.) und (8.), so bekommt man aus den einen,

$$\begin{aligned} x\partial y - y\partial x &= (\alpha\beta' - \alpha'\beta)(X\partial Y - Y\partial X) \\ y\partial z - z\partial y &= (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')(X\partial Y - Y\partial X) \\ z\partial x - x\partial z &= (\alpha''\beta - \alpha\beta'')(X\partial Y - Y\partial X), \end{aligned}$$

---

*) *Lagrange* hat diese Gleichungen nicht bemerkt, denn obgleich er das Coordinatensystem (7.) anwendet, setzt er doch (Méc. anal. Tome II. p. 96)

$$\beta\partial\alpha + \beta'\partial\alpha' + \beta''\partial\alpha'' = \partial\chi.$$

und aus den andern,

$$X\partial Y - Y\partial X = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)(x\partial y - y\partial x) + (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')(y\partial z - z\partial y) + (\alpha''\beta - \alpha\beta'')(z\partial x - x\partial z),$$

also durch die Elimination von $\alpha\beta' - \alpha'\beta$, etc.

$$(X\partial Y - Y\partial X)^2 = (x\partial y - y\partial x)^2 + (y\partial z - z\partial y)^2 + (z\partial x - x\partial z)^2.$$

Erwägen wir noch, dafs $X^2 + Y^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist, so geht die obige Gleichung für ∂v_1 in folgende über,

$$\partial v_1 = \frac{X\partial Y - Y\partial X}{X^2 + Y^2},$$

wovon, wenn wir die willkürliche Constante $= 0$ machen, das Integral

$$(12.) \qquad v_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{Y}{X}$$

ist. Also v_1 ist Function blofs der idealen Coordinaten X und Y, und der obige zweite Satz findet auf v_1 Anwendung.

Ich erlaube mir die weiteren Folgerungen, die ich auf analytischem Wege aus den obigen Formeln gezogen habe, hier anzuführen, da mir nicht bekannt ist, dafs sie von irgend einem Andern gegeben worden wären. *Lagrange* hat schon die Gleichungen (7.) angewandt, aber die Folgerungen, die ich hier daraus ziehen werde, finden sich nicht bei ihm. Wegen der Bedingungsgleichung

$$0 = \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta''$$

giebt die erste Gleichung (9.), nemlich

$$(13.) \quad \begin{cases} 0 = \beta\partial\alpha + \beta'\partial\alpha' + \beta''\partial\alpha'', \\ \text{die folgende,} \\ 0 = \alpha\partial\beta + \alpha'\partial\beta' + \alpha''\partial\beta''. \end{cases}$$

Diesen kann man zufolge der Gleichungen $\alpha d\alpha + \alpha' d\alpha' + \alpha'' d\alpha'' = 0$, $\beta d\beta + \beta' d\beta' + \beta'' d\beta'' = 0$, und der zwischen α, β, etc. bestehenden Bedingungsgleichungen,

$$0 = \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'', \qquad 0 = \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'',$$

durch die folgenden Genüge leisten, in denen μ und μ' beliebig sind,

$$\begin{aligned} \partial\alpha &= \gamma\mu\partial p, & \partial\beta &= \gamma\mu'\partial q \\ \partial\alpha' &= \gamma'\mu\partial p, & \partial\beta' &= \gamma'\mu'\partial q \\ \partial\alpha'' &= \gamma''\mu\partial p, & \partial\beta'' &= \gamma''\mu'\partial q. \end{aligned}$$

Um den Buchstaben p und q dieselbe Bedeutung zu geben, die ich denselben in meinen Abhandlungen beigelegt habe, setze ich $\mu = -\frac{1}{\gamma''}$, $\mu' = \frac{1}{\gamma''}$, wodurch sich ergiebt:

$$(14.)\quad \begin{cases} \partial\alpha = -\frac{\gamma}{\gamma''}\partial p, & \partial\beta = \frac{\gamma}{\gamma''}\partial q \\ \partial\alpha' = -\frac{\gamma'}{\gamma''}\partial p, & \partial\beta' = \frac{\gamma'}{\gamma''}\partial q \\ \partial\alpha'' = -\partial p, & \partial\beta'' = \partial q. \end{cases}$$

Wir erhalten daher geradezu

$$p = -\alpha'', \quad q = \beta''.$$

Die zweite Gleichung (9.) kann auch so geschrieben werden,

$$0 = (\gamma\partial\alpha + \gamma'\partial\alpha' + \gamma''\partial\alpha'')X + (\gamma\partial\beta + \gamma'\partial\beta' + \gamma''\partial\beta'')Y.$$

Substituiren wir die Gleichungen (14.) hierin, so erhalten wir,

$$(15.)\quad 0 = X\partial p - Y\partial q.$$

Betrachten wir nun die *zweiten* Differentiale der Gleichungen (8.), d. i. die ersten der Gleichungen (11.). Diese sind,

$$\begin{aligned} \partial^2 X &= \alpha\partial^2 x + \alpha'\partial^2 y + \alpha''\partial^2 z + \partial\alpha\partial x + \partial\alpha'\partial y + \partial\alpha''\partial z \\ \partial^2 Y &= \beta\partial^2 x + \beta'\partial^2 y + \beta''\partial^2 z + \partial\beta\partial x + \partial\beta'\partial y + \partial\beta''\partial z \\ 0 &= \gamma\partial^2 x + \gamma'\partial^2 y + \gamma''\partial^2 z + \partial\gamma\partial x + \partial\gamma'\partial y + \partial\gamma''\partial z. \end{aligned}$$

Wegen der Gleichungen (14.) und der letzten Gleichung (11.) gehen die beiden ersten vorstehenden sofort in folgende über,

$$(16.)\quad \begin{cases} \partial^2 X = \alpha\partial^2 x + \alpha'\partial^2 y + \alpha''\partial^2 z \\ \partial^2 Y = \beta\partial^2 x + \beta'\partial^2 y + \beta''\partial^2 z. \end{cases}$$

Die dritte der vorstehenden Gleichungen geht durch die Gleichung (10.) zuerst in folgende über,

$$0 = \gamma\partial^2 x + \gamma'\partial^2 y + \gamma''\partial^2 z + (\alpha\partial\gamma + \alpha'\partial\gamma' + \alpha''\partial\gamma'')\partial X + (\beta\partial\gamma + \beta'\partial\gamma' + \beta''\partial\gamma'')\partial Y,$$

oder in folgende,

$$0 = \gamma\partial^2 x + \gamma'\partial^2 y + \gamma''\partial^2 z - (\gamma\partial\alpha + \gamma'\partial\alpha' + \gamma''\partial\alpha'')\partial X - (\gamma\partial\beta + \gamma'\partial\beta' + \gamma''\partial\beta'')\partial Y,$$

also erhalten wir vermittelst der Gleichungen (14.),

$$(17.)\quad \partial X\partial p - \partial Y\partial q = -\gamma''\{\gamma\partial^2 x + \gamma'\partial^2 y + \gamma''\partial^2 z\}.$$

Nennen wir nun die Störungsfunction Ω, und setzen die Summe der Massen der Sonne und des Planeten $= 1$, dann können wir die Gleichungen

für die gestörte Bewegung, wie folgt, darstellen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{x}{r^3} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{y}{r^3} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{z}{r^3} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right).$$

Aber wenn wir hier einen Augenblick $Z=\gamma x+\gamma' y+\gamma'' z$ setzen, so können wir Ω als Function von X, Y, Z betrachten und erhalten sofort:

$$\alpha\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)+\alpha'\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)+\alpha''\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial X}\right)$$
$$\beta\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)+\beta'\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)+\beta''\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial Y}\right)$$
$$\gamma\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)+\gamma'\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)+\gamma''\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right).$$

Um in den Ausdrücken rechter Hand zu den hier angewandten Coordinaten X und Y überzugehen, brauchen wir nur nach den partiellen Differentiationen von Ω die Coordinate $Z=0$ zu machen.

Durch Hülfe dieser Gleichungen gehen die Gleichungen (16.) in folgende über:

$$(18.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2}+\dfrac{X}{r^3} = \left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial X}\right) \\ \dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2}+\dfrac{Y}{r^3} = \left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial Y}\right), \end{cases}$$

die genau dieselbe Form haben, wie die für x und y. Die Gleichung (17.) wird ferner,

$$\frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial Y}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial t} = -\gamma''\left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right),$$

und hieraus mittelst (15.), d. i. mittelst $X\frac{\partial p}{\partial t}-Y\frac{\partial q}{\partial t}=0$,

$$\frac{X\partial Y-Y\partial X}{\partial t}\cdot\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma'' Y\left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right)$$
$$\frac{X\partial Y-Y\partial X}{\partial t}\cdot\frac{\partial q}{\partial t} = \gamma'' X\left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right).$$

Nehmen wir jetzt das aus der Theorie der Veränderung der willkürlichen Constanten entspringende Ergebnifs auf, dafs der Planet in jedem Zeittheilchen ∂t sich nach den *Kepplerschen* Gesetzen in einer, seine wirkliche Bahn

osculirenden Ellipse bewegt. Da zufolge des Obigen die Ebene der X, Y stets durch die Sonne und durch die zwei Örter des Planeten geht, die den Zeiten t und $t+\partial t$ entsprechen, so ist es diese Ebene, in welcher alle osculirenden Ellipsen construirt werden müssen. Die Gleichungen (18.) geben demzufolge auf bekannte Art, sowohl in der gestörten, wie in der ungestörten Bewegung,

$$\frac{X\partial Y - Y\partial X}{\partial t} = \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{an},$$

wenn a die halbe grofse Achse, n die mittlere Bewegung und ae die Excentricität des Planeten bedeuten. Hiermit wird

$$(19.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} = \gamma'' Y \dfrac{an}{\sqrt{(1-e^2)}}\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial Z}\right) \\ \dfrac{\partial q}{\partial t} = \gamma'' X \dfrac{an}{\sqrt{(1-e^2)}}\left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial Z}\right), \end{cases}$$

und diese Gleichungen bilden in Verbindung mit den Gleichungen (18.) ein vollständiges System von Gleichungen der gestörten Bewegung eines Planeten. indem die Örter desselben im Raume durch die vier Gröfsen X, Y, p und q vollständig bestimmt sind. Um dieses zu zeigen, will ich die obigen Gleichungen für die Coordinaten weiter entwickeln.

Aus der Gleichung (12.) geht hervor, dafs der Winkel (oder Kreisbogen) v_1 stets in der Ebene der X, Y liegt und sich von der positiven Achse der X bis zum Radius-Vector r erstreckt. Nennen wir daher die wahre Anomalie des Planeten f, und den Winkel zwischen der positiven Achse der X und dem Perihel χ, dann ist, weil die osculirende Ellipse stets in der Ebene der X, Y liegt,

$$v_1 = f + \chi.$$

Betrachten wir nun die Verbindung der beweglichen Ebene der XY mit der festen der xy, welche letztere sowohl, wie die in derselben liegende feste Achse der x, wir im Raume irgendwie gelegen annehmen. Sei

i die Neigung der Ebene der XY gegen die der xy;

ϑ in der Ebene der xy der Winkel zwischen der Achse der positiven x und dem Theile der Durchschnittslinie der Ebenen der XY und der xy, durch welchen sich der Planet bewegt, wenn die z vom Negativen ins Positive übergehen;

ω in der Ebene der XY der Winkel zwischen dem eben bezeichneten Theile derselben Durchschnittslinie und dem Perihel des Planeten.

Da nun

$$X = r\cos v_1, \qquad Y = r\sin v_1,$$

so ergiebt sich, wenn

$$\sigma = \chi - \omega$$

den Winkel zwischen der Achse der positiven X und jenem Theil der Durchschnittslinie bedeutet,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos\sigma\cos\vartheta + \sin\sigma\sin\vartheta\cos i \\
\alpha' &= \cos\sigma\sin\vartheta - \sin\sigma\cos\vartheta\cos i \\
\alpha'' &= -\sin i\sin\sigma \\
\beta &= \sin\sigma\cos\vartheta - \cos\sigma\sin\vartheta\cos i \\
\beta' &= \sin\sigma\sin\vartheta + \cos\sigma\cos\vartheta\cos i \\
\beta'' &= \sin i\cos\sigma \\
\gamma &= \sin i\sin\vartheta \\
\gamma' &= -\sin i\cos\vartheta \\
\gamma'' &= \cos i.
\end{aligned}$$

Wenn man diese Ausdrücke in die Gleichungen (7.) substituirt, und v_1 und σ durch die Gleichungen $v_1 = f + \chi$, $\sigma = \chi - \omega$ eliminirt, so gehen daraus die bekannten allgemeinsten Ausdrücke der Coordinaten x, y, z hervor.

Durch die Gleichungen (14.) hatten wir $p = -\alpha''$, $q = \beta''$; es ist daher auch

$$p = \sin i\sin\sigma, \qquad q = \sin i\cos\sigma,$$

oder p der Sinus des Winkels, den die Achse der X, und q der Sinus des Winkels, den die Achse der Y mit der Ebene der xy macht; p und q liegen beide im ersten Quadranten, wenn die Achse der Y sich über und die Achse der X sich unter der Ebene der xy befindet.

Differentiiren wir die obigen Ausdrücke von α, α' und α'', indem wir σ, ϑ und i veränderlich setzen, dann ergiebt sich leicht,

$$\begin{aligned}
\partial\alpha &= -\beta\,\partial\sigma - \alpha'\,\partial\vartheta - \gamma\sin\sigma\,\partial i \\
\partial\alpha' &= -\beta'\,\partial\sigma + \alpha\,\partial\vartheta - \gamma'\sin\sigma\,\partial i \\
\partial\alpha'' &= -\beta''\,\partial\sigma \qquad\qquad - \gamma''\sin\sigma\,\partial i.
\end{aligned}$$

Substituiren wir diese Formeln in die erste Gleichung (9.), nemlich in

$$0 = \beta\,\partial\alpha + \beta'\,\partial\alpha' + \beta''\,\partial\alpha'',$$

so bekommen wir wegen

$$\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, \quad \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0, \quad \alpha\beta' - \alpha'\beta = \gamma'' = \cos i:$$

$$\partial\sigma = \cos i\,\partial\vartheta.$$

Diese Gleichung, die ich früher auf geometrischem Wege abgeleitet habe, ist also nothwendige Folge der hier eingeführten Gleichungen (9.). Die beiden willkürlichen Constanten σ und ϑ müssen wegen dieser Gleichung als von einander abhängige betrachtet werden; allein es bleiben demungeachtet in den obigen Ausdrücken *sechs*, von einander unabhängige willkürliche Constanten übrig. Es enthalten nemlich r und f *drei*, und zwar die grofse Achse, die Excentricität und die mittlere Anomalie in der Zeitepoche; dazu kommen noch die *drei* unabhängigen willkürlichen Constanten χ, σ, i, wofür man auch χ, p, q wählen kann.

Ich erwähne noch, dafs die vorstehenden Betrachtungen auch auf die Theorie der Rotationsbewegung angewandt werden können, und dafs die Differentiale $\frac{\partial\chi}{\partial t}$, $\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial q}{\partial t}$ mit den in dieser Theorie vorkommenden drei instantanen Drehungsgeschwindigkeiten in engster Beziehung stehen. Auch möchte in der allgemeinen Theorie der Curven von doppelter Krümmung das hier angewandte Coordinatensystem X, Y von wesentlichem Nutzen sein.

Die oben angeführten Ausdrücke für α, α', etc. geben leicht:

$$\alpha\cos(\vartheta-\sigma)+\alpha'\sin(\vartheta-\sigma)=\cos^2\sigma+\sin^2\sigma\cos i=1-\frac{p^2}{1+\surd(1-p^2-q^2)}$$

$$-\alpha\sin(\vartheta-\sigma)+\alpha'\cos(\vartheta-\sigma)=\sin\sigma\cos\sigma(1-\cos i)=\frac{pq}{1+\surd(1-p^2-q^2)}$$

$$\beta\cos(\vartheta-\sigma)+\beta'\sin(\vartheta-\sigma)=\sin\sigma\cos\sigma(1-\cos i)=\frac{pq}{1+\surd(1-p^2-q^2)}$$

$$-\beta\sin(\vartheta-\sigma)+\beta'\cos(\vartheta-\sigma)=\sin^2\sigma+\cos^2\sigma\cos i=1-\frac{q^2}{1+\surd(1-p^2-q^2)}.$$

Die Gleichungen

$$p=\sin i\sin\sigma,\qquad q=\sin i\cos\sigma$$

geben

$$q\,\partial p-p\,\partial q=\sin^2 i\,\partial\sigma.$$

Es folgt ferner aus $\partial\sigma=\cos i\,\partial\vartheta$,

$$\partial(\vartheta-\sigma)=(1-\cos i)\,\partial\vartheta=\frac{1-\cos i}{\cos i}\partial\sigma=\frac{\sin^2 i\,\partial\sigma}{\cos i\,(1+\cos i)}$$

und daher

$$\partial(\vartheta-\sigma)=\frac{q\,\partial p-p\,\partial q}{\cos i\,(1+\cos i)},$$

oder wenn man

$$\vartheta-\sigma=\vartheta-\chi+\omega=\Lambda$$

setzt,

$$\partial \Lambda = \partial(\vartheta - \sigma) = \frac{q\partial p - p\partial q}{[1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}]\sqrt{(1-p^2-q^2)}}.$$

Nennen wir nun die auf der festen Ebene der xy gezählte Länge des Planeten l, und die Breite desselben über dieser Ebene b, dann ist auch

$$x = r\cos b\cos l,\quad y = r\cos b\sin l,\quad z = r\sin b,$$

und wir ziehen daher aus den vorstehenden Formeln:

$$r\cos b\sin(l-\Lambda) = Y + q\frac{pX-qY}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}} = Y - \frac{qz}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}$$

$$r\cos b\cos(l-\Lambda) = X - p\frac{pX-qY}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}} = X + \frac{pz}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}$$

$$r\sin b = z \quad = -pX + qY,$$

wo

$$\Lambda = \int\frac{q\partial p - p\partial q}{[1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}]\sqrt{(1-p^2-q^2)}}.$$

Es zeigt sich hiemit, dafs in der That x, y, z, und also auch der Ort des Planeten als Functionen der vier Gröfsen X, Y, p, q betrachtet werden können; wie oben behauptet wurde. An die vorstehenden Formeln schliefst sich die merkwürdige Transformation an, die Sie kennen, und von welcher Sie mir eine elegante Construction gegeben haben.

Da x, y, z als Functionen von X, Y, p, q betrachtet werden können, so kann man auch Ω als Function dieser vier Gröfsen betrachten. Da nun i der Winkel zwischen den Achsen der z und der Z ist, so giebt die Gleichung $z = -pX + qY$ schon zu erkennen, dafs

$$Y\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right) = \cos i\left(\frac{\partial\Omega}{\partial q}\right),\quad X\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right) = -\cos i\left(\frac{\partial\Omega}{\partial p}\right)$$

ist, welche Gleichungen sich übrigens auch auf andere Arten ableiten lassen. Wir erhalten hiermit aus den Gleichungen (19.) die folgenden,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{an}{\sqrt{(1-e^2)}}\cos^2 i\left(\frac{\partial\Omega}{\partial q}\right),\quad \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{an}{\sqrt{(1-e^2)}}\cos^2 i\left(\frac{\partial\Omega}{\partial p}\right),$$

die nicht minder wie die Gleichungen (19.), in Verbindung mit (18.) ein vollständiges System von Gleichungen der gestörten Bewegung eines Planeten oder Satelliten bilden.

Um nicht zu lang zu werden, schliefse ich hier mit dem lebhaftesten Wunsche, Sie bald wieder bei uns zu sehen.

15.
Auszug zweier Schreiben an Herrn Director Hansen.

I.

Berlin, den 15. December 1850.

Erlauben Sie, dafs ich auf Ihre gütige Mittheilung des leichten und eleganten Weges, auf welchem Sie zu einer eigenthümlichen und merkwürdigen Form der Störungsgleichungen gelangen, mit einigen Betrachtungen rein formeller Art antworte. Sie sollen die ungewöhnliche Bedeutung betreffen, welche Lagrange, Sie selbst und andere bisweilen mit den Worten ***Function*** und ***Element*** und den Zeichen der ***partiellen Differentialquotienten*** verbinden.

Veränderliche willkürliche Constanten oder ***Elemente*** sind in der Theorie der Störungen gewisse Functionen der Coordinaten, ihrer ersten Differentialquotienten und der Zeit genannt worden, welche in der ungestörten elliptischen Bewegung einer willkürlichen Constante gleich werden, oder deren Differential durch die Substitution der Differentialgleichungen des ungestörten Problems identisch verschwindet. Diese Functionen haben die Eigenschaft, dafs sie in der gestörten Bewegung von wirklichen Constanten nur um kleine Gröfsen von der Ordnung der störenden Kräfte verschieden bleiben. Nennt man die Function der Coordinaten, ihrer ersten Differentialquotienten (der Componenten der Geschwindigkeit) und der Zeit, welche einem Elemente gleich ist, die ***Bedeutung*** dieses Elements, so kann man sagen, dafs jedes Element in der gestörten Bewegung dieselbe Bedeutung wie in der ungestörten hat.

Da die sechs Elemente denselben Functionen der drei Coordinaten, ihrer ersten Differentialquotienten und der Zeit im gestörten und ungestörten Problem gleich sind, so sind auch umgekehrt die drei Coordinaten und ihre ersten Differentialquotienten im gestörten wie im ungestörten Problem denselben Functionen der sechs Elemente und der Zeit gleich. Es folgt hieraus der bekannte Satz, der auch wohl zur Definition der veränderlichen Elemente zu dienen pflegt, dafs in den ersten Differentialen der Ausdrücke der Coordinaten durch die Elemente und die Zeit der aus der Veränderlichkeit der Elemente hervorgehende Theil verschwindet. Man erweitert diesen Satz leicht

dahin, dafs man von jeder Gleichung zwischen den Coordinaten, den Elementen und der Zeit, $u = 0$, welche gleichzeitig im gestörten wie im ungestörten Problem gilt, das erste Differential so nehmen kann, als wären die Elemente constant, und dafs in du der von der Veränderlichkeit der Elemente, so weit sie in u *explicite* vorkommen, herrührende Theil besonders verschwindet.

Keine Function der Elemente und der Zeit, welche sich nicht auf eine Function der Coordinaten und der Zeit (oder auch auf eine wirkliche Constante) reduciren läfst, kann die Eigenschaft der Coordinaten haben, dafs ihr erster Differentialquotient im gestörten Problem durch dieselbe Function der Elemente und der Zeit ausgedrückt wird, wie im ungestörten.

Aber Sie haben ja solche Functionen X und Y angegeben, welche diese Eigenschaft besitzen, und sich doch auf keine Weise auf Functionen blofs von x, y, z, t reduciren lassen. Die Antwort hierauf ist, *dafs in Ihren Gleichungen,*

$$X = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z$$
$$Y = \beta x + \beta' y + \beta'' z,$$

die 6 Gröfsen α, β, α' etc. keine Elemente sind, und daher auch X und Y keine Functionen der Elemente und der Zeit sind. Nur die drei Coëfficienten $\gamma, \gamma', \gamma''$ sind wirkliche Elemente.

In den ähnlichen Gleichungen bei *Lagrange* sind die Coëfficienten α, β, α_1 etc. Elemente. Aber dafür finden bei ihm auch nicht die Gleichungen,

$$x\,d\alpha + y\,d\alpha_1 + z\,d\alpha_2 = 0$$
$$x\,d\beta + y\,d\beta_1 + z\,d\beta_2 = 0$$

Statt. Es scheint mir, dafs Sie *Lagrange* und Sich selbst Unrecht thun, wenn Sie ihm vorwerfen, dafs er die Gleichung,

$$\beta\,d\alpha + \beta_1\,d\alpha_1 + \beta_2\,d\alpha_2 = 0,$$

nicht hat, und nicht in weitere Entwicklungen eingegangen ist. Diese Gleichung gilt bei ihm eben so wenig, wie die beiden vorhergehenden. Das von Ihnen gewählte Coordinatensystem ist von dem seinigen auf das wesentlichste verschieden und Ihnen durchaus eigenthümlich, und darum konnte er die aus der eigenthümlichen Natur des Ihrigen fliefsenden Folgerungen nicht machen.

Ihre Xachse ist eine Linie, die in der Bahnebne keine eigene Bewegung hat, in derselben fest ist, und sich nur dadurch im Raum fortbewegt, dafs die Bahnebene um die verschiednen Radiivectoren pivotirt; während die Xachse bei *Lagrange*

die grofse Achse der veränderlichen Ellipse ist, und ihre eigne Bewegung behält, selbst wenn die Ebene der Bahn unverändert bliebe; wie dies bei dem Problem der drei Körper in der Ebene der Fall ist. Was bei Ihnen X und Y ist, würde, in den *Lagrangeschen* Coordinaten ausgedrückt, $\cos\chi . X - \sin\chi . Y$ und $\sin\chi . X + \cos\chi . Y$ sein. Der Winkel χ ist aber kein Element in der gewöhnlichen, oben angegebnen Bedeutung. Diese Gröfse läfst sich nicht mittelst der blofsen Gleichungen des ungestörten Problems durch die Coordinaten, ihre ersten Differentialquotienten und die Zeit ausdrücken; sie hat daher nicht nur nicht dieselbe Bedeutung im gestörten wie im ungestörten Problem, sondern sie hat vielmehr in der ungestörten Bewegung gar keine Bedeutung. Nur für eine ganz individuelle Zeitbestimmung könnte man den Winkel χ eine Beziehung zu den elliptischen Elementen geben, aber dann auch wieder eine ganz beliebige.

Was soll daraus werden, möchte ich fragen, wenn man Gröfsen, wie

$$\sigma = \int \cos i \, d\vartheta,$$

eine Function der Elemente nennen will? Denn man will doch wohl nicht blofs sagen, dafs man sie ja nach Integration der Störungsgleichungen so ausdrücken kann, denn dies gälte von allen Veränderlichen überhaupt, und wäre daher durchaus nichts sagend. Will man σ eine Function von ϑ allein nennen, wie kann dann $\frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta}$ eine Function von i sein? Sagt man, dafs σ eine Function von ϑ und i ist, wie kann dann $\frac{\partial \sigma}{\partial i} = 0$ sein, wie doch von Ihnen und andern angesetzt wird? Nennt man

$$U = \int (A\,da + B\,db + C\,dc + \text{etc.})$$

auch dann eine Function von a, b, c etc., wenn der Differentialausdruck nicht den Bedingungen der Integrabilität genügt, so hat man Functionen, bei welchen es nicht mehr gleichgültig ist, in welcher Ordnung man differentiirt, sondern es werden im Gegentheil (ohne dafs hier ein Unendlichwerden in's Spiel kommt) die Ausdrücke

$$\frac{\partial \frac{\partial U}{\partial a}}{\partial b} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \frac{\partial U}{\partial b}}{\partial a}$$

in gar keiner Beziehung zu einander stehen. So folgen aus den Gleichungen

$$\frac{\partial \sigma}{\partial i} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta} = \cos i,$$

die beiden Gleichungen,

$$\frac{\partial\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial i}}{\partial\vartheta} = 0, \qquad \frac{\partial\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}}{\partial i} = -\sin i.$$

Es hören hier also alle Vorstellungen auf, die man gewöhnlich mit dem Begriff einer Function und partieller Differentialquotienten verbindet.

Wenn Sie in Ihrem geehrten Schreiben sagen, man könne die Störungsfunction Ω als Function der Gröfsen X, Y, p, q betrachten, indem die Örter des Planeten durch diese vier Gröfsen vollständig bestimmt seien, so ist doch anderseits klar, dafs wenn die einer bestimmten Zeit entsprechenden numerischen Werthe von X, Y, p, q gegeben sind, man nur die Gröfse des Radiusvectors, aber nicht seine Lage im Raum kennt. Man kann daher auch nicht sagen, dafs die Gröfsen x, y, z, die den Planetenort unmittelbar bestimmen, durch die Gröfsen X, Y, p, q ersetzt werden. Man kann sich Ω als eine *Function* der Gröfsen X, Y, p, q, die in ihrer Form bestimmt wäre, was nöthig ist, wenn man sie nach diesen einzelnen Gröfsen partiell differentiiren will, gar nicht denken, wenigstens in Folge solcher Gleichungen nicht, durch welche Ω als Function dieser Gröfsen bestimmt werden soll.

Lagrange gebraucht bei einer ähnlichen uneigentlichen Ausdrucksweise doch die Vorsicht, solche Integrale, wie Ihr σ, nicht geradezu eine Function der veränderlichen willkürlichen Constanten zu nennen. Indem er zuerst S. 96 des 2ten Theils der *Mécanique Analytique*

$$d\chi = \beta\, d\alpha + \beta_1\, d\alpha_1 + \beta_2\, d\alpha_2$$

setzt, warnt er noch gewissermafsen davor, χ für eine Function der veränderlichen Elemente zu halten, indem er in Parenthese hinzufügt, „ich wende den Differentialausdruck $d\chi$ an, obgleich sein Werth kein vollständiges Differential ist"; S. 99 nennt er diesen Differentialausdruck (aber nicht χ selber) eine Function der veränderlichen Constanten; endlich nennt er auch S. 101 χ selbst ein Element, und differentiirt S. 102 Ω partiell nach χ.

Es geht aus dem Vorstehenden hervor, dafs das Zeichen $\frac{d\Omega}{d\chi}$ bei *Lagrange*, oder die Zeichen $\frac{d\Omega}{dp}$, $\frac{d\Omega}{dq}$ bei Ihnen, eine bestimmte Bedeutung haben, welche die Rechnung feststellt, ohne dafs Ω als eine Function von χ oder von p und q betrachtet werden kann. Weil demnach diese Symbole keine wirklichen Differentialquotienten sind, sondern nur conventionellen

Sinn und Bedeutung haben, so wird es gut sein, um jedes Mifsverständnifs zu vermeiden, diese Bedeutung recht deutlich hervorzuheben.

In der Form, zu der Sie schliefslich gelangen, ist Ω eine (wirkliche) Function der Gröfsen

$$X,\ Y,\ p,\ q,\ \Lambda,$$

welche dadurch erhalten wird, dafs man in Ω für x, y, z die Werthe,

$$x = X\cos\Lambda - Y\sin\Lambda - \frac{(p\cos\Lambda + q\sin\Lambda)(pX - qY)}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}$$

$$y = X\sin\Lambda + Y\cos\Lambda - \frac{(p\sin\Lambda - q\cos\Lambda)(pX - qY)}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}$$

$$z = -(pX - qY)$$

setzt. Diese Function wird nach p und q partiell differentiirt, als wäre die Gröfse Λ eine Function von p und q, was sie nicht ist, indem man übereinkommt, an die Stelle der in diesem Falle vorkommenden $\frac{\partial\Lambda}{\partial p}$ und $\frac{\partial\Lambda}{\partial q}$ die Gröfsen,

$$\frac{q}{\{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}\}\sqrt{(1-p^2-q^2)}},\quad \frac{-p}{\{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}\}\sqrt{(1-p^2-q^2)}},$$

zu setzen, wodurch $\frac{\partial\Omega}{\partial p}$ und $\frac{\partial\Omega}{\partial q}$ selber Symbole werden für die Gröfsen,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial p} + \frac{q}{\{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}\}\sqrt{(1-p^2-q^2)}}\frac{\partial\Omega}{\partial\Lambda},$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial q} - \frac{p}{\{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}\}\sqrt{(1-p^2-q^2)}}\frac{\partial\Omega}{\partial\Lambda}.$$

Man könnte zwar sagen, so ganz conventionell wäre diese Annahme für die Zeichen $\frac{\partial\Lambda}{\partial p}$ und $\frac{\partial\Lambda}{\partial q}$ nicht, weil, wenn man dieselbe Annahme in dem Differentialausdruck

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial p}dp + \frac{\partial\Lambda}{\partial q}dq$$

macht, ein Werth herauskommt, welchen $d\Lambda$ in dem zu integrirenden System Differentialgleichungen wirklich hat. Aber dies kann nur als die Veranlassung angesehn werden, die darauf geführt hat, eine solche Symbolik zu wählen, ohne dafs sie deshalb den Character einer blofs conventionellen verliert. Man könnte mit demselben Rechte Ω auch blofs als Function von X, Y und p betrachten.

*) indem dasselbe System Differentialgleichungen auch die Werthe,

$$dq = \frac{Ydp}{X}$$

$$d\Lambda = \frac{(qX-pY)dp}{X\{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}\}\{\sqrt{(1-p^2-q^2)}\}},$$

giebt, und dann würde $\frac{\partial\Omega}{\partial p}=0$ werden. Man mufs also genau diejenige Combination des gegebenen Systems Differentialgleichungen bezeichnen, aus welcher die Bedeutung der Symbole $\frac{\partial\Lambda}{\partial p}$ und $\frac{\partial\Lambda}{\partial q}$ entnommen werden soll.

Nennt man a, b, c etc. diejenigen Functionen von t, welche den veränderlichen willkürlichen Constanten gleich sind, so hat die Analysis des Störungsproblems darauf geführt, auch solche Functionen von t darin einzuführen, welche einem Integrale,

$$\int\{Ada+Bdb+Cdc+\text{etc.}\},$$

gleich sind, in welchem der Ausdruck unter dem Integralzeichen den Bedingungen der Integrabilität nicht genügt, und welche daher keine Functionen von a, b, c etc. sind. Diese Functionen von t haben mit den veränderlichen Constanten die Eigenschaft gemein, dafs sie von einer wirklichen Constante nur um eine kleine Gröfse von der Ordnung der störenden Kräfte verschieden sind; und wenn A, B, C etc. beliebige Functionen blofs von a, b, c etc. sind, welche nicht aufserdem noch t enthalten, so kann man ferner sagen, ***dafs sie von veränderlichen Constanten nur um Gröfsen von der zweiten Ordnung der störenden Kräfte verschieden sind.*** Dieser letztere Umstand mag wohl dazu beigetragen haben, dafs man diese Functionen von den veränderlichen Constanten selber nicht ausdrücklich genug unterschieden hat. Will man nun einen Namen für diese Functionen von t haben, so könnte man sie ***uneigentliche, falsche, Pseudo-Elemente,*** oder auch ***ideale*** Elemente nennen. Es frägt sich aber, ob es nicht zweckmäfsig wäre, für alle diese Functionen und für alle Functionen dieser Functionen den Namen ***Elemente*** gelten zu lassen, da ja auch schon einmal ***Lagrange*** den Winkel χ so genannt hat, dagegen sie niemals veränderliche (willkürliche) Constanten oder Functionen

*) Bis hieher ist von dem leider so früh und schnell dahingeschiedenen *Jacobi* die Correctur des Manuscripts selbst besorgt worden. Die Correctur der hier folgenden Fortsetzung hat Herr Professor *Lejeune Dirichlet* mit dem Herausgeber des mathematischen Journals gemeinschaftlich übernommen.

der veränderlichen Constanten zu nennen, und diese letzteren durch die Benennung ***elliptische Elemente*** zu unterscheiden.

Auch über die Form der Differentialgleichungen, zu welchen Sie schliefslich gelangen, scheint es nützlich, in einige Erörterungen einzugehen, um ihre besondere Natur desto deutlicher hervorzuheben. Es könnte beim ersten Anblick scheinen, als wären bei Ihnen die drei Differentialgleichungen 2ter Ordnung des Problems durch zwei Differentialgleichungen 2ter Ordnung und zwei Differentialgleichungen 1ter Ordnung ersetzt worden; was immer verstattet ist. Dem ist aber in der That nicht so. Es sind die von Ihnen aufgestellten Differentialgleichungen gar keine Differentialgleichungen zwischen den Gröfsen X, Y, p, q, denn es ist unmöglich, die rechten Seiten Ihrer Gleichungen X, Y, p, q ausgedrückt zu denken. Die von Ihnen aufgestellten Differentialgleichungen sind in der That zwei Differentialgleichungen ***zweiter*** und drei Differentialgleichungen ***erster*** Ordnung zwischen den Gröfsen

$$X,\ Y,\ p,\ q,\ \Lambda.$$

Ich will, um Ihre Formeln zu commentiren, die Gleichungen hinschreiben, wie sie in der gemeinen Bezeichnungsart aussehen würden. Ist nämlich Ω mittelst Substitution der oben für x, y, z gegebenen Werthe als Function der fünf Gröfsen X, Y, p, q, Λ ausgedrückt, so sind Ihre Differentialgleichungen. in den gewöhnlichen Zeichen geschrieben, die folgenden:

$$\frac{d^2X}{dt^2}+\frac{X}{r^3}=\frac{\partial\Omega}{\partial X}$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+\frac{Y}{r^3}=\frac{\partial\Omega}{\partial Y}$$

$$\frac{dp}{dt}=\frac{\sqrt{(1-p^2-p^2)}.dt}{XdY-YdX}\left\{\sqrt{(1-p^2-q^2)}\frac{\partial\Omega}{\partial q}-\frac{p}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}\frac{\partial\Omega}{\partial\Lambda}\right\}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}=-\frac{\sqrt{(1-p^2-q^2)}.dt}{XdY-YdX}\left\{\sqrt{(1-p^2-q^2)}\frac{\partial\Omega}{\partial p}+\frac{q}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}\frac{\partial\Omega}{\partial\Lambda}\right\}$$

$$d\Lambda=\frac{q\,dp-p\,dp}{1-p^2-q^2+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}.$$

Die vollständige Integration dieses Systems Differentialgleichungen führt *sieben* von einander unabhängige willkürliche Constanten mit sich, welche sich in den Ausdrücken von x, y, z auf *sechs* reduciren müssen. Damit man deutlich sehe, wie dieses geschieht, bemerke ich, dafs aus der Natur dieser Differentialgleichungen folgt, dafs, wenn man mit

$$X_1,\ Y_1,\ p_1,\ q_1,\ \Lambda_1$$

gewisse Functionen von t bezeichnet, welche nur *sechs* wilkürliche Constanten enthalten, und λ eine *siebente* von ihnen unabhängige willkürliche Constante bedeutet, die *vollständigen* Ausdrücke von X, Y, p, q, Λ folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} X &= \cos\lambda X_1 + \sin\lambda Y_1 \\ Y &= \cos\lambda Y_1 - \sin\lambda X_1 \\ p &= \cos\lambda\, p_1 - \sin\lambda\, q_1 \\ q &= \cos\lambda\, q_1 + \sin\lambda\, p_1 \\ \Lambda &= \Lambda_1 + \lambda. \end{aligned}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die oben durch X, Y, p, q, Λ ausgedrückten Werthe von x, y, z, so verwandeln sie sich in die nämlichen Functionen von $X_1, Y_1, p_1, q_1, \Lambda_1$, welche sie von X, Y, p, q, Λ waren, so dafs x, y, z Functionen von t und *sechs* willkürlichen Constanten werden, indem die *siebente* λ ganz herausgeht.

Es wird zwar insgemein angenommen, dafs man bei einem vorgelegten System Differentialgleichungen dahin trachten müsse, die Ordnung des Systems zu verringern; wie es z. B. gelungen ist, das Problem der *drei Körper*, welches ursprünglich von der Integration eines Systems Differentialgleichungen von der 18ten Ordnung abhängt, welche 18 willkürliche Constanten fordert, auf ein System Differentialgleichungen von der 6ten Ordnung zurückzuführen, dessen vollständige Integration nur sechs willkürliche Constanten fordert. Aber andrerseits hat man doch auch schon früher bisweilen kein Bedenken getragen, die Ordnung einer gegebenen Differentialgleichung absichtlich sogar zu erhöhen; z. B. wenn man sie dadurch lineär machen konnte. In dem vorliegenden Störungsproblem kann aber diese Erhöhung der 6ten Ordnung des Systems Differentialgleichungen auf die 7te am allerwenigsten Bedenken erregen, wenn man dadurch andere Vortheile erreicht. Denn überall wo bei dem zur angenäherten Integration eines gegebenen Systems Differentialgleichungen eingeschlagenen Verfahren, die Annäherung nach den Potenzen einer kleinen Constante geschieht, welche die Differentialgleichungen selber enthalten, führt man eigentlich *unendlich viel* von einander unabhängige willkürliche Constanten ein, indem jede neue Annäherung neue Integrationen fordert, und diese eben so viel neue willkürliche Constanten zulassen. So wird es z. B. bei der Integration der zwischen den veränderlichen Constanten und der Zeit aufgestellten Differentialgleichungen geschehen, dafs mit jeder höhern Ordnung der störenden Masse, auf welche die Annäherung ausgedehnt wird, auch *sechs* neue will-

kürliche Constanten eintreten; und alle diese willkürlichen Constanten müssen sich schliefslich, oder auch bei jedem Stadium der Annäherung, wenn man die folgenden Potenzen der störenden Masse vernachlässigt, auf *sechs* reduciren lassen. Man erhält hievon auf folgende Art eine deutliche Vorstellung. Man denke sich das Problem absolvirt, und die sechs *veränderlichen* Constanten als Functionen von t, der kleinen in den Differentialgleichungen vorkommenden störenden Masse m und der sechs willkürlichen Constanten a, b, c etc. ausgedrückt. Setzt man nun

$$a = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \text{etc.}$$
$$b = b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + \text{etc.}$$
$$\text{etc. etc.},$$

wo a_0, b_0 etc., a_1, b_1 etc. etc. ebenfalls willkürliche Constanten sein können, und entwickelt die sechs, den *veränderlichen* Constanten gleichen Functionen von t nach den Potenzen von m, so treten in diese Entwicklungen mit jeder neuen Potenz m^i auch sechs neue willkürliche Constanten a_i, b_i, c_i etc. ein: und doch sieht man, dafs sich alle diese willkürlichen Constanten in die sechs, a, b, c etc. zusammenziehen lassen.

Ihre Formeln ergeben,

$$X = r\cos(f+\chi) = a\cos(\varepsilon+\chi) - ae\cos\chi + \frac{ae^2\sin\chi\sin\varepsilon}{1+\sqrt{(1-e^2)}}$$
$$Y = r\sin(f+\chi) = a\sin(\varepsilon+\chi) - ae\sin\chi - \frac{ae^2\cos\chi\sin\varepsilon}{1+\sqrt{(1-e^2)}},$$

wo der Winkel ε durch die Zeit mittelst der Gleichung

$$\varepsilon - e\sin\varepsilon = a^{\frac{3}{2}}(t-c)$$

bestimmt wird. Bildet man die Differentiale dX und dY unter der Voraussetzung, dafs a, e, c, χ Constanten sind, so haben Sie gezeigt, dafs dieselben Ausdrücke von dX und dY noch immer die Differentiale von X und Y bleiben, wenn man für die elliptischen Elemente a, e, c ihre gestörten Werthe und für die von den elliptischen Elementen gänzlich unabhängige Constante χ eine Function der Zeit setzt, welche $= w + \int \cos i\, d\vartheta$ ist. So scheint mir am klarsten und einfachsten der schöne und wichtige Satz zusammengefafst werden zu können, mit dem Sie die analytische Mechanik bereichert haben, und welcher *Lagrange* entgangen ist, obgleich er die Gröfsen $r\cos f$ und $r\sin f$ nach den Elementen differentiirt, und die Function $\chi = w + \int \cos i\, d\vartheta$ eingeführt hat.

Was den von mir früher vorgeschlagenen Namen *ideale* Coordinaten betrifft, so bin ich wieder zweifelhaft geworden, ob überhaupt ein besonderer Name für die Coordinaten X, Y, Z schon ein Bedürfnifs geworden sei, da doch aller Wahrscheinlichkeit nach nur die von Ihnen gemachte Annahme $Z=0$ in den Anwendungen beibehalten wird, und eine so allgemeine Benennung kaum für ein so specifisches Coordinatensystem passend sein dürfte. Es würde vielleicht genügen, hervorzuheben, dafs es auch *bewegliche* Coordinatensysteme von der Beschaffenheit giebt, dafs die ersten Differentiale der auf dieselben bezogenen Coordinaten allein von der Orts-Änderung des Planeten im Raum, und nicht von der Veränderung des Coordinatensystems abhängen. Im Allgemeinen werden die ersten Differentiale der auf ein veränderliches System bezogenen Coordinaten eines Puncts aus den Differentialen, die von der Orts-Änderung des Punctes im Raume herrühren, und aus den Differentialen, die von der Änderung des Coordinatensystems herrühren, durch einfache Addition zusammengesetzt. Sollen die letztern immer verschwinden, so erleiden die Coordinaten des Puncts, wenn derselbe seinen Ort im Raum nicht ändert, durch die instantane Drehung des Systems gar keine Änderung. Die instantane Drehung des Coordinatensystems mufs also so beschaffen sein, dafs der unveränderte Ort des Punctes während derselben mit dem Coordinatensystem fest verbunden bleiben kann; oder der Radiusvector mufs die instantane Drehungsachse des Coordinatensystems sein. Ganz willkürlich bleibt dabei der instantane Drehungswinkel des Systems. Man kann sich dies etwa so vorstellen. Das Coordinatensystem dreht sich zu einer gewissen Zeit t um den Radiusvector mit einer ganz beliebigen Winkelgeschwindigkeit während des Zeit-Elements dt; nach diesem Zeit-Element geht der Radiusvector in die der Zeit $t+dt$ entsprechende Position über, worauf sich das Coordinatensystem wieder mit einer beliebigen Winkelgeschwindigkeit während der Zeit dt um den neuen Radiusvector dreht, welcher hierauf in seine dritte Lage übergeht, und so fort. Wenn der willkürliche Drehungswinkel jedesmal dem Neigungswinkel der den Zeiten t und $t+dt$ entsprechenden Bahnebnen gleich wird, so erhält man den von Ihnen behandelten Fall, oder allgemeiner, alle Coordinatensysteme, welche während der Bewegung mit demjenigen, in welchem $Z=0$, fest verbunden bleiben. Es scheint kaum, dafs irgend eine andere Bestimmung des Drehungswinkels als die von Ihnen gewählte von Interesse ist. Setzt man mit Ihnen $Z=0$, $X=r\cos v_1$, $Y=r\sin v_1$, so ist v_1 der Winkel des Radiusvectors mit der XAchse, welcher durch die Drehung der

XY Ebene um den Radiusvector keine Änderung erleidet, sondern, da die *X* Achse in der *XY* Ebene keine eigenthümliche Bewegung haben soll, nur durch die Bewegung des Radiusvectors in der *XY* Ebene eine Veränderung erfährt, woraus der von Ihnen auf analytischem Wege bewiesene Satz folgt, dafs dv_1 dem Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Radiivectores gleich ist.

Schliefslich will ich noch den Beweis des von mir zu Anfang dieses Schreibens aufgestellten Satzes hinzufügen.

Es sei u eine Function von t und den sechs elliptischen Elementen a, b, c etc., von solcher Beschaffenheit, dafs,

$$\frac{\partial u}{\partial a}da + \frac{\partial u}{\partial b}db + \frac{\partial u}{\partial c}dc + \text{etc.} = 0.$$

Wenn man die Differentialgleichungen ausschliefst, welche die besondern störenden Kräfte enthalten, so finden zwischen den Differentialen da, db etc. nur die drei folgenden linearen Gleichungen Statt:

$$\frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial b}db + \frac{\partial x}{\partial c}dc + \text{etc.} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial a}da + \frac{\partial y}{\partial b}db + \frac{\partial y}{\partial c}dc + \text{etc.} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial a}da + \frac{\partial z}{\partial b}db + \frac{\partial z}{\partial c}dc + \text{etc.} = 0,$$

und es mufs daher die vorstehende Gleichung, wenn sie erfüllt werden soll, ohne dafs man dabei auf die Besonderheit der störenden Kräfte Rücksicht nimmt, eine Folge dieser drei Gleichungen sein. Damit dies möglich sei, mufs man mittelst Einführung dreier Factoren L, M, N folgenden sechs Gleichungen Genüge leisten können:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = L\frac{\partial x}{\partial a} + M\frac{\partial y}{\partial a} + N\frac{\partial z}{\partial a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial b} = L\frac{\partial x}{\partial b} + M\frac{\partial y}{\partial b} + N\frac{\partial z}{\partial b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial c} = L\frac{\partial x}{\partial c} + M\frac{\partial y}{\partial c} + N\frac{\partial z}{\partial c}$$

etc. etc.

Man denke sich jetzt umgekehrt die Elemente a, b, c etc. durch t, x, y, z, $x' = \frac{\partial x}{\partial t}$, $y' = \frac{\partial y}{\partial t}$, $z' = \frac{\partial z}{\partial t}$ ausgedrückt, und die partiellen Differentialquotienten dieser Ausdrücke von a, b, c etc. in Bezug auf die Gröfsen x,

y, z, x', y', z' gebildet, so wird nach den Regeln der partiellen Differentiation, wenn ξ und ξ' zwei beliebige von den Gröfsen x, y, z, x', y', z' bedeuten, der Ausdruck

$$\frac{\partial \xi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \xi'}+\frac{\partial \xi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial \xi'}+\frac{\partial \xi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial \xi'}+\text{ etc.}$$

immer verschwinden, aufser wenn ξ und ξ' dieselben Gröfsen sind; in welchem Falle allein er $=1$ wird. Es folgen deshalb aus den obigen sechs Gleichungen die folgenden drei,

$$\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x'}+\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x'}+\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x'}+\text{ etc.}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y'}+\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y'}+\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial y'}+\text{ etc.}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z'}+\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial z'}+\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial z'}+\text{ etc.}=0.$$

Aber da u eine Function von t, a, b, c etc. ist, kann man dieselbe auch als Function von x, y, z, x', y', z', t betrachten, und dann werden die vorstehenden Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x'}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y'}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z'}=0,$$

oder es mufs sich u auf eine Function von x, y, z, t reduciren, w. z. b. w.

Ich will noch bemerken, dafs Sie Ihren zweiten Satz wohl zweckmäfsig dahin erweitern können, dafs Sie in die Function L auch t aufnehmen.

Ich bitte Sie, die vorstehenden Zeilen als einen Versuch anzusehen, mir die Natur der Störungsgleichungen, zu welchen sie gelangen, in ein recht klares Licht zu setzen; und es sollte mich freuen, wenn Sie finden, dafs ich ihren Sinn getroffen habe, worüber ich mir bald Ihren mündlichen Bescheid erbitten werde.

II.

Berlin, den 20ten Januar 1851.

Erlauben Sie, dafs ich meinem vorigen Schreiben noch die folgenden Bemerkungen hinzufüge.

Wenn wieder a, b etc. die veränderlichen willkürlichen Constanten bedeuten, so sind die Werthe ihrer ersten Differentialquotienten, $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$ etc. durch die drei Störungsgleichungen und die drei Bedingungsgleichungen,

$$\frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial b}db + \text{ etc.} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial a}da + \frac{\partial y}{\partial b}db + \text{ etc.} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial a}da + \frac{\partial z}{\partial b}db + \text{ etc.} = 0,$$

gegeben. Ist U eine Function der veränderlichen willkürlichen Constanten, so erhält man $\frac{dU}{\partial t}$, wenn man die Werthe von $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$ etc. respective mit $\frac{dU}{\partial a}$, $\frac{dU}{\partial b}$ etc. multiplicirt und von den erhaltenen Producten die Summe bildet. Es kommt hierbei zu Statten, dafs die Factoren $\frac{\partial U}{\partial a}$, $\frac{\partial U}{\partial b}$ etc. in der ersten Annäherung Constanten werden. Aber ganz derselbe Vortheil findet Statt, wenn auch U keine Function der veränderlichen willkürlichen Constanten ist, sondern mit ihnen nur durch eine nicht integrable Differentialgleichung.

$$dU = A\,da + B\,db + \text{ etc.},$$

verbunden ist, in welcher A, B etc. blofs Functionen von a, b etc. sind, ohne die Zeit t noch aufserdem explicite zu enthalten. Da nun solche Gröfsen U ganz auf dieselbe Weise wie die veränderlichen willkürlichen Constanten selbst erhalten werden, da sie ferner von veränderlichen willkürlichen Constanten nur um Gröfsen der *zweiten* Ordnung in Bezug auf die störenden Massen verschieden sind, und ihre Einführung, wie Sie gezeigt haben, bei den anzustellenden Entwicklungen bedeutende Abkürzungen gewährt, so wird es jedenfalls gerechtfertigt sein, solche Functionen

$$U = \int (A\,da + B\,db + \text{ etc.})$$

durch einen besondern Namen auszuzeichnen; weshalb ich in einem vorigen Schreiben vorgeschlagen habe, auf dieselben die Bezeichnung *Elemente* auszudehnen; wie schon *Lagrange* in Bezug auf den Winkel χ gethan hat. Da-

gegen werde ich die veränderlichen willkürlichen Constanten selbst, zur näheren Unterscheidung, ***gestörte oder veränderliche elliptische Elemente*** nennen. Denn jene Gröfsen U können nicht als gestörte elliptische Elemente angesehen werden, weil die Constanten, auf welche sie sich reduciren, wenn die störenden Kräfte verschwinden, von den willkürlichen Constanten der elliptischen Bewegung in keiner Art abhängen.

Wenn A, B etc. auch die Zeit t enthalten, so bleibt den Gröfsen

$$U = \int (A\,da + B\,db + \text{etc.})$$

der Character, dafs sie, wenn die störenden Kräfte verschwinden, wirkliche Constanten werden, und immer von wirklichen Constanten nur um Gröfsen von der Ordnung der störenden Kräfte verschieden sind. Es dürfte aber gleichwohl nicht zweckmäfsig sein, die Benennung ***Elemente*** auch auf diesen Fall auszudehnen, und werde ich in den folgenden Zeilen nur solche Gröfsen U ***Elemente*** nennen, in welchen A, B etc. blofs Functionen der elliptischen Elemente a, b etc. sind, ohne noch t zu enthalten, unter diesen Namen aber die veränderlichen willkürlichen Constanten oder elliptischen Elemente selbst zugleich einbegreifen.

Ich will jetzt einige Betrachtungen darüber anstellen, wie man Gröfsen finden kann, welche der von Ihnen eingeführten ***idealen Coordinate*** v_1 analog sind.

Ihre ideale Coordinate v_1 wird erhalten, wenn man von der wahren Anomalie f ein Element abzieht: das Wort ***Element*** in der eben angegebenen Bedeutung genommen; es ist nämlich in Ihrer Bezeichnung,

$$v_1 = f - w - \int \cos i\, d\vartheta.$$

Die wahre Anomalie hat daher die merkwürdige Eigenschaft, dafs derjenige Theil ihres Differentials, welcher von der Veränderlichkeit der gestörten elliptischen Elemente herrührt, das Differential eines Elements ist; das heifst, dafs in demselben die Differentiale der gestörten elliptischen Elemente blofs Functionen der elliptischen Elemente sind, ohne noch t zu enthalten. Dies hat mich veranlafst, zu untersuchen, ob es noch andere Functionen der elliptischen Elemente und der Zeit giebt, welche die Eigenschaft mit der wahren Anomalie gemein haben, dafs in dem Theil ihres Differentials, welcher von der Veränderlichkeit der elliptischen Elemente herrührt, die Coëfficienten der Differentiale der letztern nur Functionen von ihnen sind, ohne noch explicite die Zeit zu enthalten.

Es ist vielleicht zweckmäfsig, den Namen ***ideale Coordinaten*** auf alle Functionen von Elementen und der Zeit auszudehnen, in deren erstem Differential der von der Veränderlichkeit der Elemente herrührende Theil für sich besonders verschwindet. Um diese Eigenschaft noch auf andere Gröfsen als diejenigen, welche sich auf blofse Functionen von x, y, z, t reduciren, ausdehnen zu können, war es nöthig, zuvor den Begriff eines Elements auf die oben angegebene Art zu verallgemeinern, weil ich in meinem ersten Schreiben gezeigt habe, dafs keine andern Functionen der *elliptischen* Coordinaten und der Zeit existiren, welche ideale Coordinaten in der angegebenen Bedeutung sein können.

Wenn man diese Erweiterungen der Begriffe der Elemente und der idealen Coordinaten zuläfst, so kann man die oben gestellte Aufgabe so fassen:

Functionen der veränderlichen willkürlichen Constanten und der Zeit zu finden, welche sich durch blofses Abziehen eines Elements in eine ideale Coordinate verwandeln.

Der Theil von df, welcher von der Veränderlichkeit der elliptischen Elemente herrührt, erhält die Form des Differentials eines Elements,

$$d\varpi + \cos i\, d\vartheta,$$

nur dadurch, dafs man die drei oben angegebenen Bedingungsgleichungen benutzt, welche zwischen den Differentialen der elliptischen Elemente Statt finden. Es wird daher die Aufgabe in ihrer vollständigen Bestimmung so heifsen:

„Es ist eine Function von t und den sechs veränderlichen willkürlichen Constanteu a, b, c etc. von der Beschaffenheit zu suchen, dafs ihr, in Bezug auf die sechs Gröfsen a, b, c etc. genommenes Differential mittelst der drei Bedingungsgleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial b}db + \frac{\partial x}{\partial c}dc + \text{etc.} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial a}da + \frac{\partial y}{\partial b}db + \frac{\partial y}{\partial c}dc + \text{etc.} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial a}da + \frac{\partial z}{\partial b}db + \frac{\partial z}{\partial c}dc + \text{etc.} = 0,$$

in einen Differential-Ausdruck

$$A da + B db + C dc + \text{etc.}$$

verwandelt werden kann, in welchem A, B, C etc. blofs Functionen von a, b, c etc. sind, ohne t zu enthalten."

Obgleich es mir nicht gelungen ist, diese Aufgabe allgemein zu lösen, so will ich Ihnen doch in der Kürze die Betrachtungen, die ich darüber angestellt habe, mittheilen.

Es sei f die gesuchte Function, so mufs es drei solche Factoren λ, μ, ν geben, dafs die sechs Ausdrücke,

$$\frac{\partial f}{\partial a}+\lambda\frac{\partial x}{\partial a}+\mu\frac{\partial y}{\partial a}+\nu\frac{\partial z}{\partial a} = A$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}+\lambda\frac{\partial x}{\partial b}+\mu\frac{\partial y}{\partial b}+\nu\frac{\partial z}{\partial b} = B$$

$$\text{etc.} \qquad \text{etc.},$$

von t unabhängig werden. Bezeichnet man mit *Lagrange* das partiell nach t genommene Differential mit einem Accent, so folgen hieraus die sechs Gleichungen:

$$\frac{\partial f'}{\partial a}+\lambda\frac{\partial x'}{\partial a}+\mu\frac{\partial y'}{\partial a}+\nu\frac{\partial z'}{\partial a}+\lambda'\frac{\partial x}{\partial a}+\mu'\frac{\partial y}{\partial a}+\nu'\frac{\partial z}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial f'}{\partial b}+\lambda\frac{\partial x'}{\partial b}+\mu\frac{\partial y'}{\partial b}+\nu\frac{\partial z'}{\partial b}+\lambda'\frac{\partial x}{\partial b}+\mu'\frac{\partial y}{\partial b}+\nu'\frac{\partial z}{\partial b} = 0$$

$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Denkt man sich jetzt f' statt durch t, a, b, c etc. durch t, x, y, z, x', y', z' ausgedrückt, so ergeben sich hieraus die folgenden sechs Gleichungen:

$$\frac{\partial f'}{\partial x'}+\lambda = 0, \quad \frac{\partial f'}{\partial y'}+\mu = 0, \quad \frac{\partial f'}{\partial z'}+\nu = 0,$$

$$\frac{\partial f'}{\partial x}+\lambda' = 0, \quad \frac{\partial f'}{\partial y}+\mu' = 0, \quad \frac{\partial f'}{\partial z}+\nu' = 0.$$

Es mufs daher f' den folgenden drei Gleichungen genügen:

$$(A.) \qquad \frac{d\cdot\frac{\partial f'}{\partial x'}}{dt} = \frac{\partial f'}{\partial x}, \quad \frac{d\cdot\frac{\partial f'}{\partial y'}}{dt} = \frac{\partial f'}{\partial y}, \quad \frac{d\cdot\frac{\partial f'}{\partial z'}}{dt} = \frac{\partial f'}{\partial z}.$$

Wenn E eine Function der veränderlichen willkürlichen Constanten bedeutet, und mittelst der Gleichungen der ungestörten Bewegung durch x, y, z, x', y', z', t ausgedrückt wird, so hat man, wie, glaube ich, *Lagrange* gezeigt hat, die Gleichungen,

$$\frac{d\cdot\frac{\partial E}{\partial x'}}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial x}, \quad \frac{d\cdot\frac{\partial E}{\partial y'}}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial y}, \quad \frac{d\cdot\frac{\partial E}{\partial z'}}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial z},$$

welche von den vorstehenden nur durch die Zeichen der zweiten Glieder verschieden ist. Dieselbe Analysis, durch welche man diese letzteren Gleichungen

beweiset, zeigt auch, dafs man den drei Gleichungen (*A.*) die folgende Form geben kann:

$$\frac{\partial f''}{\partial x'} = 2\frac{\partial f'}{\partial x}, \quad \frac{\partial f''}{\partial y'} = 2\frac{\partial f'}{\partial y}, \quad \frac{\partial f''}{\partial z'} = 2\frac{\partial f'}{\partial z},$$

wo f'' das zweite Differential von f nach t bedeutet. Alle Differentiationen nach t werden hier im Sinne der ungestörten Bewegung genommen, so dafs man a, b etc. dabei als Constanten zu betrachten, oder für $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ die Werthe $-\frac{x}{r^3}$, $-\frac{y}{r^3}$, $-\frac{z}{r^3}$ zu substituiren hat.

Die Gleichungen (*A.*) müssen erfüllt werden, wenn man für f die wahre Anomalie annimmt. Um diese Verification zu machen, hat man zuerst f' durch x, y, z, x', y', z', t auszudrücken, was mittelst der Formel,

$$f' = \frac{\sqrt{\alpha}}{r^2},$$

geschieht, wo

$$\alpha = (yz'-zy')^2+(zx'-xz')^2+(xy'-yx')^2$$

ist. Man erhält hieraus,

$$\frac{\partial f'}{\partial x'} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}.r^2}.\frac{\partial \alpha}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial f'}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}.r^2}.\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{2x\sqrt{\alpha}}{r^4},$$

und da α einer willkürlichen Constante gleich, also $\frac{d\alpha}{dt} = 0$, $\frac{d\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x'}}{dt} = -\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ ist:

$$\frac{d\cdot\frac{\partial f'}{\partial x'}}{dt} = -\frac{r'}{\sqrt{\alpha}.r^3}\frac{\partial \alpha}{\partial x'} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}.r^2}\frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

Da dieser Ausdruck $= \frac{\partial f'}{\partial x}$ sein soll, so ist die zu beweisende Gleichung:

$$r\frac{\partial \alpha}{\partial x} + r'\frac{\partial \alpha}{\partial x'} = \frac{2\alpha}{r}x,$$

und es werden eben so die beiden andern Gleichungen (*A.*) zu

$$r\frac{\partial \alpha}{\partial y} + r'\frac{\partial \alpha}{\partial y'} = \frac{2\alpha}{r}y, \quad r\frac{\partial \alpha}{\partial z} + r'\frac{\partial \alpha}{\partial z'} = \frac{2\alpha}{r}z.$$

Man sieht leicht, dafs diese Gleichungen erfüllt werden, wenn man die Werthe,

$$\alpha = r^2(x'^2+y'^2+z'^2) - r^2r'^2$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 2x(x'^2+y'^2+z'^2) - 2x'rr'$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x'} = 2x'r^2 - 2xrr'$$

und die analogen für $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$, etc. substituirt. Es ist
chungen (*A.*) ausgedrückte Eigenschaft von f erwi
wahre Anomalie nimmt.

Man erhält sogleich auch noch einen ander
den Gleichungen (*A.*),

$$\frac{d\cdot\frac{\partial f'}{\partial x'}}{dt} = \frac{\partial f'}{\partial x}, \text{ etc.}$$

Genüge leistet, wenn man

$$f' = \tfrac{1}{2}(x'x'+y'y'+z'z')+\frac{1}{r}$$

setzt und die Differentialgleichungen des ungestörten
Man findet hieraus f selbst auf folgende Art.

Nennt man a die halbe grofse Ache, so folg

$$\tfrac{1}{2}(x'x'+y'y'+z'z')+\frac{1}{2a} =$$

$$xx''+yy''+zz'' \qquad = -$$

die folgende:

$$f' = 2(x'x'+y'y'+z'z'+xx''+yy''+$$

woraus man durch Integration

$$f = 2(xx'+yy'+zz')+\frac{3t}{2a} = 2rr$$

erhält, oder, wenn u die excentrische Anomalie bed

$$f = \frac{3t}{2a}+2\sqrt{a}.e\sin u.$$

Diese Function wird also die Eigenschaft der wahren
durch blofses Abziehen eines Elements in eine ide
wandeln. Das abzuziehende Element findet man auf

Bezeichnet man die Differentiationen nach den
lichen Constanten durch die Characteristik δ, so wird
Werth von f:

$$\delta f = -\frac{3t}{2a^2}\delta a+\frac{e\sin u}{\sqrt{a}}\delta a+2\sqrt{a}\sin u\,\delta e+2$$

Wenn τ die mittlere Anomalie für $t=0$ ist, so hat m

$$\frac{t}{a^{\frac{3}{2}}}+\tau = u-e\sin u;$$

woraus der Werth von δu mittelst der Gleichung

$$-\tfrac{3}{2}\frac{t}{a^{\frac{5}{2}}}\delta a+\delta\tau+\sin u\,\delta e = (1-e\cos u)\delta u$$

erhalten wird. Man hat demnach

$$\delta f = \surd a(1+e\cos u)\delta u-\surd a\,\delta\tau+\frac{e\sin u}{\surd a}\delta a+\surd a\sin u\,\delta e.$$

Hiezu addire man den verschwindenden Ausdruck

$$\lambda\,\delta x+\mu\,\delta y+\nu\,\delta z = -\left(\frac{\partial f'}{\partial x'}\delta x+\frac{\partial f'}{\partial y'}\delta y+\frac{\partial f'}{\partial z'}\delta z\right)$$
$$= -(x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z).$$

Setzt man mit *Lagrange*,

$$x=\alpha X+\beta Y,\qquad y=\alpha_1 X+\beta_1 Y,\qquad z=\alpha_2 X+\beta_2 Y,$$

wo

$$X = a\cos u-ae,\qquad Y=a\surd(1-e^2)\sin u,$$

so wird

$$0 = x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z = (\alpha X'+\beta Y')(\alpha\,\delta X+\beta\,\delta Y+X\delta\alpha+Y\delta\beta)$$
$$+(\alpha_1 X'+\beta_1 Y')(\alpha_1\delta X+\beta_1\delta Y+X\delta\alpha_1+Y\delta\beta_1)$$
$$+(\alpha_2 X'+\beta_2 Y')(\alpha_2\delta X+\beta_2\delta Y+X\delta\alpha_2+Y\delta\beta_2)$$
$$= X'\delta X+Y'\delta Y+(\beta\,\delta\alpha+\beta_1\delta\alpha_1+\beta_2\delta\alpha_2)(XY'-YX')$$
$$= \surd a(1+e\cos u)\delta u+\frac{e\sin u}{\surd a}\delta a-a\left(X'+\frac{e\sin u}{\surd(1-e^2)}Y'\right)\delta e$$
$$+(\beta\,\delta\alpha+\beta_1\delta\alpha_1+\beta_2\delta\alpha_2)\surd(a(1-e^2)).$$

Zieht man diesen Ausdruck von dem obigen Werthe von δf ab, und bemerkt noch, dafs

$$X'+\frac{e\sin u}{\surd(1-e^2)}Y' = -\frac{e\sin u}{\surd a}$$

ist, so erhält man für δf folgenden Ausdruck von der verlangten Form, in welchem die Coëfficienten der Differentiale der veränderlichen willkürlichen Constanten nur Functionen der veränderlichen willkürlichen Constanten sind:

$$\delta f = -\surd a\,\delta\tau-\surd(a(1-e^2))(\beta\,\delta\alpha+\beta_1\delta\alpha_1+\beta_2\delta\alpha_2).$$

Die vorstehende Analysis führt daher zu der ***neuen idealen Coordinate***, die ich mir Ihnen vorzulegen erlaube, nemlich:

$$\surd a(\tfrac{3}{2}u+\tfrac{1}{2}e\sin u)+\int\surd a\{d\tau+\surd(1-e^2)(\beta\,d\alpha+\beta_1 d\alpha_1+\beta_2 d\alpha_2)\}.$$

Multiplicirt man mit $\frac{2}{3}$ und substituirt den Werth

$$\beta\,d\alpha+\beta_1 d\alpha_1+\beta_2 d\alpha_2 = d\chi = dw+\cos i\,d\vartheta,$$

so wird die neue ideale Coordinate:

$$\sqrt{a}(u+\tfrac{1}{2}e\sin u)+\tfrac{3}{2}\int\sqrt{a}\,(d\tau+\sqrt{(1-e^2)}(dw+\cos i\,d\vartheta)).$$

Es wäre nicht ohne Interesse, mehrere solcher idealer Coordinaten aufzusuchen, und zu sehen, ob vielleicht einige derselben bei den anzustellenden Entwicklungen einen ähnlichen Nutzen, wie der von Ihnen eingeführte Winkel v_1, gewähren.

Es ist noch zu bemerken, dafs ein Ausdruck $A\,da+B\,db+$ etc., in welchem A, B etc. blofs Functionen der veränderlichen willkürlichen Constanten sind, ***nur auf eine einzige Art*** diese Form annehmen kann. Es folgt dies daraus, dafs es unmöglich ist, drei Factoren λ, μ, ν so zu bestimmen, dafs die sechs Ausdrücke,

$$\lambda\frac{\partial x}{\partial a}+\mu\frac{\partial y}{\partial a}+\nu\frac{\partial z}{\partial a},\quad \lambda\frac{\partial x}{\partial b}+\mu\frac{\partial y}{\partial b}+\nu\frac{\partial z}{\partial b},\quad \text{etc.}$$

gleichzeitig blofsen Functionen von a, b etc. gleich werden. In der That müfste man in diesem Falle die sechs Gleichungen,

$$\lambda'\frac{\partial x}{\partial a}+\mu'\frac{\partial y}{\partial a}+\nu'\frac{\partial z}{\partial a}+\lambda\frac{\partial x'}{\partial a}+\mu\frac{\partial y'}{\partial a}+\nu\frac{\partial z'}{\partial a}=0$$

$$\lambda'\frac{\partial x}{\partial b}+\mu'\frac{\partial y}{\partial b}+\nu'\frac{\partial z}{\partial b}+\lambda\frac{\partial x'}{\partial b}+\mu\frac{\partial y'}{\partial b}+\nu\frac{\partial z'}{\partial b}=0$$

etc. etc.,

haben. Soll nun nicht gleichzeitig λ, μ, ν, λ', μ', ν' verschwinden, so müfste, wenn ich mich einer von mir eingeführten Benennung bedienen darf, die ***Functionaldeterminante*** von x, y, z, x', y', z' verschwinden, und zwar ***identisch,*** weil es im ungestörten Problem keine Gleichung zwischen t, a, b etc. geben kann. Aus dem identischen Verschwinden dieser Functional-Determinante würde aber, wie anderweitig bewiesen worden ist, folgen, dafs es eine Gleichung zwischen x, y, z, x', y', z', t ohne alle willkürliche Constante gäbe, und eine solche kann, wie ich ebenfalls an einem andern Orte gezeigt habe, niemals aus den vollständigen Integralgleichungen abgeleitet werden.

Diese Eigenschaft der Ausdrücke $A\,da+B\,db+$ etc., welche sogleich aufhört, wenn A, B etc. auch noch t enthalten, scheint es desto mehr zu rechtfertigen, wenn man ihr Integral durch einen besondern Namen (Element) auszeichnet.

16.

Auszug eines Schreibens des Herrn Professor Richelot.

Königsberg, den 27ten December 1850.

So eben erhalte ich von *Luther,* welcher mich gestern nicht zu Hause gefunden hat, einige Zeilen, worin eine mir von Ihnen gemachte Mittheilung enthalten ist. Schon lange habe ich Ihnen schreiben wollen, jedoch nicht eher, bis ich Ihnen gute Nachrichten von meinen Arbeiten geben konnte. Ich hatte mir aber zuletzt, unter allen Umständen das alte Jahr nicht vorübergehn zu lassen vorgenommen, ohne Ihnen ein Lebenszeichen zu geben.

Ich knüpfe an Ihre Mittheilung an. Zu meinem letzten Vortrage über bestimmte Integrale habe ich die alten Methoden von *Cauchy* etwas gründlicher durchzugehen Veranlassung genommen, und durch eine leichte Modification derselben eine Anzahl von Sätzen entdeckt, welche ich Ihnen hier mittheile. Es werden sich dieselben aus der Quelle, die Ihnen zufolge der mir gemachten Mittheilung zu Gebot steht, wahrscheinlich ebenfalls ganz leicht ergeben.

Ich definire $(X+iY)^\alpha$, wenn $Y \geqq 0$ und α reell ist, durch die Gleichung

$$(X+iY)^\alpha = \sqrt{(X^2+Y^2)}^\alpha(\cos\alpha\theta + i\sin\alpha\theta),$$

wenn

$$X = \sqrt{(X^2+Y^2)}\cos\theta, \qquad Y = \sqrt{(X^2+Y^2)}\sin\theta$$

gesetzt wird, und $-\pi < \theta \leqq \pi$, endlich die Quadratwurzel positiv genommen wird.

Dann ist einer dieser Sätze:

„*Es sei $f(\pm x + iy)$ eine beliebige continuirliche Function, welche weder für $x=\infty$ noch $y=\infty$ unendlich wird. Es sei ferner*

$$\begin{array}{lll} a_1 \geqq 0, & 0<\alpha<1, & \alpha+\beta+\gamma>1, \\ b_1 \geqq 0, & 0<\beta<1, & \\ c_1 \geqq 0, & 0<\gamma<1, & \\ \text{etc.} & \text{etc.}, & \end{array}$$

so ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{fz\,dz}{(z-a+ia_1)^\alpha(z-b+ib_1)^\beta(z-c+ic)^\gamma\ldots} = 0."$$

Wenn p eine ganze Zahl bedeutet und die Function

$$\frac{f(\pm x+iy)}{x^p}$$

weder für $x=\infty$ noch für $y=\infty$ unendlich wird, so ist unter den sonst gleichen Bedingungen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{fx\,dx}{(x-m-ni)^p(x-a+a_1i)^\alpha(x-b+b_1i)^\beta(x-c+c_1i)^\gamma\ldots}$$
$$=2\pi i\left[\frac{F(m+ni+h)}{h^p}\right]_{h^{-1}}=\frac{2\pi i F^{(p-1)}(m+ni)}{1.2\ldots p-1},$$

wo der Kürze wegen

$$Fz=\frac{fz}{(z-a+a_1i)^\alpha(z-b+b_1i)^\beta(z-c+c_1i)^\gamma\ldots}$$

gesetzt ist, und $F^{(p-1)}(m+ni)$ den $(p-1)$ten Differentialquotienten bezeichnet.

Ich habe diese beiden Sätze jetzt wörtlich aus meinem Hefte abgeschrieben, ohne sie *heute* wieder geprüft zu haben. Da ich vorläufig nicht dazu kommen kann, jene Modificationen der *Cauchy*schen Methode gehörig auszuarbeiten, so überlasse ich Ihnen, mit dieser Mittheilung zu machen was Sie wollen.

Nun zu einer andern Arbeit, welche Ihnen, wie ich glaube, nicht mifsfallen wird. Nachdem ich meine, Ihnen schon früher mitgetheilte Behandlungsart des Problems der Rotation im Januar dieses Jahres zum erstenmal auf einem freilich sehr mühsamen Wege zu Ende geführt hatte, bin ich endlich zu einer ganz einfachen Integration der partiellen Differentialgleichung, von der nach Ihrer Theorie dieses Problem abhängt, gelangt. Ich schreibe Ihnen das Hauptresultat hin, woraus Sie sofort alles übrige beurtheilen können.

Die partielle Differentialgleichung ist, wenn $A, B, C, \theta, \varphi, \psi$ dieselbe Bedeutung wie bei *Poisson* haben:

$$0=\frac{1}{2A}\left\{\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial V}{\partial\varphi}+\frac{\partial V}{\partial\psi}\right)-\cos\varphi\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right\}^2$$
$$+\frac{1}{2B}\left\{\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left(\cos\vartheta\frac{\partial V}{\partial\varphi}+\frac{\partial V}{\partial\psi}\right)+\sin\varphi\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right\}^2+\frac{1}{2C}\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Die erste Lösung, welche ich fand, ist folgende:

$$V=t_1t+\psi_1\psi-\psi_1\operatorname{arctang}\frac{\theta_1}{\sqrt{(\varrho^2-\psi_1^2-\theta_1^2)}}$$
$$+\varrho\left\{\operatorname{arctang}\frac{\psi_1\theta_1}{\varrho\sqrt{(\varrho^2-\psi_1^2-\theta_1^2)}}+\operatorname{arctang}\frac{\varphi_1\theta_1}{\varrho\sqrt{(\varrho^2-\varphi_1^2-\theta_1^2)}}\right\}$$
$$-\left(\frac{\varrho^2}{C}+2t_1\right)\int\frac{\varphi_1^2\,d\varphi_1}{(\varrho^2-\varphi_1^2)\sqrt{\left[\left(\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)\varphi_1^2-\frac{\varrho^2}{B}+2t_1\right)\left(\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)\varphi_1^2+\frac{\varrho^2}{A}+2t_1\right)\right]}},$$

wo t_1, ψ_1 und ϱ Constanten sind, und φ_1 und θ_1 durch die Gleichungen

$$\theta_1^2+\left(\frac{\varphi_1+\psi_1\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = \varrho^2-\psi_1^2$$

$$0 = \frac{1}{2A}\left\{\left(\frac{\psi_1+\varphi_1\cos\theta}{\sin\theta}\right)\sin\varphi-\theta_1\cos\varphi\right\}^2$$

$$+\frac{1}{2B}\left\{\frac{\psi_1+\varphi_1\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi+\theta_1\sin\varphi\right\}^2+\frac{\varphi_1^2}{2C}+t_1,$$

zu bestimmen sind. Sie erkennen sofort, dafs Ihre Integralgleichung des Problems der Rotation, welche Sie durch die Methode des letzten Multiplicators gefunden haben, hiemit im Zusammenhange steht. Ich hatte mich durch die Verwicklung der Formeln nicht abschrecken lassen, durch partielle Differentiation nach t_1, ψ_1 und ϱ die drei übrigen Integrale abzuleiten, und fand, dafs die Differentiation nach ϱ Ihre Integralgleichung mit einem constanten Factor multiplicirt liefert.

Meine zweite (jetzige) Lösung ist folgende:

Wenn ich ein sphärisches Dreieck nehme, dessen Seiten durch

$$\nu,\ \lambda,\ \mu,$$

und dessen Winkel durch

$$N,\ \Lambda,\ M$$

bezeichnet sein mögen, und ich setze dann

$$N \text{ constant},\quad M=\pi-\theta,$$

$$\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)\sin^2(\varphi+\nu)\sin^2\Lambda+\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right)\cos^2(\varphi+\nu)\sin^2\Lambda = \frac{1}{C}+\frac{2t_1}{\varrho^2},$$

wo ϱ und t_1 constant sind, so ist die Lösung:

$$V = t_1t-\varrho(\psi-\lambda)\cos N-\varrho\mu+\varrho\int\cos\Lambda\, d(\varphi+\nu).$$

Hieraus leite ich Alles, was dazu gehört, fast ohne Rechnung ab; so wie ich auch diese Lösung selbst fast ohne Rechnung finde. Einige Schwierigkeit hat mir die Natur der neuen Variabeln und das sphärische Dreieck gemacht. Ich habe sie aber überwunden.

Es ist wohl möglich, dafs Ihnen diese Sachen von einem andern Standpuncte aus leicht erscheinen, aber mir haben sie einige Mühe gemacht, und ich mag sie daher auch für mehr werth halten, als sie sind. Jedenfalls freue ich mich, sie fertig gemacht zu haben, um mich jetzt in die *Rosenhainsche* herrliche Arbeit versenken zu können, aus welcher ich den Muth zur Ausarbeitung meiner Transformation schöpfen will.

17.

Auszug eines Schreibens an Herrn Prof. Heine in Bonn.

Gotha, den 10ten Januar 1851.

Sie haben in Ihrem „Beitrag zur Theorie der Anziehung und der Wärme" im 29ten Bande des mathematischen Journals, eine neue Lösung der von *Lamé* behandelten Aufgabe darauf gegründet, dafs der Ausdruck

$$\{\sin\eta+i\cos\eta\cos(\vartheta-\psi)\}^n = X_n$$

der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varepsilon_1^2}+\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varepsilon_2^2}+n(n+1)(\varrho_1^2-\varrho_2^2)X_n = 0$$

genügt, wenn

ψ eine willkürliche Constante bedeutet

und ferner

$$\varepsilon_1 = \int_b^{\varrho_1}\frac{d\varrho_1}{\sqrt{((\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2))}},$$

$$\varepsilon_2 = \int_c^{\varrho_2}\frac{d\varrho_2}{\sqrt{((b^2-\varrho_2^2)(c^2-\varrho_2^2))}}$$

ist, wo $a<b<c$ gegebne Constanten sind; endlich

$$\sin\eta = \frac{\varrho_1\varrho_2}{bc}$$

$$\cos\eta\cos\vartheta = \frac{\sqrt{((\varrho_1^2-b^2)(b^2-\varrho_2^2))}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}}$$

$$\cos\eta\sin\vartheta = \frac{\sqrt{((c^2-\varrho_1^2)(c^2-\varrho_2^2))}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}} \text{ ist.}$$

Ich habe mir hier erlaubt, die in meiner „particulären Lösung" im 36ten Bande des Journals angewandte Bezeichnung beizubehalten und für Ihre Winkel ϑ und φ respective $\frac{1}{2}\pi-\eta$ und ϑ zu schreiben. Setzt man, wie dort

$$c\varepsilon = v,\quad c\varepsilon_1 = K-v_1,\quad c\varepsilon_2 = v_2,$$

und bezieht die elliptischen Functionen auf den Modul

$$k = \frac{1}{c}(c^2-b^2),$$

so ist

$$\varrho = c\varDelta\,\mathrm{am}\,(iv)$$

$$\varrho_1 = c\varDelta\,\mathrm{am}\,v_1$$

$$\varrho_2 = c\cdot\frac{k'}{i}\,\mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,(iv_2)$$

$$= c\varDelta\,\mathrm{am}\,(K+iK'-iv_2);$$

woraus

$$\sin\eta = \frac{1}{i}\varDelta\,\mathrm{am}\,v_1\,\mathrm{tg}\,\mathrm{am}\,(iv_2)$$

$$\cos\eta\cos\vartheta = \frac{\cos\mathrm{am}\,v_1}{\cos\mathrm{am}\,(iv_2)}$$

$$\cos\eta\sin\vartheta = \frac{\sin\mathrm{am}\,v_1\,\varDelta\,\mathrm{am}\,(iv_2)}{\cos\mathrm{am}\,(iv_2)}$$

folgt. Es wird ferner die partielle Differentialgleichung zu

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial v_1^2}+\frac{\partial^2 X_n}{\partial v_2^2}+n(n+1)(\varDelta^2\,\mathrm{am}\,v_1+k'^2\,\mathrm{tg}^2\,\mathrm{am}\,v_2)X_n = 0.$$

Es wird Ihnen vielleicht nicht ganz uninteressant sein, zu sehen, wie man mit Hülfe der elliptischen Additionsformeln durch einfache Betrachtungen von dieser Differentialgleichung mit Nothwendigkeit zu dem obigen Ausdruck von X_n gelangt, wenn man die alleinige Voraussetzung macht, dafs X_n die $n$te Potenz einer von n unabhängigen Function sein soll.

Ich führe zuerst an die Stelle von v_1 und v_2 als unabhängige Variabeln die Gröfsen

$$v_1+iv_2 = w',\quad v_1-iv_2 = w''$$

ein. Es wird dann

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial v_1^2} = \frac{\partial^2 X_n}{\partial w'^2}+\frac{\partial^2 X_n}{\partial w''^2}+2\frac{\partial^2 X_n}{\partial w'\partial w''}$$

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial v_2^2} = -\frac{\partial^2 X_n}{\partial w'^2}-\frac{\partial^2 X_n}{\partial w''^2}+2\frac{\partial^2 X_n}{\partial w'\partial w''}$$

und daher die vorgelegte Differentialgleichung:

$$4\frac{\partial^2 X_n}{\partial w'\partial w''}+n(n+1)(\varDelta^2\,\mathrm{am}\,v_1+k'^2\,\mathrm{tg}^2\,\mathrm{am}\,v_2)X_n = 0.$$

Es sei jetzt

$$X_n = U^{-n},$$

so wird

$$\frac{\partial X_n}{\partial w'} = -nU^{-(n+1)}\frac{\partial U}{\partial w'},$$

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial w'\partial w''} = n(n+1)U^{-(n+2)}\frac{\partial U}{\partial w'}\frac{\partial U}{\partial w''} - nU^{-(n+1)}\frac{\partial^2 U}{\partial w'\partial w''}.$$

Wenn man den letzten Ausdruck in die Differentialgleichung substituirt, so sieht man, dafs für den besondern Fall wo

$$\frac{\partial^2 U}{\partial w'\partial w''} = 0$$

der Exponent n aus ihr gänzlich herausgeht, und dafs umgekehrt, wenn es eine Lösung $X_n = U^{-n}$ geben soll, in welcher U von n unabhängig ist, die Gleichung $\frac{\partial^2 U}{\partial w'\partial w''} = 0$ Statt finden oder U die Form

$$U = U' + U''$$

haben mufs, wo U' Function blofs von w', U'' Function blofs von w'' ist. Für diesen Fall verwandelt sich durch die Substitution

$$X_n = (U' + U'')^{-n},$$

in welcher U' Function blofs von w', U'' Function blofs von w'' ist, die partielle Differentialgleichung in die folgende:

$$4\frac{\partial U'}{\partial w'}\frac{\partial U''}{\partial w'} + (U' + U'')^2(\varDelta^2 \operatorname{am} v_1 + k'^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} v_2) = 0;$$

aus welcher n ganz herausgegangen ist.

Es ist jetzt der wichtige Umstand zu bemerken, dafs sich der Ausdruck

$$\varDelta^2 \operatorname{am} v_1 + k'^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am}(iv_2) = \frac{1}{c^2}(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)$$

auf eine einfache und rationale Art durch die elliptischen Functionen darstellen läfst, deren Argumente $w' = v_1 + iv_2$ und $w' = v_1 - iv_2$ sind. In der That hat man zufolge der in den „*Fundamentis*" gegebenen Additionsformeln (11, 32 u. 33),

$$N(1 + \varDelta \operatorname{am} w' \varDelta \operatorname{am} w'') = \varDelta^2 \operatorname{am} v_1 + \varDelta^2 \operatorname{am}(iv_2)$$

$$N\cos(\operatorname{am} w' - \operatorname{am} w'') = \cos^2 \operatorname{am}(iv_2) - \sin^2 \operatorname{am}(iv_2)\varDelta^2 \operatorname{am} v_1,$$

wo

$$N = 1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} v_1 \sin^2 \operatorname{am}(iv_2)$$

ist. Es folgt hieraus

$$N.\varDelta \operatorname{am} w' \varDelta \operatorname{am} w'' = \varDelta^2 \operatorname{am} v_1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(iv_2) \cos^2 \operatorname{am} v_1$$

$$= \varDelta^2 \operatorname{am} v_1 \cos^2 \operatorname{am}(iv_2) + k'^2 \sin^2 \operatorname{am}(iv_2)$$

$$N(1 + \cos(\operatorname{am} w' - \operatorname{am} w'')) = 2\cos^2 \operatorname{am}(iv_2),$$

und es ist daher

$$\frac{2\Delta \operatorname{am} w' \Delta \operatorname{am} w''}{1+\cos(\operatorname{am} w' - \operatorname{am} w'')} = \Delta^2 \operatorname{am} v' + k'^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am}(iv'').$$

Die zu erfüllende partielle Differentialgleichung wird daher,

$$2\frac{\partial U'}{\partial w'}\frac{\partial U''}{\partial w''} + (U'+U'')^2 \cdot \frac{\Delta \operatorname{am} w' \Delta \operatorname{am} w''}{1+\cos(\operatorname{am} w' - \operatorname{am} w'')} = 0.$$

Da U' Function von w' und U'' Function von w'' ist, so kann man auch U' als Function von $e^{i \operatorname{am} w'}$ und U'' als Function von $e^{i \operatorname{am} w''}$ betrachten. Setzt man

$$e^{i \operatorname{am} w'} = t', \qquad e^{i \operatorname{am} w''} = t'',$$

so wird

$$\frac{\partial U}{\partial w'} = i\Delta \operatorname{am} w'. t' \frac{\partial U'}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial U}{\partial w''} = i\Delta \operatorname{am} w''. t'' \frac{\partial U''}{\partial t''}$$

$$1+\cos(\operatorname{am} w' - \operatorname{am} w'') = \frac{(t'+t'')^2}{2t't''},$$

und daher

$$\frac{\partial U'}{\partial t'}\frac{\partial U''}{\partial t''} = \left(\frac{U'+U''}{t'+t''}\right)^2.$$

Es folgt hieraus

$$t'\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}}\cdot\sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}} + t''\sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}}\cdot\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}} = U'+U'',$$

und wenn man hintereinander nach t' und t'' differentiirt,

$$\frac{\partial . t'\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}}}{\partial t'}\cdot\frac{\partial\sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}}}{\partial t''} + \frac{\partial . t''\sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}}}{\partial t''}\cdot\frac{\partial\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}}}{\partial t'} = 0.$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn gleichzeitig

$$\frac{\partial . t'\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}}}{\partial t'} = \alpha\frac{\partial\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}}}{\partial t'} \quad \text{und} \quad \frac{\partial . t''\sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}}}{\partial t''} = -\alpha\frac{\partial\sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}}}{\partial t''}$$

ist, wo α eine Constante bedeutet. Die Integration giebt,

$$\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}} = \frac{\beta'}{t'-\alpha}, \qquad \sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}} = \frac{\beta''}{t''+\alpha},$$

$$U' = -\frac{\beta'\beta'}{t'-\alpha} + \gamma', \qquad U'' = -\frac{\beta''\beta''}{t''+\alpha} + \gamma'';$$

wo β', β'', γ', γ'' ebenfalls Constanten sind. Substituirt man diese Werthe

von U' und U'' in die Differentialgleichung,

$$\frac{\partial U'}{\partial t'}\frac{\partial U''}{\partial t''} = \left(\frac{U'+U''}{t'+t''}\right)^2,$$

so erhält man, wenn man die Quadratwurzel auszieht und mit

$$(t'+t'')(t'-\alpha)(t''+\alpha)$$

multiplicirt:

$$\beta'\beta''(t'+t'') = -\beta''\beta''(t'-\alpha)-\beta'\beta'(t''+\alpha)+(\gamma'+\gamma'')(t'-\alpha)(t''+\alpha).$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn

$$\gamma'+\gamma'' = 0, \quad \beta'\beta' = \beta''\beta'' = \beta'\beta''$$

ist. Setzt man $\beta'\beta' = \beta''\beta'' = \beta$, so wird

$$U = U'+U'' = \frac{\beta(t'+t'')}{(t'-\alpha)(t''+\alpha)}.$$

Es wird daher

$$X_n = U^{-n} = \beta\left\{\frac{(t'-\alpha)(t''+\alpha)}{t'+t''}\right\}^n;$$

und dies ist die allgemeinste Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung, in welcher X_n der $n$ten Potenz einer von n selbst unabhängigen Function gleich wird.

Wenn α' und α'' die Amplituden zweier Argumente sind und σ' die Amplitude ihrer *Summe* bedeutet, so hat man, wenn

$$N = 1-k^2\sin^2\alpha'\sin^2\alpha''$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} Ne^{i\sigma'} &= \cos\alpha'\cos\alpha''-\sin\alpha'\sin\alpha''\Delta\alpha'\Delta\alpha'' \\ &\quad +i(\sin\alpha'\cos\alpha''\Delta\alpha''+\sin\alpha''\cos\alpha'\Delta\alpha') \end{aligned}$$

oder

$$Ne^{i\sigma'} = (\cos\alpha''+i\sin\alpha''\Delta\alpha')(\cos\alpha'+i\sin\alpha'\Delta\alpha'').$$

Es ist ferner

$$\begin{aligned} N &= (\cos\alpha''+i\sin\alpha''\Delta\alpha')(\cos\alpha''-i\sin\alpha''\Delta\alpha') \\ &= (\cos\alpha'+i\sin\alpha'\Delta\alpha'')(\cos\alpha'-i\sin\alpha'\Delta\alpha''), \end{aligned}$$

und daher, wie ich in der oben genannten Abhandlung bemerkt habe,

$$e^{i\sigma'} = \frac{\cos\alpha'+i\sin\alpha'\Delta\alpha''}{\cos\alpha''-i\sin\alpha''\Delta\alpha'} = \frac{\cos\alpha''+i\sin\alpha''\Delta\alpha'}{\cos\alpha'-i\sin\alpha'\Delta\alpha''}.$$

Nennt man σ'' die Amplitude der *Differenz* der beiden Argumente, so erhält man aus dieser Formel durch Änderung von α'' in $-\alpha''$:

$$e^{i\sigma''} = \frac{\cos\alpha'+i\sin\alpha'\Delta\alpha''}{\cos\alpha''+i\sin\alpha''\Delta\alpha'} = \frac{\cos\alpha''-i\sin\alpha''\Delta\alpha'}{\cos\alpha'-i\sin\alpha'\Delta\alpha''}.$$

Nimmt man v_1 und iv_2 für die beiden Argumente, so wird

$$\alpha' = \operatorname{am} v_1, \quad \alpha'' = \operatorname{am}(iv_2), \quad \sigma' = \operatorname{am}(v_1+iv_2), \quad \sigma'' = \operatorname{am}(v_1-iv_2)$$

$$e^{i\sigma'} = t', \quad e^{i\sigma''} = t'';$$

ferner zufolge der zu Anfang gefundnen Formeln,

$$\sin\eta = -i\Delta\alpha'\operatorname{tg}\alpha''$$

$$\cos\eta\cos\vartheta = \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha''}$$

$$\cos\eta\sin\vartheta = \frac{\sin\alpha'\Delta\alpha''}{\cos\alpha''},$$

und daher auch

$$\operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}\alpha'\Delta\alpha''.$$

Man hat daher

$$t' = e^{i\operatorname{am}(v_1+iv_2)} = \frac{1-\sin\eta}{\cos\eta}e^{i\vartheta}$$

$$t'' = e^{i\operatorname{am}(v_1-iv_2)} = \frac{1+\sin\eta}{\cos\eta}e^{i\vartheta};$$

woraus auch

$$t'+t'' = \frac{2e^{i\vartheta}}{\cos\eta}, \quad t'-t' = -2\operatorname{tg}\eta e^{i\vartheta}, \quad t't' = e^{2i\vartheta}$$

folgt. Es wird daher

$$\frac{(t'-\alpha)(t''+\alpha)}{t'+t''} = \tfrac{1}{2}(\cos\eta e^{i\vartheta} - 2\alpha\sin\eta - \alpha^2\cos\eta e^{-i\vartheta}).$$

Setzt man

$$\alpha = ie^{i\psi},$$

so verwandelt sich diese Formel in die folgende,

$$\frac{(t'-\alpha)(t''+\alpha)}{t'+t''} = -(\alpha\sin\eta + \tfrac{1}{2}i\cos\eta e^{i(\vartheta-\psi)} + \tfrac{1}{2}i\cos\eta e^{-i(\vartheta-\psi)})$$

$$= -ie^{i\psi}(\sin\eta + \cos\eta\cos(\vartheta-\psi)).$$

Es wird daher, abgesehen von einem constanten Factor, der allgemeinste Ausdruck von X_n, welcher eine $n$te Potenz einer von n unabhängigen Function ist.

$$(\sin\eta + \cos\eta\cos(\vartheta-\psi))^n,$$

w. z. b. w.

18.

Über die Zusammensetzung der Zahlen aus ganzen positiven Cuben; nebst einer Tabelle für die kleinste Cubenanzahl, aus welcher jede Zahl bis 12000 zusammengesetzt werden kann.

In den „*Meditationes Algebraicae* von *Eduard Waring* (S. 349 der 3ten Ausgabe. Cambridge 1782.)" wird der Satz ausgesprochen, *dafs zur Zusammensetzung der Zahlen aus (ganzen positiven) Cuben deren nie mehr als 9, zur Zusammensetzung der Zahlen aus (ganzen) Biquadraten deren nie mehr als 19 erfordert werden.*

Der Satz, dafs jede ganze Zahl die Summe von 9 oder weniger ganzen positiven Cuben ist, wird durch eine im 14ten Bande des *Crelle*schen Journals mitgetheilte Tabelle bestätigt, welche für jede Zahl bis 3000 die kleinste Anzahl von ganzen positiven Cuben angiebt, aus welchen sie durch Addition zusammengesetzt werden kann. Diese Tabelle ergab zugleich den merkwürdigen Umstand, dafs die Zahlen, zu deren Zusammensetzung 9 oder 8 Cuben erfordert werden, sehr bald aufhören, und dafs die Zahlen, zu deren Zusammensetzung 7 Cuben gebraucht werden, gegen das Ende der Tabelle so spärlich vorkommen, dafs es wahrscheinlich wurde, auch sie würden über eine gewisse Gränze nicht hinausreichen, oder dafs alle Zahlen, welche diese Grenze übersteigen, aus 6 oder weniger ganzen positiven Cuben zusammengesetzt werden können. Ja selbst diejenigen Zahlen, zu deren Zusammensetzung man 6 Cuben braucht, kommen bereits gegen das Ende dieser Tabelle weniger häufig vor. Sollten auch diese Zahlen einmal gänzlich aufhören, so würde der Satz gelten, *dafs alle Zahlen, welche eine gewisse Gränze übersteigen, die Summen von 5 oder weniger ganzen positiven Cuben sind.*

Die *Anwesenheit* des durch seine bewundernswürdige Fertigkeit und Sicherheit berühmten Rechners *Dase* veranlafste mich vor einigen Jahren, denselben aufzufordern, eine ähnliche Tabelle, wie die erwähnte, in gröfserem Umfange, für alle Zahlen bis 12000, zu berechnen; wobei sich denn mehrere Fehler der früheren Tabelle ergaben. So wurde gefunden, dafs nicht blofs die eine

Zahl 23, sondern auch noch eine zweite, 239, zu ihrer Zusammensetzung 9 Cuben erfordert. Es waren ferner unter den 15 Zahlen, die nach Herrn *Dases* Rechnung aus *acht* und keiner kleinern Anzahl Cuben zusammengesetzt werden können, nemlich:

15 22 50 114 167 175 186 212
231 238 303 364 420 428 454,

die beiden Zahlen 231 und 303 nicht als solche aufgeführt, und dagegen die Zahl 239 irrthümlich darunter angegeben worden.

Die Zahlen, zu deren Zusammensetzung *sieben* Cuben erfordert werden, sind die folgenden:

7 14 21 42 47 49 61 77 85 87 103 106 111 112 113 122 140
148 159 166 174 178 185 204 211 223 229 230 237 276 292 295
300 302 311 327 329 337 340 356 363 390 393 401 412 419 427
438 446 453 465 491 510 518 553 616 634 635 644 670 671 679
735 787 806 833 850 852 894 913 950 958 976 1021 1122 1148
1174 1175 1210 1236 1239 1300 1337 1452 1453 1454 1489 1580
1634 1671 1679 1697 1912 1938 1957 1965 2039 2110 2166 2183
2299 2426 2660 3020 3172 3452 3639 3685 3964 4306 4369 4388
4703 4775 4882 4982 5279 5305 5306 5818 8042.

Die Anzahl dieser Zahlen bis 3000 beträgt 103, von welchen in der früheren Tafel 29 fehlen, während bei 4 Zahlen irrthümlich die Cubenanzahl 7 angegeben ist. Man sieht daher, dafs auch in Bezug auf das früher berechnete Intervall von 1 bis 3000 die von Herrn *Dase* berechnete Tafel als ganz neu zu betrachten ist.

In der früheren Tafel waren unter den im Vorstehenden angegebnen Zahlen die drei Zahlen 2299, 2426, 2660 ausgelassen, und deshalb in einem Intervall von über 800 Zahlen keine mehr gefunden worden, deren Zusammensetzung 7 Cuben erforderte; man hielt es daher für wahrscheinlich, dafs 2183 die letzte von diesen Zahlen sei. Aber man sieht, dafs es nach derselben noch 21 Zahlen giebt, die aus nicht weniger als 7 Cuben zusammengesetzt werden können. Nach der Zahl 5818 findet sich erst nach einem Intervall von über 2000 Zahlen eine solche Zahl (8042) wieder, und nach dieser ist, in einem Intervall von fast 4000 Zahlen, keine weiter gefunden worden, so dafs es sehr wahrscheinlich ist, *dafs alle Zahlen, welche die Zahl 8042 an Gröfse übertreffen, die Summe von 6 oder weniger Cuben sind.*

Um am leichtesten übersehen zu können, wie sich die Zahlen, zu deren Zusammensetzung 2, 3, 4 etc. Cuben erfordert werden, vertheilen, habe ich ihre Anzahl für jedes Intervall zwischen 2 aufeinander folgenden Cuben von 1 bis 22^3 in der folgenden Tabelle angegeben.

Tabelle für die Anzahl der zwischen je zwei aufeinander folgenden Cuben von 1 bis 23^3 enthaltenen Zahlen, welche in 2, 3, 4, .. 9 und in nicht weniger Cuben zerlegt werden können.

	2	3	4	5	6	7	8	9
1 .. 8	1	1	1	1	1	1	0	0
8 .. 27	2	3	3	3	2	2	2	1
27 .. 64	3	5	7	8	8	4	1	.
64 .. 125	3	7	11	14	15	9	1	.
125 .. 216	5	12	21	24	15	9	4	.
216 .. 343	6	14	24	33	31	14	3	1
343 .. 512	6	22	42	48	32	14	4	.
512 .. 729	8	26	59	70	44	9	.	.
729 .. 1000	7	32	74	92	54	11	.	.
1000 .. 1331	9	39	96	115	62	9	.	.
1331 .. 1728	10	44	112	142	78	10	.	.
1728 .. 2197	10	52	132	175	91	8	.	.
2197 .. 2744	13	61	175	204	90	3	.	.
2744 .. 3375	11	73	215	238	91	2	.	.
3375 .. 4096	14	81	231	280	110	4	.	.
4096 .. 4913	13	85	280	323	109	6	.	.
4913 .. 5832	16	98	316	371	112	5	.	.
5832 .. 6859	17	117	371	416	105	0	.	.
6859 .. 8000	15	121	417	474	113	0	.	.
8000 .. 9261	19	144	479	517	100	1	.	.
9261 .. 10648	18	152	538	562	116	6	.	.
	206	1189	3604	4110	1379	121	15	2

Nach der früher für die Argumente von 1 bis 3000 berechneten Tabelle befanden sich von den Zahlen, deren Zusammensetzung *sechs* Cuben fordert, in dem Intervalle 12^3 bis 13^3 noch 75, dagegen zwischen 13^3 und 14^3 nur noch 64, während in der That nach der obigen Tabelle davon in dem ersten Intervalle 91, in dem zweiten 90 vorhanden sind; was eine viel geringere Abnahme dieser Zahlen ergiebt. Die Anzahl dieser Zahlen in den Intervallen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Cuben von 12^3 bis 22^3 beträgt, wie

man aus der obigen Tabelle sieht,

$$91 \quad 90 \quad 91 \quad 110 \quad 109 \quad 112 \quad 105 \quad 113 \quad 100 \quad 116,$$

und fährt daher im Ganzen noch immer zu wachsen fort. Man wird aber, mit einer einzigen Ausnahme, lauter abnehmende Werthe erhalten, wenn man die vorstehenden Zahlen durch die Anzahl aller in den entsprechenden Intervallen befindlichen Zahlen dividirt; was die folgenden Brüche giebt:

$$\frac{1}{5\frac{2}{13}} \quad \frac{1}{6\frac{7}{90}} \quad \frac{1}{6\frac{85}{91}} \quad \frac{1}{6\frac{61}{110}} \quad \frac{1}{7\frac{54}{109}}$$

$$\frac{1}{8\frac{23}{112}} \quad \frac{1}{9\frac{82}{105}} \quad \frac{1}{10\frac{11}{113}} \quad \frac{1}{12\frac{61}{100}} \quad \frac{1}{12\frac{95}{116}}$$

Es ist daher wohl kein Zweifel, dafs die Zahlen, zu deren Zusammensetzung *sechs* Cuben erforderlich sind, immer seltner werden; doch mögen sie erst sehr spät gänzlich aufhören.

Aus der obigen Tabelle ersieht man auch, dafs die Anzahl der Zahlen, zu deren Zusammensetzung *drei* Cuben hinreichen, für das Intervall von 1 bis 6000 beständig gröfser ist, als die Anzahl der Zahlen, zu deren Zusammensetzung *sechs* Cuben erforderlich sind, während in der zweiten Hälfte der Tafel beständig das Gegentheil Statt findet.

Die Anzahl der Zahlen, zu deren Zusammensetzung *fünf* Cuben erforderlich sind, übertrifft beständig die Anzahl der Zahlen, zu deren Zusammensetzung nur *vier* Cuben erfordert werden. Aber der Überschufs der einen Anzahl über die andere nimmt gegen das Ende der Tafel ab. Es fragt sich, ob in der Folge die zweite Anzahl der erstern sich immer mehr nähern, oder vielleicht dieselbe von einer gewissen Gränze an sogar übertreffen wird.

Man hat der Haupttafel eine aus derselben leicht zu entnehmende Tabelle der Zahlen bis 12000 hinzugefügt, welche die Summen von *zwei* oder *drei* Cuben sind. Da alle Cuben, durch 9 dividirt, nur die Reste 0 und ± 1 lassen, so folgt, dafs die Summen von *zwei* Cuben, durch 9 dividirt, nur die Reste 0, ± 1, ± 2, und die Summen von *drei* Cuben, durch 9 dividirt, nur die Reste 0, ± 1, ± 2, ± 3 lassen können. Erst die Summe von *vier* Cuben können, durch 9 dividirt, *alle* Reste lassen. Das Gleiche gilt, wenn einer oder mehrere der Cuben negativ genommen werden.

Construction der Tafel, welche für jede Zahl die kleinste Anzahl der ganzen positiven Cuben angiebt, aus welchen dieselbe durch Addition zusammengesetzt werden kann.

Es wird nicht überflüssig sein, über die leichteste Construction der Tafel einige Bemerkungen hinzuzufügen, da sie auch bei der Construction anderer Tafeln von Nutzen sein können, und sich oft erst, nachdem ihre Berechnung ganz oder zum Theil vollendet ist, diejenigen einfachen Betrachtungen darbieten, durch welche, wenn sie von Anfang an gemacht worden wären, eine wesentliche Erleichterung oder Abkürzung der Arbeit hätte erzielt werden können.

Die Zahlen, zu deren Zusammensetzung m Cuben erfordert werden, werde ich mit (m) bezeichnen. Die aufeinander folgenden Zahlen, welche in die kleinste Cubenzahl zu zerlegen sind, sollen die *Argumente* der Tafel bilden und ihre *Felder* diese kleinste Cubenanzahl enthalten. Es werden demnach die Zahlen (1), (2), (3) etc. die Argumente sein, deren zugehörige Felder respective die Zahlen 1, 2, 3 etc. enthalten.

Sind bereits die Zahlen 1, 2, .. m in ihre Felder eingetragen und daher die Zahlen (1), (2), .. (m) bekannt, *so hat man* $m+1$ *bei allen Argumenten* $(m)+x^3$ *einzutragen, bei denen noch leere Felder angetroffen werden.* Denn alle Zahlen $(m)+x^3$ sind die Summen von $m+1$ Cuben, weil die Zahlen (m) die Summen von m Cuben sind, und sie können nicht die Summen von weniger Cuben sein, wenn bei ihnen ein leeres Feld angetroffen wird, weil alle Felder, in welche kleinere Zahlen als $m+1$ einzutragen sind, der gemachten Voraussetzung gemäfs, bereits ausgefüllt sein sollen. Man kann nach dieser Regel nach und nach alle Felder der Tafel ausfüllen, indem man damit anfängt, die Zahl 1 in alle Felder einzutragen, deren Argumente die Cubikzahlen selber sind. Es versteht sich, dafs die Additionen immer nur so weit fortgesetzt werden, als die Summe nicht die der Tafel vorgesteckte Gränze (hier 12000) überschreitet.

Es soll bei diesen Additionen der Cuben zu den Argumenten (m) ein für allemal festgesetzt werden, dafs mit den kleineren Cuben begonnen und derselbe Cubus zuvor zu allen Argumenten (m) addirt werde, ehe man dazu übergeht, den nächst gröfseren Cubus zu denselben Argumenten zu addiren. Ist M eine der Zahlen (m), und findet man bei dem Argumente $M+x^3$, welches ich mit M' bezeichnen will, ein noch leeres Feld, so ist dies nicht nur, wie im Vorhergehenden gezeigt worden, ein Zeichen, dafs M' eine der Zahlen

$(m+1)$ ist, sondern *es ist auch, unter den gemachten Voraussetzungen, der Cubus x^3 der kleinste von allen, welche bei irgend einer der verschiedenen möglichen Zerfällungen von M' in $m+1$ Cuben vorkommen können.* Denn könnte irgend ein kleinerer Cubus bei einer dieser Zerfällungen vorkommen, so müfste das dem Argumente M' zugehörige Feld bereits bei den Additionen dieses kleineren Cubus zu den Argumenten (m) ausgefüllt worden sein.

Es folgt hieraus, *dafs x^3 auch nicht kleiner als irgend ein bei einer Zerfällung von M in m Cuben vorkommender Cubus sein kann;* denn jede solche Zerfällung giebt durch Hinzufügung von x^3 eine der Zerfällungen von M' in $m+1$ Cuben. Da hiernach immer, wenn man bei dem Argumente $M' = M + x^3$ ein noch leeres Feld finden soll, $M \geqq mx^3$ sein mufs, *so wird es umgekehrt hinreichen, bei der Addition von x^3 zu den Argumenten (m) von solchen Argumenten anzufangen, welche $\geqq mx^3$ sind.* Wenn man nämlich x^3 zu irgend einem Argumente M, welches $< mx^3$ ist, addirt, so kann man, dem Vorhergehenden zufolge, mit Bestimmtheit voraus wissen, dafs das zu dem Argumente $M + x^3$ gehörige Feld bereits mit $m+1$ oder einer kleineren Zahl besetzt ist.

Man kann eine noch gröfsere Abkürzung der Arbeit erlangen, *wenn man jedesmal, so oft bei einem durch die Addition von x^3 erhaltenen Argumente ein leeres Feld angetroffen wird, in dasselbe, aufser der Cubenanzahl, auch die Wurzel x einträgt.* Es sei nach dieser Regel bei einem Argumente M die Wurzel a eingetragen, so ist, wenn bei dem Argumente $M + x^3$ ein noch leeres Feld angetroffen wird, dem Vorhergehenden zufolge, immer

$$a \geqq x.$$

Es folgt hieraus, *dafs wenn man zu den Argumenten (m), um daraus die Argumente $(m+1)$ abzuleiten, einen Cubus x^3 zu addiren hat, diese Addition immer erspart werden kann, wenn die bei dem Argumente (m) neben der Cubenanzahl befindliche Zahl kleiner als x ist.* Sollte man nämlich x^3 zu einem solchen Argumente addiren, so würde man ein Argument erhalten, bei welchem ein schon ausgefülltes Feld ist, und also eine unnütze Operation gemacht haben.

Wenn nach vollendeter Eintragung der Zahlen $1, 2, \ldots m$ nur noch wenig Felder leer bleiben, so wird man besser thun, von den Argumenten, bei welchen die Felder noch leer sind, die Cuben *abzuziehen,* wobei man wieder erst nach Ausführung aller Subtractionen desselben Cubus zu dem nächst gröfseren übergeht. *Bedeutet N ein Argument, bei welchem das*

Feld noch leer ist, so wird man die Subtractionen des Cubus x^3 von solchen Argumenten N anfangen, welche $\geqq (m+1)x^3$ sind; und wenn sich bei dem Argumente $N-x^3$ die Cubenanzahl m eingetragen findet, wird man bei N die Cubenanzahl $m+1$ eintragen. Es wird dies umgekehrte Verfahren mit Vortheil angewandt, um die Argumente (7), (8), (9) nach einander aus den Argumenten (6), (7), (8) abzuleiten. Um die Argumente (6) aus den Argumenten (5) zu erhalten, würde man beide Methoden, der Additionen und Subtractionen, etwa mit gleichem Vortheil anwenden.

Man kann aber auch, indem man das für die Construction der Tafel angegebene Verfahren in allem Übrigen unverändert läfst, die Additionen oder Subtractionen, welche nöthig sind, um für ein gegebnes x je zwei Argumente M und $M+x^3$ aus einander zu finden, ganz, oder zum bei weitem gröfsten Theil durch ein rein mechanisches Verfahren ersetzen. Man theile nämlich die Tafel in mehrere Theile, und construire jeden dieser Theile der Tafel auf einem besondern Streifen: so kann für ein gegebnes x die Bestimmung je zweier Argumente M und $M+x^3$ aus einander, ohne eine Addition oder Subtraction, durch blofses Nebeneinanderlegen der Streifen geschehen.

Für unsern Fall wird jeder dieser Streifen ohne Unbequemlichkeit 1000 Felder umfassen können, wenn man die Argumente so ordnet, dafs in *zwei* Verticalcolumnen am Rande die *Einer* von 1 bis 50 und 51 bis 100, und in einer obern Horizontalreihe die 10 *Hunderte* gefunden werden; wie dies in der unten mitgetheilten Tafel der Fall ist. Man bezeichne die Streifen, welche die Argumente von 1 bis 1000, von 1001 bis 2000, von 2001 bis 3000 etc. umfassen, respective mit S_1, S_2, S_3 etc., und nenne A_i die auf dem Streifen S_i enthaltenen Argumente. Wenn ein gegebner Cubus x^3 zwischen $\alpha.1000$ und $(\alpha+1).1000$ enthalten ist, so werden die sämmtlichen Argumente A_i-x^3 auf den beiden Streifen $S_{i-\alpha}$ und $S_{i-\alpha-1}$ zu finden sein. Um daher für ein gegebnes x die Argumente A_i und A_i-x^3 aus einander ohne Rechnung zu finden, wird man nur nöthig haben, neben die beiden Streifen $S_{i-\alpha}$ und $S_{i-\alpha-1}$, welche man sich hiebei fest mit einander verbunden denken mag, den Streifen S_i so zu legen, dafs die zu je zwei Argumenten A_i und A_i-x^3 gehörigen Felder in dieselbe Horizontallinie zu liegen kommen. Um dies für alle 1000 Argumente A_i zu bewirken, braucht man, wie leicht zu sehen, S_i neben $S_{i-\alpha-1}$ und $S_{i-\alpha}$ nur in *zwei* verschiedne Lagen zu bringen. Die eine Lage bringt die erste Horizontalreihe von S_i, die mit dem Argument $(i-1).1000+1$ beginnt, in die Linie, in welcher in $S_{i-\alpha-1}$ das Argument

$(i-1).1000+1-x^3$ angetroffen wird; in der andern Lage kommt die letzte Horizontalreihe von S_i, die mit dem Argument $i.1000$ schliefst, in dieselbe Linie, in welcher sich in $S_{i-\alpha}$ das Argument $i.1000-x^3$ findet.

Wenn $x=10$, oder $x=20$ ist, braucht man S_i nur seiner ganzen Länge nach neben den einen Streifen S_{i-1} oder S_{i-8} zu legen. Wenn $x<10$ ist, wird $S_{i-\alpha}$ der Streifen S_i selber. Man mufs in diesem Falle S_i neben dem einen Streifen S_{i-1} in seine beiden Lagen bringen und aufserdem die auf demselben Streifen befindlichen, den Argumentenpaaren (m) und $(m)+x^3$ angehörigen Felder aufsuchen. Um diese Argumentenpaare, wenn sie auf demselben Streifen sind, aus einander zu finden, bedarf es zwar wieder der Addition oder Subtraction, doch geht in eben diesem Falle die Vergleichung der Felder, wegen der Beschränkung auf einen kleinen Raum, leicht und bequem von Statten; auch kann man ihr dadurch eine gröfsere Sicherheit geben, dafs man in den Argumenten (m) und $(m)+x^3$ mit denselben Differenzen fortschreitet und von Zeit zu Zeit durch Addition von x^3 eine Prüfung vornimmt.

Wenn die Streifen gehörig neben einander liegen, so werden für jede ihrer beiden Lagen die zweien Argumenten A_i und A_i-x^3 zugehörigen Felder in derselben Horizontallinie, aber in der Regel jedes auf seinem Streifen, in verschiedenen *Verticallinien* liegen. Diese Verticallinien behalten jedoch für jede der beiden Lagen immer denselben Abstand, so dafs ein rascher Überblick genügen wird, alle Felder zu ermitteln, welche zweien Argumenten A_i-x^3 und A_i zugehören, von denen gleichzeitig das erstere die Cubenanzahl m enthält und das letztere leer ist, in welches dann die Cubenanzahl $m+1$ eingetragen wird. Man wird hiebei entweder zuerst die mit m ausgefüllten Felder in $S_{i-\alpha}$ und $S_{i-\alpha-1}$ ins Auge fassen und zu ihnen die entsprechenden leeren in S_i suchen, oder umgekehrt, zu den leeren Feldern in S_i die entsprechenden, mit m ausgefüllten Felder in $S_{i-\alpha}$ und $S_{i-\alpha-1}$ suchen, je nachdem die Anzahl der mit m ausgefüllten Felder in $S_{i-\alpha}$ und $S_{i-\alpha-1}$, oder die Anzahl der leeren Felder in S_i geringer ist; was der Wahl entspricht, die man zwischen den beiden Operationen des Addirens und Subtrahirens treffen kann.

Es wird wieder hinreichen, von denjenigen Argumenten A_i-x^3, welche $\geqq mx^3$, oder den Argumenten A_i, welche $\geqq(m+1)x^3$ sind, anzufangen. Trägt man in jedes Feld neben die kleinste Cubenanzahl auch die Wurzel des kleinsten Cubus ein, der in den verschiednen Zerfällungen des Arguments in diese kleinste Cubenanzahl vorkommt, welches immer der nämliche Cubus ist, auf welchen sich die Operation bezieht, durch welche die Cubenanzahl selbst

gefunden worden ist, so kann man auf den Streifen S_{i-a-1} und S_{i-a} alle Felder übergehen, in denen neben die Cubenanzahl m eine kleinere Zahl als x eingetragen ist.

Anwendung der Tafel auf die Aufgabe, die sämmtlichen Zerlegungen einer gegebnen Zahl in die kleinste Anzahl ganzer positiver Cuben zu finden.

Obgleich die unten gegebne Tafel nur die kleinste Cubenanzahl anzeigt, in welche eine gegebne Zahl zerlegt werden kann, so kann sie doch auch mit Vortheil dazu angewandt werden, diese Zerfällungen selbst aufzufinden.

Will man, *ohne irgend ein Hülfsmittel zu besitzen,* die sämmtlichen Zerfällungen einer Zahl in irgend eine gegebne Anzahl von Cuben aufsuchen, so kann man dies in der Regel sehr mühsame Geschäft folgendermafsen auf eine passende Art anordnen, die auch bei allen ähnlichen Aufgaben angewandt werden kann.

Es sei N die gegebne Zahl, n die Anzahl der Cuben, in welche sie zerfällt werden soll. Man bilde n Verticalcolumnen mit den Überschriften

$$n,\ n-1,\ n-2,\ ..\ 1,$$

in deren erste die gegebne Zahl N selbst zu setzen ist. Von den in diese Columnen zu schreibenden Zahlen wird man nach und nach die verschiednen Cuben abziehen, jeden n Mal wiederholt, indem man von den kleinsten anfängt, und erst dann, wenn alle mit denselben auszuführenden Subtractionen beendigt sind, zu den nächst gröfseren übergeht. Die Wurzel des abgezognen Cubus wird jedesmal am Rande bemerkt, und der erhaltne Rest jeder in einer der Columnen befindlichen Zahl in die nächst folgende Columne gerückt, mit Ausnahme der in der letzten Columne 1 befindlichen Zahlen, von denen nichts mehr abgezogen wird. Jeder *von den früheren verschiedne* Cubus wird von *sämmtlichen,* aufser den in der letzten Columne befindlichen Zahlen abgezogen. Wenn man dagegen *denselben* Cubus wiederholt abzieht, so thut man dies nur von denjenigen Zahlen, *welche zuletzt durch das Abziehen des nämlichen Cubus erhalten worden sind.* Wenn x^3 der abzuziehende Cubus ist, so kann man respective in jeder, mit i überschriebnen Columne, alle Zahlen verwerfen, welche $< ix^3$ sind, so dafs in Bezug auf diese Zahlen nicht weiter operirt wird. Hat man durch fortgesetztes Abziehen gleicher oder gröfserer Cuben und durch gleichzeitiges Fortrücken in die nächstfolgende Columne alles in die letzte Columne gebracht, so dafs die Operation nicht weiter fortgesetzt werden kann, so hat man so viel *von einander verschiedne* Zerfällungen, als sich in der letzten Columne Cubikzahlen vorfinden,

und man erhält aus diesen Cubikzahlen leicht rückwärts durch successives Addiren der Cuben der respective am Rande angemerkten Zahlen die Zerfällungen selber. Man addirt nämlich zu einer in der letzten Columne befindlichen Cubikzahl den Cubus, durch dessen Abziehen dieselbe erhalten und dessen Wurzel neben ihr am Rande bemerkt worden ist; zu der Summe addirt man wieder denjenigen Cubus, dessen Wurzel neben ihr am Rande bemerkt ist, u. s. f. Befindet sich am Ende der Operation in der letzten Columne gar keine Cubikzahl, so ist es nicht möglich, die Zahl in die verlangte Cubenanzahl zu zerlegen.

Will man die *kleinste* Cubenanzahl, in welche eine gegebne Zahl zerlegt werden kann, und auch die sämmtlichen Zerfällungen in diese kleinste Cubenanzahl finden, so hat man aufzumerken, wann zuerst bei den angestellten Subtractionen eine Cubikzahl sich ergiebt, und die Columne, in der sich dieselbe befindet, als die letzte anzusehen, bis sich ein Cubus in einer früheren Columne zeigt, welche man dann wieder so lange als die letzte ansieht, bis sich etwa ein Cubus in einer noch früheren Colume zeigt, u. s. f. In jeder $i$ten Columne, von der jedesmal als letzten betrachteten, kann man vor dem Abziehen eines Cubus x^3 alle Zahlen verwerfen, welche $< ix^3$ sind. Ist auf diese Art und durch fortgesetztes Rücken der Zahlen in die folgende Columne alles in *eine* Columne gebracht, so wird diese schliefslich als die letzte anzusehen sein, und es werden in keiner früheren Cubikzahlen gefunden werden können. Die Anzahl der Columnen bis zu dieser letzten ist die kleinste Cubenanzahl, in welche man die gegebne Zahl zerfällen kann, und jede Cubikzahl, welche man in dieser letzten Columne antrifft, giebt eine besondere Zerfällung in diese kleinste Cubenanzahl, welche man wiederum durch die umgekehrte Operation des successiven Addirens der Cuben der respective am Rande bemerkten Zahlen erhält.

Hat man eine Tafel, wie die unten mitgetheilte, welche für jede Zahl die kleinste Cubenanzahl, aus der sie zusammengesetzt werden kann, anzeigt, so kann man die im Vorigen angegebnen Operationen abkürzen. Wenn man nämlich bei der gegebnen Zahl N in der Tafel die Cubenanzahl n findet, so weifs man zuvörderst, dafs die $n$te Columne die mit 1 zu bezeichnende letzte ist. *Man kann ferner nach jeder Subtraction, aus jeder mit i bezeichneten Columne alle Zahlen fortlassen, welche nicht die Summe von i Cuben sein können, oder bei welchen nicht in der Tafel die Cubenanzahl i eingetragen ist.*

Vor dem Beginnen der Operationen wird man gut thun, für jeden Cubus x^3, der $< N$, zu untersuchen, ob in der Tafel bei $N - x^3$, $N - 2x^3$, etc.

respective die Cubenanzahl $n-1$, $n-2$, etc. steht, bis man auf einen Rest $N-kx^3$ kommt, bei welchem sich in der Tafel eine gröfsere Cubenanzahl als $n-k$ eingetragen findet. Man weifs dann im Voraus, dafs die Subtraction dieses Cubus x^3 nur $k-1$ Mal zu wiederholen ist. Wenn schon bei $N-x^3$ sich die Cubenanzahl $n-1$ nicht eingetragen findet, so ist dies ein Zeichen, dafs der Cubus x^3 überhaupt unter den abzuziehenden Cuben fortgelassen werden kann. Es sei $k-1=r_x$, so dafs x^3 nur r_x Mal hintereinander abzuziehen ist, so erhält man die Reihenfolge der nach und nach abzuziehenden Cuben, wenn man r_1 Mal hintereinander 1, r_2 Mal den Cubus von 2, r_3 Mal den Cubus von 3 u. s. f. schreibt. Hat man einen Cubus dieser Reihe abzuziehen, und addirt zu diesem die $i-1$ folgenden Cuben derselben Reihe, so wird die Summe dieser i Cuben der kleinste Werth, den man von den in der Columne i enthaltnen Zahlen im Verlauf aller noch übrigen Operationen abzuziehen hat, und man kann daher vor der anzustellenden Subtraction und bei allen ferneren Operationen aus der Columne alle Zahlen, die kleiner als diese Summe sind, fortlassen. Alle übrigen Vorschriften bleiben ganz dieselben, wie die oben gegebnen.

Das im Vorigen angegebne Verfahren, um alle Zerfällungen einer Zahl in die kleinste Cubenanzahl zu finden, mit Benutzung derjenigen Erleichterungen und Abkürzungen der Rechnung, welche die Tafel gestattet, will ich durch das Beispiel der Zahl

5818

erläutern, zu deren Zusammensetzung man, zufolge der Tafel, 7 Cuben nöthig hat. In dem hier unten folgenden Schema, in welchem die 7 Columnen mit

VII, VI, V, IV, III, II, I

bezeichnet sind, ist die ganze Rechnung enthalten, welche zur Auffindung der sämmtlichen Zerfällungen dieser Zahl in 7 Cuben erfordert wird. Nach der oben gegebnen Vorschrift erhält man die folgende Reihe der nach und nach abzuziehenden Cuben

$$1,\ 1,\ 1,\ 2^3,\ 2^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 3^3,\ 3^3,\ 4^3,\ 4^3,\ 4^3,\ 5^3,\ 5^3,\ 5^3,$$
$$6^3,\ 7^3,\ 7^3,\ 9^3,\ 10^3,\ 11^3,\ 12^3,\ 13^3,\ 13^3,\ 14^3,\ 14^3,\ 15^3,\ 16^3,\ 17^3.$$

Wenn man von den Cuben,

$$9^3,\ 10^3,\ 11^3,\ 12^3,\ 13^3,\ 13^3,\ 14^3,$$

die 5 oder 6 ersten oder alle 7 summirt, so werden die Summen,

6985, 9182, 11962,

und daher gröfser als die respective in den Columnen V, VI, VII enthaltnen Zahlen, weshalb man der oben gegebnen Regel zufolge bei der Subtraction

des Cubus 9^3 und bei allen folgenden Operationen diese drei Columnen nicht weiter zu berücksichtigen hat. Da ferner

$$10^3+11^3+12^3+13^3 = 6256$$

gröfser als alle in IV enthaltnen Zahlen ist, so braucht man beim Abziehen des Cubus 10^3 und den folgenden Operationen die Columne IV nicht mehr zu berücksichtigen. Da

$$11^3+12^3+13^3 = 5256$$

ist, so braucht man 11^3 nur von denjenigen Zahlen der Columne III abzuziehen, welche $\geqq 5256$ sind, und man wird bei allen folgenden Operationen die Columne III gar nicht mehr zu berücksichtigen brauchen, da

$$12^3+13^3+13^3 = 6122$$

gröfser als alle in III enthaltne Zahlen ist. Man sieht aus dem unten folgenden Schema, dafs wenn man bei dem Abziehen des Cubus 10^3 angelangt ist, die Operation von da an reifsend schnell zu Ende geht.

Die 13 Cubikzahlen, die man in I antrifft, geben die 13 verschiednen Zerlegungen von 5818 in 7 Cuben, die überhaupt möglich sind; und zwar auf folgende Art. Man findet zuerst in I zwei Mal den Cubus $4913 = 17^3$, und man ersieht aus den am Rande beigefügten Zahlen, dafs die Operation, durch welche man schliefslich zu demselben gelangt ist, beide Mal in dem *zweimaligen* Abziehen von 7^3 besteht. Man wird daher die Summe $4913+686 = 5599$ bilden, welche Zahl sich in III an zwei verschiednen Orten findet. Die in III befindliche Zahl 5599 ist, wie man aus den Zahlen am Rande ersieht, zuletzt durch *dreimaliges* Abziehen von 4^3 erhalten worden. Man wird daher die Summe $5599+192 = 5791$ bilden, welche Zahl in VI befindlich und durch *einmaliges* Abziehen von 3^3 erhalten worden ist. Die Summe, die nun zu bilden ist, $5791+27$, ist die vorgelegte Zahl 5818 selbst, von der man auf diese Weise eine Zerfällung in 7 Cuben,

$$17^3+2.7^3+3.4^3+3^3 = 5818$$

erhält. Die aufserdem noch ein Mal in III enthaltne Zahl 5599 ist zuletzt durch *einmaliges* Abziehen von 6^3, die Zahl $5599+216 = 5815$ in IV durch *dreimaliges* Abziehen von 1 erhalten worden. Man hat daher eine zweite Zerfällung,

$$17^3+2.7^3+6^3+3.1^3 = 5818.$$

Auf ähnliche Art erhält man aus den übrigen in I enthaltnen Cubikzahlen, indem man den zu ihnen führenden Weg, welcher durch die am Rande befindlichen Zahlen bezeichnet ist, zurückgeht, die andern unten angegebnen Zerfällungen.

Rechnungsschema für die Aufsuchung der sämmtlichen Zerfällungen der Zahl 5818 in 7 Cuben.

	VII	VI	V	IV	III	II	I
0	5818						
1		5817					
1			5816				
1				5815			
2		5810	5809				
2			5802				
2				5794			
3		5791	5790	5789	5788		
			5783	5782	5767		
				5775			
3			5764				
3				5737			
4		5754	5753	5752	5725		
			5746	5738			
			5727	5726			
				5700			
4			5690	5663	5636		
4					5599	5572	
5		5693	5685	5677	5669	5642	
			5666	5658	5650		
			5629	5621	5613		
5			5568	5560	5552	5488	
				5541	5496		
				5504			
5				5443	5435	5427	
6		5602	5601	5600	5599	5572	
			5575	5574	5573		
			5538	5511			
7		5475	5474	5473	5472	5256	
			5467	5466	5446	5256	
			5448	5447	5439		
			5411	5440	5394		
			5259	5421	5320		
				5384	5257		
				5347	5168		
				5258			
				5232			
				5195			
7			5132	5131	5130	5129	4913
				5124	5123	5103	4913
				5105	5104	5096	
				5068	5097	4977	
				4916	5041	4914	
					5004	4825	
					4915		
					4889		
					4852		
	11962	9182	6985				

	III	II	I
9	5065	5038	4913
	5046	4940	4096
	4948	4921	
	4929	4706	
	4831	4439	
	4714		
	4782		
	4744		
	4737		
	4718		
	4655		
	4503		
	4466		
	4402		
	4395		
	4376		
	4339		
	4187		
6256			
10		4472	4096
		4439	
		4394	
		4123	
		4104	
		4097	
		3744	
		3718	
		3402	
		3376	
	5256		
11		4394	4096
		4221	3375
		4104	
	6122		
12			3375
			2744
		4394	
13			3375
			2197
			2197
		5488	2744
14			2744

5818

$=4913+686+216+3$

$=4913+686+192+27$

$=4913+729+125+27+24$

$=4096+729+686+216+64+27$

$=4096+1000+686+27+8+1$

$=4096+1331+375+16$

$=3375+1331+729+375+8$

$=3375+1728+686+27+2$

$=2744+1728+1000+343+3$

$=3375+2197+192+54$

$=4394+1331+64+27+2$

$=4394+1000+343+81$

$=5488+250+64+16$

oder

$= 17^3+2.7^3+6^3+3.1^3$

$= 17^3+2.7^3+3.4^3+3^3$

$= 17^3+9^3+5^3+3^3+3.2^3$

$= 16^3+9^3+2.7^3+6^3+4^3+3^3$

$= 16^3+10^3+2.7^3+3^3+2^3+1^3$

$= 16^3+11^3+3.5^3+2.2^3$

$= 15^3+11^3+9^3+3.5^3+2^3$

$= 15^3+12^3+2.7^3+3^3+2.1^3$

$= 14^3+12^3+10^3+7^3+3.1^3$

$= 15^3+13^3+3.4^3+2.3^3$

$=2.13^3+11^3+4^3+3^3+2.1^3$

$=2.13^3+10^3+7^3+3.3^3$

$=2.14^3+2.5^3+4^3+2.2^3$

Kennt man auf irgend eine Art die sämmtlichen Zerlegungen einer Zahl N in ihre kleinste Cubenanzahl n, so hat man damit zugleich auch die sämmtlichen Zerlegungen mehrerer anderer Zahlen in ihre kleinste Cubenanzahl. Sind nämlich die Cuben der gleichen oder verschiedenen Zahlen a_1, a_2, .. a_i in p verschiedenen Zerlegungen von N enthalten, so werden durch das Fortlassen dieser i Cuben aus diesen p Zerlegungen von N unmittelbar auch p verschiedene Zerlegungen der Zahl

$$N-a_1^3-a_2^3-\cdots-a_i^3=N_0$$

in eine Anzahl von $n-i$ Cuben gegeben, welche die kleinste Cubenanzahl ist, in welche man diese Zahl zerlegen kann, und die so gefundenen p Zerlegungen sind alle Zerlegungen von N_0 in $n-i$ Cuben, welche es giebt, und alle von einander verschieden.

Durch das im Vorhergehenden berechnete Beispiel erhält man aus den 13 Zerlegungen von 5818 in 7 Cuben zugleich die sämmtlichen Zerlegungen einer sehr grofsen Menge von Zahlen in ihre kleinste Cubenanzahl. Man ersieht die grofse Anzahl dieser Zahlen schon daraus, dafs darunter alle in dem obigen Schema vorkommenden Zahlen nebst ihren Ergänzungen zu 5818 enthalten sein müssen. So ergiebt sich, dafs die Zahlen

$5818-1$, -2^3, -4^3 . . . . auf 5 Arten,
$5818-3^3$ . . . . auf 8 Arten,
$5818-5^3$ . . . . auf 4 Arten,
$5818-6^3$, -12^3, -14^3 . . . . auf 2 Arten,
$5818-7^3$ . . . . auf 7 Arten,
$5818-9^3$, -10^3, -11^3, -13^3, -15^3, -16^3, -17^3 auf 3 Arten

in 6 Cuben zerlegt werden können. Man sieht ferner, dafs folgende 47 Zahlen, welche die Summe von *fünf* und nicht weniger Cuben sind,

$5818-1-2^3$, $-1-4^3$, $-1-6^3$, $-1-11^3$, $-1-13^3$, $-1-14^3$, $-1-15^3$, $-1-16^3$, $-1-17^3$,
$5818-2^3-4^3$, -2^3-7^3, -2^3-10^3, -2^3-14^3, -2^3-17^3,
$5818-3^3-5^3$, -3^3-9^3, -3^3-11^3,
$5818-4^3-5^3$, -4^3-6^3, -4^3-7^3, -4^3-9^3, -4^3-11^3, -4^3-14^3, -4^3-15^3, -4^3-16^3, -4^3-17^3,
$5818-5^2-14^3$, -5^3-15^3, -5^3-16^3, -5^3-17^3,

$5818-6^3-16^3,\ -6^3-17^3,$
$5818-7^3-9^3,\ -7^3-13^3,\ -7^3-14^3,\ -7^3-15^3,$
$5818-9^3-11^3,\ -9^3-15^3,\ -9^3-16^3,\ -9^3-17^3,$
$5818-11^3-13^3,\ -11^3-15^3,\ -11^3-16^3,$
$5818-12^3-14^3,\ -12^3-15^3,$
$5818-13^3-15^3,$
$5818-14^3-14^3,$

oder wenn man sie der Gröfse nach ordnet, die Zahlen,

176 246 330 391 689 715 780 841 897 904 993 1112 1346 1506
1597 1658 1714 1721 2100 2290 2318 2379 2442 2731 2949 3010
3066 3073 3278 3620 3758 4423 4460 4486 4746 4810 5025 5062
5411 5467 5538 5601 5629 5666 5746 5753 5809

nur *auf eine einzige Art* in fünf Cuben zerlegt werden können.

Dies folgt daraus, dafs wenn a^3 und b^3 die beiden Cuben sind, welche man von 5818 abzuziehen hat, um eine dieser 47 Zahlen zu erhalten, unter sämmtlichen Zerfällungen von 5818 immer nur eine einzige die beiden Cuben a^3 und b^3 zugleich enthält.

Über die Einrichtung einer Tafel, mit deren Hülfe ohne alle Versuche die sämmtlichen Zerlegungen einer gegebenen Zahl in die kleinste Cubenanzahl gefunden werden können.

Man hat aus dem im Vorhergehenden berechneten Beispiel gesehen, dafs ungeachtet des Gebrauchs, welchen man von der unten gegebenen Tafel machen kann, um das Aufsuchen aller Zerlegungen einer gegebenen Zahl in die kleinste Cubenanzahl zu erleichtern, dies doch noch ein mühsames Geschäft bleibt. Es wäre daher wünschenswerth, diese Tafel, ohne ihren Umfang zu sehr zu vergröfsern, so zu vervollständigen, dafs das Geschäft auf das möglich kleinste Maafs der Arbeit zurückgeführt wird. Um eine solche vollständige Hülfstafel zu erhalten, in welcher alle Elemente beisammen sind, deren man bedarf, um die Zerfällungen selbst ohne Versuche und überflüssige Subtractionen zu finden, ist erforderlich und wird es hinreichen, *bei jedem Argumente zu der kleinsten Cubenanzahl noch die Wurzeln aller Cuben hinzuzufügen, welche in den verschiedenen Zerlegungen des Arguments in die kleinste Cubenanzahl*

respective die kleinsten sind; z. B. bei dem Argumente 5818 zur Cubenanzahl 7, wie die gefundenen Zerfällungen zeigen, die Zahlen 1, 2, 3. Wenn man eine solche Hülfstafel anwendet, reducirt sich die ganze zur Auffindung aller Zerfällungen nöthige Rechnung genau auf dieselbe Rechnung, welche die Prüfung der bereits bekannten Zerfällungen erfordern würde, wenn man dieselbe so anstellt, dafs man von der gegebenen Zahl nach und nach die verschiedenen Cuben abzieht, wie sie in den einzelnen Zerfällungen der Gröfse nach auf einander folgen.

Es sei eine der Zerfällungen einer Zahl N in die kleinste Cubenanzahl,

$$N = a^3 + b^3 + \cdots + w^3 + x^3 + \cdots + z^3,$$

wo

$$a \leqq b \;.\;.\; \leqq w \leqq x \;.\;.\; \leqq z.$$

Hat man von N nach und nach bereits die Cuben $a, b, \ldots w$ abgezogen, und ist dadurch auf den Rest

$$R = N - a^3 - b^3 - \cdots - w^3$$

gekommen, so ist der zunächst abzuziehende Cubus x^3 der kleinste in einer der Zerfällungen von R in die kleinste Cubenanzahl, und zugleich $\geqq w^3$. Um daher den Werth oder die Werthe von x zu erhalten, — denn es wird x häufig mehrere Werthe haben, — entnehme man aus der Hülfstafel alle bei dem Argumente R zur kleinsten Cubenanzahl hinzugefügten Zahlen, welche $\geqq w$ sind. Auf diese Weise giebt die Hülfstafel nach und nach die Wurzeln der einzelnen Cuben, in der Ordnung, wie sie in den verschiedenen Zerfällungen der Gröfse nach auf einander folgen.

Um den Gebrauch der Tafel zu erläutern, will ich das folgende Fragment derselben hersetzen, welches bei den Zerfällungen von 5818 in 7 Cuben zur Anwendung kommt, und leicht rückwärts aus diesen Zerfällungen abgeleitet werden konnte. Die Zahlen n geben die kleinste Cubenanzahl, in welche die Zahlen R zerfällt werden können, und die Zahlen r die Wurzeln der Cuben, welche in den verschiedenen Zerfällungen von R in n Cuben die kleinsten sind.

R	*n*	*r*	*R*	*n*	*r*	*R*	*n*	*r*	*R*	*n*	*r*
4394	2	13	5439	3	7	5642	2	9	5782	4	7
4472	2	12	5446	3	7	5663	4	3.4	5789	4	4.7
4706	2	11	5472	3	6.10	5677	4	4.5	5791	6	1.2.3.4
4825	2	9	5488	2	14	5685	5	2.5	5794	4	3
5096	2	10	5511	4	7	5700	4	4	5802	5	2.4.5
5103	2	12	5552	3	4.5	5725	3	11	5809	5	3
5168	3	7	5560	4	2.5	5727	5	1.3.4.6	5810	6	1.2.5
5256	2	7	5572	2	13	5737	4	7	5815	4	6.7
5394	3	10	5599	3	7	5738	4	5	5816	5	1.3
5427	2	11	5613	3	5	5764	5	3.4	5817	6	1.2
5435	3	9	5636	3	4	5767	3	5	5818	7	1.2.3

Die Rechnung, welche mit Benutzung dieser Tafel zur Auffindung der Zerfällungen von 5818 in 7 Cuben zu machen ist, läfst sich nach dem unten folgenden Schema anordnen. Es sind in demselben:

Die vor dem ersten Verticalstrich befindlichen Zahlen *s* die Wurzeln der nach und nach von 5818 abgezogenen Cuben;

Die zwischen den beiden Verticalstrichen enthaltenen Zahlen *R* die nach diesen Subtractionen übrig bleibenden Reste;

Die hinter dem zweiten Verticalstrich stehenden Zahlen alle aus der Tafel entnommen zum Argumente *R* gehörigen Werthe von *r*, welche nicht kleiner als die gröfste (erste) der daneben stehenden Zahlen *s* sind.

Das Schema besteht aus 6 Gruppen, welche sich durch die Anzahl der vor dem ersten Verticalstrich stehenden Zahlen *s* unterscheiden. Die Zahlen *R* jeder Gruppe werden aus den Zahlen *R* der unmittelbar vorhergehenden Gruppe durch das Abziehen der Cuben der neben den letztern stehenden Zahlen *r* gefunden. Es wird daher die Anzahl der Horizontalreihen jeder Gruppe der Anzahl aller zu der vorhergehenden Gruppe gehörenden Zahlen *r* gleich. So findet man z. B. die Zahlen *R* der 3ten Gruppe, wenn man 1 von 5816, 2^3 von 5802, 3^3 von 5816 und 5764, 4^3 von 5802, 5764 und 5727, 5^3 von 5802, 6^3 von 5727 abzieht. Die Zahlen *R* der letzten Gruppe

sind die Summe zweier Cuben; hinter dem zweiten Verticalstrich hat man zu der aus der Hülfstafel entnommenen Wurzel des kleinsten dieser beiden Cuben noch die Wurzel des andern Cubus hinzugefügt, so dafs die verschiednen Horizontalreihen der letzten Gruppen die Wurzeln der in den verschiednen Zerfällungen von 5818 enthaltnen 7 Cuben geben, von denen die 5 kleinsten vor dem ersten und die beiden gröfsten hinter dem zweiten Verticalstrich stehen.

s	*R*	*r*	*s*	*R*	*r*	*s*	*R*	*r*	*s*	*R*	*r*
	5818	1.2.3	1.1.1	5815	6.7	3.2.2.2	5767	5	4.4.4.3.3	5572	13 15
			2.2.2	5794	3	4.3.1.1	5725	11	5.3.2.2.2	5642	9 17
1	5817	1.2	3.1.1	5789	4.7	4.4.3.3	5636	4	5.5.4.2.2	5488	14 14
2	5810	2.5	3.2.1	5782	7	4.4.4.3	5599	7	5.5.5.2.2	5427	11 16
3	5791	3.4	3.3.3	5737	7	5.4.2.2	5613	5	7.4.4.4.3	5256	7 17
			4.2.2	5738	5	5.5.2.2	5552	5	7.6.1.1.1	5256	7 17
1.1	5816	1.3	4.3.3	5700	4	5.5.5.2	5435	9	7.7.3.1.1	5103	12 15
2.1	5809	3	4.4.3	5663	4	6.1.1.1	5599	7	7.7.3.2.1	5096	10 16
2.2	5802	2.4.5	5.2.2	5677	5	7.1.1.1	5472	10	7.7.6.4.3	4825	9 16
3.3	5764	3.4	5.5.2	5560	5	7.3.1.1	5446	7	9.5.5.5.2	4706	11 15
4.3	5727	4.6	6.4.3	5511	7	7.3.2.1	5439	7	10.7.1.1.1	4472	12 14
5.2	5685	5				7.3.3.3	5394	10	10.7.3.3.3	4394	13 13
						7.6.4.3	5168	7	11.4.3.1.1	4394	13 13

Die Hülfstafel kann auf ganz ähnliche Art wie diejenige construirt werden, welche blofs die kleinste Cubenanzahl, in welche man eine gegebene Zahl zerfällen kann, angiebt. Man nehme wieder an, die Construction der Hülfstafel sei für alle Zahlen

$$(1),\ (2),\ ..\ (m)$$

beendigt, so dafs, wenn i eine der Zahlen 1, 2, .. m und I eine der Zahlen (i) ist, bei jeder Zahl I aufser der kleinsten Cubenanzahl i noch die Wurzeln aller derjenigen Cuben angegeben sind, welche in den verschiednen Zerlegungen von I in i Cuben respective die kleinsten sind. Es sollen durch Addition einer Cubikzahl zu den Zahlen (m) die Argumente, bei welchen die kleinste Cubenanzahl $m+1$ einzutragen ist, und die Zahlen, welche neben dieselbe

einzutragen sind, gefunden werden. Ist x^3 der zu addirende Cubus, so addirt man x^3 nur dann zu einem Argumente (m), wenn x kleiner oder nicht gröfser als die gröfste der bei diesem Argumente neben m eingetragnen Zahlen ist. Ist dies der Fall, und findet man bei dem Argumente $(m)+x^3$ ein leeres Feld, so trägt man darin die Cubenanzahl $m+1$ und neben diese die Wurzel x ein, oder wenn sich in das Feld schon die Cubenanzahl $m+1$ und eine oder mehrere andere Zahlen eingetragen finden, so fügt man letzteren noch die Wurzel x hinzu. Es geschieht hiebei von selbst, dafs die Addition von x^3 zu den Zahlen (m) nur von solchen Zahlen (m) an begonnen wird, welche $\geqq mx^3$ sind.

Man kann auf diese Weise fortfahren, bis die Construction der Hülfstafel beendigt ist; doch wird man wieder gut thun, wenn m den Werth 5 oder 6 erreicht hat, und daher nur noch wenige Felder auszufüllen bleiben, das umgekehrte Verfahren zu befolgen. Ist nämlich N ein Argument, bei welchem sich ein noch leeres Feld findet, so trägt man in dasselbe immer die kleinste Cubenanzahl $m+1$ und die Wurzel x ein, wenn bei dem Argumente $N-x^3$ die kleinste Cubenanzahl m gefunden wird. Wenn das Feld bei dem Argumente N bereits mit der kleinsten Cubenanzahl $m+1$ und einer oder mehreren andern Zahlen erfüllt ist, so fügt man letztern die Zahl x hinzu, wenn x kleiner oder nicht gröfser als die gröfsten der bei $N-x^3$ neben m eingetragnen Zahlen ist. — Die Additionen und Subtractionen kann man wieder, wie oben, zum bei weitem gröfsten Theil durch ein blofses Aneinanderfügen der einzelnen Theile der Tafel ersetzen.

Wenn man nicht blofs die Zerfällungen in die *kleinste* Anzahl von Cuben, sondern überhaupt die Zerfällungen in eine *gegebne* Anzahl von Cuben haben will, so kann man auch hiefür ganz ähnliche Hülfstafeln construiren, von denen jede sich auf die besondre gegebne Cubenanzahl bezieht, und in ihren Feldern alle Zahlen enthält, welche in den verschiednen Zerfällungen des Arguments in die *gegebne* Cubenanzahl respective die Wurzeln der kleinsten Cuben sind. Hat man die Hülfstafel $[m]$ für die Zerlegungen in m Cuben construirt, so erhält man daraus die Hülfstafel $[m+1]$ für die Zerlegungen in $m+1$ Cuben ganz in der früheren Art, wenn man die verschiednen Cuben x^3 zu allen Argumenten M der Tafel $[m]$, welche $\geqq mx^3$ sind, addirt, und jedesmal, wenn x nicht gröfser als die gröfste der bei M in $[m]$ eingetragnen Zahlen ist, bei dem Argumente $M+x^3$ in $[m+1]$ die

Zahl x einträgt. Die frühere Construction unterscheidet sich von dieser nur dadurch, dafs in derselben auch noch alle Argumente $M+x^3$, bei welchen eine kleinere Cubenanzahl als $m+1$ eingetragen war, oder welche auch die Summe von weniger als $m+1$ Cuben sein konnten, übergangen wurden, was jetzt nicht der Fall ist. Bei der Construction der Hülfstafeln aus einander wird es rathsam sein, wenn man dieselben (wenigstens von der Tafel [4] an) alle Argumente umfassen läfst, indem man die Felder leer läfst, welche Argumenten zugehören, die nicht in die gegebne Cubenanzahl zerfällt werden können. Man kann dann durch ein blofses Nebeneinanderlegen der verschiednen Theile je zweier Hülfstafeln $[m]$ und $[m+1]$ in der oben angegebnen Art alle Additionen ersetzen.

Tafel für die kleinste Anzahl von Cuben, aus welchen die Zahlen bis 12000 zusammengesetzt werden können.

(Die am Rande befindlichen Zahlen sind die *Einer* von 1 bis 100; die Zahlen in der obersten Horizontalreihe sind die 10 Hunderte; in der Ecke oben links befinden sich die Tausende.)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	5	5	6	7	5	4	3	3	5
2	2	6	6	7	4	6	5	4	4	3
3	3	7	6	8	5	4	3	5	5	4
4	4	6	7	4	6	4	4	4	5	5
5	5	6	4	5	3	5	5	5	6	6
6	6	7	4	6	4	5	6	6	7	6
7	7	4	5	3	2	6	6	6	5	5
8	1	4	5	4	3	5	6	6	5	4
9	2	5	5	5	4	6	5	4	4	4
10	3	6	6	6	5	7	6	5	4	4
11	4	7	7	7	6	5	4	4	3	5
12	5	7	8	5	7	1	5	4	4	6
13	6	7	5	6	4	2	4	3	5	7
14	7	8	5	3	5	3	5	4	4	5
15	8	5	6	4	3	4	6	5	5	6
16	2	5	1	5	4	5	7	5	5	5
17	3	6	2	4	5	6	6	5	5	4
18	4	3	3	5	6	7	5	4	5	3
19	5	4	4	6	7	6	5	5	4	3
20	6	5	5	5	8	2	4	5	3	4
21	7	6	6	6	5	3	4	4	4	4
22	8	7	6	4	5	4	5	5	5	5
23	9	6	7	5	4	4	3	6	6	6
24	3	6	2	5	4	5	4	6	6	6
25	4	1	3	5	5	5	5	6	6	5
26	5	2	4	6	6	6	6	5	4	4
27	1	3	5	7	7	5	6	6	5	4
28	2	2	6	6	8	3	5	2	4	5
29	3	3	7	7	5	4	5	1	5	4
30	4	4	7	5	6	4	4	2	6	5
31	5	5	8	5	5	5	4	3	6	6
32	4	6	3	6	2	3	5	4	6	6
33	5	2	4	6	3	4	6	5	7	6
34	6	3	5	4	3	5	7	6	5	5
35	2	4	6	5	4	4	7	7	6	5
36	3	3	6	6	5	4	6	3	5	4
37	4	4	7	7	6	5	2	2	5	5
38	5	5	8	6	7	5	3	3	4	6
39	6	6	9	6	4	2	4	4	4	5
40	5	7	4	7	3	3	3	4	5	6
41	6	3	5	2	4	4	4	5	5	6
42	7	4	6	3	4	5	5	6	6	6
43	3	5	2	1	5	5	6	6	5	6
44	4	4	3	2	6	5	7	4	6	3
45	5	4	4	3	6	6	3	3	6	2
46	6	5	5	4	7	6	4	4	5	3
47	7	6	6	5	5	3	5	5	4	4
48	6	7	5	6	4	4	3	4	5	5
49	7	4	6	3	5	5	4	5	6	6
50	8	5	2	4	5	5	4	3	7	7
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	4	6	3	2	5	6	5	4	6	5
52	5	2	4	3	6	6	6	5	7	4
53	6	3	3	4	7	7	4	4	3	3
54	2	4	4	5	8	6	5	5	2	4
55	3	3	5	6	6	4	5	3	2	5
56	4	4	4	7	5	5	4	2	3	5
57	5	5	5	4	6	3	4	3	3	6
58	6	6	3	5	6	4	5	4	4	7
59	5	7	4	3	3	2	6	5	5	6
60	6	3	5	4	4	3	5	6	6	5
61	7	4	4	5	4	4	5	5	4	4
62	3	5	5	6	5	5	6	3	3	5
63	4	4	6	7	6	5	6	4	3	5
64	1	5	5	8	6	5	3	3	4	5
65	2	6	6	5	7	4	4	4	4	6
66	3	7	4	6	3	3	5	5	5	4
67	4	8	5	4	4	3	4	5	6	5
68	5	4	6	3	2	4	5	5	6	6
69	6	5	5	4	3	5	6	6	5	5
70	4	6	3	2	4	6	7	4	4	6
71	5	5	4	3	3	6	7	5	4	4
72	2	5	5	4	4	6	4	4	5	3
73	3	6	6	5	5	5	5	4	5	4
74	4	7	5	6	4	4	6	5	5	5
75	5	8	6	3	5	4	4	3	4	6
76	6	5	7	4	3	2	5	4	5	7
77	7	6	3	5	4	3	5	4	6	6
78	5	7	4	3	5	4	6	5	5	4
79	6	3	5	4	4	5	7	6	5	3
80	3	4	2	5	5	6	5	5	4	3
81	3	5	3	5	6	6	6	5	3	4
82	4	4	4	6	5	5	4	4	3	4
83	5	5	5	4	6	5	5	3	4	4
84	6	6	6	5	4	3	3	4	4	5
85	7	7	4	6	5	4	4	5	5	5
86	6	8	5	4	4	3	2	6	6	5
87	7	4	6	5	5	4	3	7	4	4
88	4	5	3	6	5	5	4	6	5	4
89	4	2	4	6	6	6	5	4	4	5
90	5	3	5	7	6	6	5	5	4	5
91	2	4	6	5	7	4	4	4	5	4
92	3	3	7	6	5	4	4	3	5	5
93	4	4	5	7	4	3	5	2	6	5
94	5	5	6	5	5	4	3	3	7	6
95	6	5	7	4	3	5	4	4	5	5
96	5	6	4	5	3	4	5	5	6	5
97	5	3	4	3	4	5	6	5	5	6
98	6	4	5	4	4	6	6	6	5	5
99	3	5	6	5	5	5	5	5	6	4
100	4	4	7	6	4	5	5	4	4	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	5	5	5	5	5	4	3	3	6
2	3	6	6	6	5	5	5	4	4	4
3	4	5	5	5	3	5	4	5	5	5
4	5	4	5	4	4	4	5	5	6	6
5	5	4	4	3	4	5	5	6	5	5
6	4	5	4	4	5	5	6	4	6	5
7	4	4	5	4	3	6	6	5	4	3
8	2	5	5	5	4	6	4	4	4	4
9	3	6	6	5	5	6	5	4	4	5
10	4	6	7	6	6	4	4	4	5	5
11	5	6	6	6	4	5	3	5	4	6
12	5	5	6	5	4	2	4	5	5	7
13	6	5	4	4	4	3	5	4	6	6
14	5	6	5	4	4	4	6	5	5	6
15	5	4	5	4	3	5	6	5	5	4
16	3	5	2	5	4	6	5	5	5	5
17	4	6	3	5	5	6	5	5	4	3
18	5	4	4	6	6	5	5	5	5	4
19	6	5	5	6	5	5	4	6	3	4
20	6	5	6	5	5	3	5	5	4	4
21	7	6	5	5	5	4	5	5	5	5
22	6	7	5	4	3	3	6	6	5	5
23	6	5	5	4	4	4	4	6	6	5
24	2	5	3	5	5	5	5	6	5	4
25	3	2	4	5	6	6	6	5	5	4
26	4	3	5	5	6	6	6	5	4	4
27	2	4	5	6	6	6	5	6	4	4
28	3	3	6	6	6	4	5	1	4	5
29	3	4	5	6	5	5	5	2	5	5
30	4	5	5	5	4	4	5	3	6	6
31	5	5	6	1	4	5	4	4	5	6
32	3	5	4	2	3	4	5	5	6	5
33	4	3	5	3	4	5	6	5	5	5
34	5	4	6	4	4	6	7	6	5	4
35	3	4	6	5	5	5	5	5	5	5
36	4	3	7	6	5	3	6	2	5	5
37	4	4	6	7	6	4	3	3	6	6
38	5	5	6	5	5	5	4	3	5	7
39	6	6	7	2	5	3	5	4	5	6
40	4	6	3	3	4	4	4	5	6	6
41	5	4	2	3	5	4	5	6	6	6
42	5	5	3	4	4	5	6	6	6	5
43	4	5	3	2	5	5	6	6	2	5
44	4	4	4	3	6	4	6	3	3	2
45	5	5	4	4	6	5	4	4	4	3
46	5	6	5	5	6	6	5	4	4	4
47	5	6	6	3	5	2	4	5	5	5
48	5	7	4	4	5	3	4	5	6	6
49	6	3	3	4	4	4	5	6	6	6
50	6	4	3	5	5	5	5	4	6	6
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	3	5	4	3	6	6	6	5	3	5
52	4	3	5	4	7	5	6	4	4	3
53	5	4	4	5	7	6	5	3	2	4
54	3	4	5	6	7	6	6	4	3	4
55	4	4	6	4	6	3	5	2	3	5
56	4	5	5	5	2	4	5	3	3	6
57	5	4	4	5	3	4	5	4	4	7
58	6	5	4	2	2	5	5	4	5	6
59	4	6	5	3	3	3	6	5	4	6
60	5	4	5	4	4	4	6	5	5	4
61	5	3	4	5	5	5	4	4	3	5
62	4	4	4	6	6	6	5	4	4	5
63	5	4	5	5	6	4	6	3	4	6
64	2	5	5	6	3	5	4	4	4	6
65	3	5	5	4	4	5	5	4	4	7
66	4	6	5	3	3	4	5	5	5	5
67	5	6	4	3	4	4	5	6	5	6
68	6	5	3	4	3	5	6	6	6	3
69	4	4	4	4	4	6	5	5	4	4
70	3	5	4	3	5	6	6	5	3	3
71	3	5	5	4	4	5	7	4	4	3
72	2	6	5	4	4	6	3	5	5	4
73	3	6	6	5	5	6	4	5	5	5
74	4	7	4	4	4	3	2	5	6	5
75	5	7	5	4	5	4	3	4	5	6
76	6	4	4	5	4	3	4	5	6	4
77	5	5	4	4	5	4	5	5	5	5
78	4	6	5	4	5	5	6	6	4	3
79	4	4	5	5	4	6	7	5	4	4
80	3	5	3	5	5	7	4	4	5	4
81	4	5	4	6	6	3	5	5	4	4
82	5	5	5	5	5	4	3	3	4	5
83	5	6	6	5	3	3	4	4	4	5
84	6	5	5	6	4	3	4	5	5	5
85	6	6	5	3	3	4	5	5	6	[illegible]
86	5	6	4	4	4	4	3	5	5	4
87	5	5	4	5	5	5	4	6	5	5
88	3	4	3	6	6	5	5	5	4	[illegible]
89	4	3	4	6	7	4	6	5	5	5
90	5	4	5	6	5	5	4	4	3	5
91	3	5	6	6	4	4	5	5	4	5
92	4	4	6	5	4	4	5	2	5	6
93	4	5	6	4	4	4	6	3	6	[illegible]
94	5	5	5	4	5	5	4	4	6	5
95	6	4	4	2	4	6	5	5	6	4
96	4	4	4	3	4	5	6	6	5	5
97	4	3	5	4	5	5	7	4	4	4
98	4	3	6	5	5	6	5	5	4	4
99	3	4	6	5	5	5	4	3	5	5
100	4	4	7	6	5	4	5	3	5	2
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	5	5	6	4	5	5	4	4	5	51	4	4	3	4	5	6	6	6	4	6
2	4	6	5	5	4	6	4	5	5	5		5	4	4	4	6	6	6	2	5	[illegible]
3	5	4	5	4	3	4	5	5	5	6		5	5	5	5	5	6	5	3	3	3
4	5	5	4	3	4	4	3	6	6	4		4	5	6	6	6	5	5	4	4	4
5	4	5	2	4	5	5	4	5	5	4		5	5	6	3	4	4	5	3	4	5
6	5	4	3	5	6	6	5	5	4	5		[illegible]	6	4	4	3	4	4	3	4	6
7	5	5	4	5	4	5	5	4	5	4		6	5	5	4	2	5	5	4	5	6
8	3	5	5	6	5	6	5	4	2	5		6	6	5	3	3	6	5	5	6	6
9	4	6	6	5	5	5	4	2	3	5		[illegible]	5	4	4	4	4	6	6	5	4
10	5	7	6	4	5	5	4	3	4	4		2	3	4	4	5	5	7	3	6	2
11	6	5	5	4	4	4	4	4	5	5		3	4	2	5	6	6	5	4	4	3
12	6	5	4	4	4	3	4	5	6	4		4	4	3	6	6	6	2	5	4	[illegible]
13	5	5	3	4	2	4	5	5	6	5		5	5	4	4	5	5	3	4	5	5
14	6	4	4	4	3	5	6	6	4	4		3	6	5	5	4	5	4	4	4	6
15	4	5	5	4	4	6	5	5	5	4		4	6	4	3	3	4	3	5	5	6
16	4	6	3	5	5	6	6	4	3	4		5	7	5	4	4	5	4	6	6	6
17	3	6	4	6	6	5	5	3	4	4		4	5	3	4	4	3	5	6	4	5
18	4	5	5	5	6	6	5	4	5	5		3	4	4	4	4	4	4	4	5	3
19	5	6	6	5	4	5	4	5	4	5		3	5	3	5	5	5	5	5	2	3
20	6	5	5	5	5	4	5	5	4	5		4	5	4	4	6	6	3	6	3	4
21	6	6	4	4	3	3	5	6	5	6		2	5	5	5	5	4	4	2	4	4
22	5	5	5	2	4	4	6	6	5	5		3	6	6	5	5	3	4	3	3	4
23	5	4	4	3	5	5	5	6	5	4		4	5	5	4	4	4	3	3	4	5
24	3	3	2	4	5	6	6	5	4	5		5	6	5	5	4	4	3	4	5	5
25	4	3	3	3	6	6	6	4	4	3		5	6	4	5	5	4	4	5	5	6
26	5	4	4	4	7	5	5	3	5	2		4	5	3	4	5	4	5	5	6	4
27	3	5	5	5	5	5	5	4	4	3		4	6	4	5	3	5	6	5	3	[illegible]
28	4	4	5	6	5	4	5	2	5	4		5	5	4	5	4	6	4	6	3	4
29	4	5	5	5	4	4	3	3	6	5		3	5	5	5	5	5	5	3	4	5
30	5	5	6	3	4	4	4	4	6	6		4	6	4	6	4	4	5	4	4	4
31	6	5	5	2	5	5	4	5	6	5		4	6	5	5	5	4	4	4	4	5
32	4	4	3	3	4	5	5	5	5	5		5	6	6	4	4	3	4	4	5	6
33	5	4	4	4	5	6	6	5	5	3		6	7	5	5	4	3	5	4	3	6
34	4	5	5	5	5	6	6	4	3	3		5	4	4	5	3	4	5	5	4	5
35	4	3	6	6	5	6	5	5	3	4		5	3	4	4	4	4	6	6	4	5
36	5	4	6	6	5	4	4	3	4	4		4	3	5	3	5	5	4	6	4	5
37	5	5	6	5	5	5	4	4	4	5		3	3	3	4	5	6	5	3	5	3
38	6	6	6	4	5	3	5	4	5	6		4	4	3	5	5	5	6	4	5	4
39	7	6	5	3	5	4	5	5	6	5		5	4	4	4	6	5	3	3	4	4
40	5	5	2	4	3	2	5	6	6	6		6	5	5	5	4	4	4	4	4	3
41	6	5	3	4	4	3	6	6	5	4		4	6	6	5	5	4	5	5	4	4
42	4	4	4	5	5	4	6	5	4	4		5	5	5	4	4	5	4	3	5	5
43	5	4	4	3	6	5	6	5	3	5		4	4	5	5	5	5	4	4	5	6
44	4	4	5	4	6	5	5	1	4	3		5	4	4	4	5	4	5	5	5	3
45	5	5	5	5	6	6	5	2	4	4		4	4	4	3	5	5	5	4	6	4
46	6	6	6	5	5	4	4	3	5	5		4	3	4	4	5	6	5	5	3	4
47	6	6	6	4	3	3	4	4	5	4		5	1	5	5	6	6	4	4	[illegible]	4
48	4	6	3	5	4	3	5	5	6	5		3	2	6	6	5	5	4	3	4	4
49	5	4	4	3	5	4	5	6	6	5		4	3	7	6	6	4	4	4	4	5
50	5	5	4	4	4	5	6	5	5	5	1	5	4	6	5	5	5	4	3	5	3
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	5	4	4	5	3	4	5	5	5	51	3	3	4	5	6	6	6	5	4	3
2	4	5	5	4	2	4	5	6	6	5	52	3	4	5	5	7	5	4	3	4	3
3	4	4	4	3	3	3	6	6	5	4	53	4	5	5	6	5	5	3	4	4	4
4	5	5	5	4	4	4	4	5	5	5	54	4	6	6	5	5	4	4	5	5	5
5	3	5	3	5	5	5	5	5	5	[illegible]	55	5	6	5	4	4	3	3	[illegible]	5	5
6	4	5	4	6	6	4	4	4	5	5	56	6	6	2	5	2	4	4	4	5	6
7	5	5	5	5	5	5	4	5	3	4	57	6	5	3	5	3	5	5	5	6	5
8	4	6	6	6	4	3	4	5	3	5	58	4	5	4	4	4	5	6	5	5	5
9	5	6	5	4	5	4	5	3	4	6	59	2	4	5	5	5	5	7	6	5	4
10	5	6	4	4	3	4	5	4	5	5	60	3	4	5	5	6	6	5	4	5	3
11	5	5	4	4	4	4	5	5	5	5	61	4	5	3	6	6	6	4	5	5	4
12	6	4	3	4	5	4	4	6	6	5	62	5	5	4	6	5	5	3	5	5	5
13	4	4	4	5	3	5	5	5	5	4	63	6	5	5	5	5	4	4	5	[illegible]	6
14	4	3	5	5	4	5	5	5	[illegible]	3	64	4	6	3	5	3	3	5	5	5	7
15	5	4	4	5	5	5	5	5	4	4	65	5	6	4	4	4	4	4	6	6	6
16	4	4	4	6	5	4	5	3	3	5	66	5	6	5	5	3	5	5	6	6	5
17	4	5	5	5	5	4	6	4	4	5	67	3	5	4	4	4	4	6	6	5	5
18	5	5	5	5	4	4	3	2	5	6	68	4	5	4	5	5	5	5	[illegible]	5	3
19	6	4	5	5	5	4	4	3	5	6	69	4	4	3	6	6	5	5	4	3	4
20	7	5	4	3	6	3	5	4	5	5	70	5	5	4	5	6	5	4	5	4	5
21	4	5	3	4	4	4	6	5	5	5	71	3	6	5	6	5	3	5	3	3	5
22	5	4	4	3	5	5	6	5	5	4	72	4	7	4	6	3	4	3	4	4	5
23	5	3	5	4	6	6	6	4	5	5	73	5	6	5	5	2	5	4	4	5	6
24	3	4	3	5	5	5	5	4	4	4	74	6	3	5	5	3	5	4	5	6	6
25	4	4	4	4	6	5	3	5	5	2	75	4	4	3	1	4	5	5	6	5	6
26	5	5	4	5	5	5	4	3	4	3	76	5	3	4	2	5	5	5	[illegible]	6	4
27	4	5	5	6	5	3	5	4	5	4	77	5	4	4	3	4	6	6	5	4	5
28	5	5	5	4	4	2	4	3	5	5	78	4	4	5	4	5	6	5	4	4	[illegible]
29	5	6	4	5	3	3	4	4	6	6	79	4	5	5	5	6	4	5	4	4	4
30	5	4	5	4	3	4	5	5	6	5	80	5	5	5	6	4	5	4	4	[illegible]	5
31	6	4	6	3	4	5	5	5	5	6	81	5	6	6	3	3	3	5	4	5	6
32	4	4	4	4	5	6	6	5	4	4	82	6	4	6	4	4	4	4	3	6	6
33	4	5	5	4	6	5	4	4	5	3	83	5	5	3	2	3	4	5	4	4	6
34	5	6	5	5	5	6	5	4	4	3	84	4	3	4	3	4	4	6	5	5	4
35	5	4	6	5	5	4	4	5	4	4	85	3	4	4	4	4	5	7	6	5	3
36	5	5	6	5	5	3	5	4	5	5	86	3	3	5	4	5	6	4	5	5	4
37	5	6	5	4	4	3	5	5	5	6	87	2	4	4	5	6	5	5	[illegible]	2	4
38	6	5	4	5	3	4	6	5	6	6	88	3	5	4	6	5	6	4	3	3	5
39	5	5	4	4	2	5	5	6	6	5	89	4	5	5	4	4	4	3	[illegible]	4	3
40	5	5	3	5	3	3	6	6	5	5	90	5	5	5	4	5	5	4	[illegible]	5	4
41	5	4	4	5	4	4	5	5	4	4	91	5	6	4	3	4	2	5	5	5	5
42	5	3	5	6	5	5	5	5	5	4	92	5	4	5	4	5	3	5	4	6	5
43	5	4	5	4	6	5	5	4	3	5	93	4	5	5	5	4	4	5	5	4	3
44	5	5	5	5	6	4	5	2	4	4	94	4	4	5	4	4	5	5	6	5	4
45	6	6	6	5	4	4	4	3	5	5	95	3	5	5	4	5	6	6	[illegible]	3	4
46	6	5	5	4	4	5	4	4	4	6	96	4	4	4	5	6	5	4	[illegible]	4	4
47	6	6	5	4	3	4	5	5	5	5	97	5	2	5	5	5	4	4	4	5	4
48	5	5	4	4	4	4	5	6	5	6	98	4	3	6	5	6	3	4	[illegible]	[illegible]	4
49	6	4	5	4	5	5	6	6	5	5	99	4	4	4	4	4	3	4	3	5	5
50	4	4	4	5	5	6	6	4	6	4	100	5	5	5	4	2	4	5	4	6	4
3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	5	4	5	4	4	5	5	4	6
2	5	3	3	5	3	5	6	6	5	4
3	5	3	4	4	4	3	5	7	4	5
4	4	2	5	5	4	4	5	5	3	4
5	4	3	4	6	5	4	4	5	4	5
6	5	4	5	7	5	5	4	2	5	3
7	6	5	6	5	4	4	5	3	4	4
8	5	6	4	5	5	4	2	4	4	5
9	5	5	4	5	5	5	3	4	4	6
10	6	4	4	4	4	5	3	5	5	5
11	5	4	5	4	5	4	4	6	5	4
12	3	3	4	2	5	5	5	4	4	4
13	4	4	5	3	4	5	5	5	4	1
14	5	4	4	4	5	6	4	3	4	2
15	4	5	5	5	5	4	4	4	3	3
16	4	5	5	6	4	5	3	4	4	4
17	5	5	5	6	4	4	4	5	5	5
18	5	4	5	4	3	5	4	3	6	6
19	6	5	6	4	4	3	5	4	6	5
20	4	4	5	3	5	4	5	5	5	5
21	5	5	2	4	3	5	6	5	5	2
22	5	5	3	4	4	4	5	4	5	3
23	4	2	4	5	5	5	5	5	4	4
24	4	3	3	6	5	4	4	5	3	5
25	5	4	4	4	5	5	4	5	2	3
26	6	5	5	5	4	4	5	4	3	4
27	5	6	4	4	5	4	5	5	4	5
28	5	5	4	4	5	3	4	4	5	5
29	5	4	3	5	4	4	5	5	6	3
30	5	4	3	5	4	4	5	5	5	4
31	5	3	4	4	5	5	5	5	3	4
32	4	4	4	4	6	5	5	6	4	5
33	5	5	5	5	6	6	5	3	3	4
34	6	6	6	5	5	5	4	4	4	4
35	6	5	5	5	5	5	3	4	5	5
36	6	6	5	4	5	3	4	4	5	6
37	6	4	4	5	3	4	4	3	5	4
38	5	5	4	5	4	5	5	4	6	5
39	4	3	5	3	2	6	6	5	4	5
40	4	4	4	4	3	4	5	5	5	2
41	4	3	5	5	4	5	5	4	4	2
42	[illegible]	[illegible]	6	6	5	5	5	4	4	3
43	[illegible]	5	5	5	5	4	4	5	4	4
44	6	6	6	5	5	[illegible]	4	3	5	5
45	[illegible]	6	5	5	4	4	5	4	6	5
46	6	6	5	[illegible]	4	4	5	5	4	6
47	5	4	5	4	[illegible]	5	5	5	5	6
48	[illegible]	5	[illegible]	5	4	5	6	6	5	3
49	[illegible]	[illegible]	4	4	5	5	5	6	5	3
50	[illegible]	5	5	5	5	6	6	5	5	[illegible]
4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	4	4	4	6	6	5	4	6	4	3
52	4	5	5	5	5	4	5	4	3	4
53	4	6	6	5	5	5	4	5	4	4
54	5	6	5	4	4	5	3	6	5	5
55	6	5	5	4	4	4	3	5	6	6
56	5	5	3	5	3	5	4	5	6	4
57	4	5	3	4	4	5	5	6	6	4
58	4	4	4	5	3	6	6	6	4	4
59	3	4	5	5	4	6	5	5	3	4
60	4	2	6	6	5	5	6	4	4	4
61	3	3	4	6	5	5	4	4	5	5
62	4	4	5	5	5	4	4	5	4	6
63	5	5	6	5	4	4	4	5	5	6
64	5	5	4	5	4	3	5	4	6	5
65	5	4	4	5	5	4	5	5	5	5
66	5	4	4	4	3	5	6	6	5	5
67	4	4	5	5	4	4	6	6	4	3
68	5	3	3	6	5	5	5	4	4	3
69	4	4	4	7	6	5	5	4	4	4
70	5	5	5	6	6	5	5	3	4	4
71	4	6	6	6	4	4	5	4	4	5
72	5	6	5	6	2	4	3	5	5	6
73	6	5	5	4	3	4	4	5	5	6
74	6	4	5	5	4	5	4	6	6	6
75	2	4	4	2	5	5	5	7	5	4
76	3	4	4	3	6	6	6	5	5	4
77	4	4	4	4	5	6	5	5	5	2
78	5	5	5	5	6	6	5	4	5	3
79	5	6	6	6	5	5	5	4	4	4
80	5	6	4	6	3	5	4	4	5	5
81	6	6	5	4	4	4	4	5	6	6
82	6	5	6	4	4	5	4	3	7	7
83	3	5	4	3	4	4	5	4	5	5
84	4	4	4	4	4	5	6	5	6	3
85	4	3	3	5	4	6	6	6	5	3
86	4	4	4	5	5	5	5	5	4	4
87	3	3	5	6	6	3	5	3	3	5
88	4	4	4	7	4	4	3	4	4	6
89	5	5	5	5	5	5	4	5	3	4
90	6	6	5	3	5	5	5	4	4	5
91	4	6	3	4	5	3	6	5	5	6
92	5	5	4	5	5	4	5	5	6	4
93	4	4	4	4	4	5	6	6	5	4
94	5	5	4	2	5	5	6	6	5	4
95	4	4	4	3	6	4	6	4	4	4
96	1	5	5	4	5	5	4	5	5	5
97	2	3	6	5	4	3	4	4	4	4
98	3	4	6	4	5	4	5	5	5	4
99	4	5	4	3	3	4	4	4	6	5
100	5	3	4	4	3	4	5	5	6	5
4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	5	3	5	4	5	5	5	5	5
2	5	3	4	5	4	6	6	5	5	5
3	4	2	5	5	5	4	6	5	3	5
4	3	3	6	6	5	4	5	3	4	3
5	3	4	5	7	6	5	5	4	5	4
6	4	5	6	7	3	4	5	3	5	4
7	5	5	6	5	4	5	4	4	5	5
8	6	6	5	5	4	5	3	5	5	6
9	5	4	4	4	4	5	4	5	5	6
10	6	4	5	4	5	4	4	6	6	6
11	4	3	4	4	5	4	5	6	4	5
12	4	4	5	3	5	5	6	4	5	4
13	4	4	5	4	5	6	3	4	5	2
14	4	5	5	5	4	5	4	4	5	3
15	4	6	6	5	5	3	3	5	4	3
16	5	6	6	4	5	4	4	5	5	4
17	5	5	5	5	4	4	5	4	6	5
18	6	5	3	4	4	4	4	4	7	4
19	5	4	4	3	5	4	5	5	5	5
20	4	3	4	3	6	5	6	5	6	4
21	5	4	3	4	4	6	4	4	5	3
22	5	4	4	5	5	5	4	5	4	4
23	5	3	5	6	5	4	4	5	5	3
24	5	4	4	4	5	5	5	4	2	4
25	5	4	5	5	2	5	5	3	3	4
26	6	5	4	4	3	5	4	4	4	5
27	5	5	4	4	2	4	4	5	5	6
28	5	4	3	4	3	4	5	5	5	4
29	5	2	4	5	4	5	5	5	4	4
30	5	3	4	6	5	5	5	4	4	4
31	4	4	4	5	6	4	5	4	3	4
32	4	5	4	5	6	5	4	5	1	5
33	5	5	5	6	3	4	5	4	2	5
34	5	6	5	5	4	5	5	4	3	5
35	6	6	5	5	3	4	4	5	4	6
36	5	5	4	4	4	4	3	5	5	5
37	5	3	5	3	4	5	4	4	5	3
38	2	4	5	4	5	5	5	4	5	4
39	3	4	5	4	3	5	6	5	4	3
40	4	5	5	5	4	5	4	4	2	3
41	3	4	6	5	4	5	3	5	3	3
42	4	5	6	6	5	4	2	5	4	4
43	5	6	6	4	4	5	3	5	5	5
44	6	5	5	5	4	4	4	4	6	6
45	6	4	4	3	4	5	5	5	6	4
46	3	5	5	4	3	5	6	5	5	5
47	4	4	5	4	4	6	6	5	5	4
48	4	5	4	4	5	6	5	5	3	4
49	3	5	4	5	5	6	4	4	4	3
50	4	4	5	6	6	3	3	5	4	4
5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	5	5	5	5	5	4	4	5	3	4
52	5	5	6	5	3	3	5	4	4	4
53	5	5	5	4	3	4	3	5	5	5
54	4	6	3	5	3	3	4	6	5	5
55	5	5	4	5	4	4	4	6	5	5
56	5	3	2	5	4	5	5	6	4	4
57	4	3	3	5	5	6	5	5	4	2
58	5	4	4	5	4	4	4	5	3	3
59	4	5	5	6	5	5	5	6	2	4
60	5	3	6	6	4	4	5	5	3	3
61	4	4	5	5	4	4	4	4	4	4
62	5	5	4	6	4	4	4	5	5	5
63	6	3	5	5	4	5	4	6	5	6
64	5	4	3	4	5	4	5	5	5	4
65	3	4	4	5	5	5	6	5	5	3
66	3	4	5	5	4	5	5	4	4	4
67	4	3	6	6	5	5	5	3	3	4
68	4	3	4	6	5	5	4	3	4	4
69	4	4	5	6	5	5	3	4	4	5
70	5	5	5	5	4	5	3	3	5	5
71	5	4	6	4	5	4	4	4	5	6
72	6	5	4	4	3	2	4	5	6	5
73	4	5	5	4	4	3	5	6	6	4
74	4	4	5	5	5	4	5	5	5	5
75	3	4	5	3	6	5	4	4	4	5
76	4	4	5	4	6	6	5	4	5	4
77	5	5	5	5	6	4	4	5	5	5
78	5	6	6	6	5	4	4	4	4	4
79	5	5	7	4	4	4	4	5	5	4
80	4	6	5	5	4	3	4	5	6	5
81	5	6	4	3	4	4	5	5	6	5
82	5	5	4	4	5	5	5	4	6	5
83	4	4	3	4	5	5	5	5	5	4
84	5	3	3	4	5	6	6	5	5	3
85	5	4	4	5	5	5	5	5	4	[illegible]
86	5	5	5	6	6	5	5	5	3	[illegible]
87	4	4	6	5	5	4	5	4	4	[illegible]
88	5	5	4	5	2	4	4	3	[illegible]	[illegible]
89	6	5	5	4	3	5	5	4	4	[illegible]
90	6	4	5	4	4	6	5	5	5	[illegible]
91	5	4	4	5	3	4	5	6	5	[illegible]
92	4	4	4	4	4	5	6	6	4	4
93	4	3	4	5	5	6	6	5	4	4
94	5	4	4	3	6	6	6	4	4	5
95	5	4	5	4	6	5	5	4	4	5
96	2	5	5	5	3	5	4	4	2	4
97	3	4	6	5	4	4	3	4	3	[illegible]
98	4	5	6	5	5	5	4	5	4	5
99	4	5	4	4	4	3	5	5	5	[illegible]
100	5	4	5	4	4	4	4	5	5	[illegible]
5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	4	4	3	5	6	5	5	5	5	51	5	6	6	5	4	4	4	3	4	4	1	4	4	4	4	6	6	6	5	5	4	51	4	5	5	5	4	5	4	4	5	5
2	5	4	3	4	5	5	5	5	5	4	52	6	5	3	3	4	4	4	4	4	5	2	5	3	2	5	6	6	4	4	4	5	52	5	6	4	3	4	3	3	5	5	5
3	4	3	4	4	6	5	5	5	4	3	53	5	4	4	4	4	3	4	5	5	5	3	5	4	3	5	5	5	4	5	4	3	53	6	3	5	4	3	4	4	6	5	5
4	4	4	5	5	5	5	5	4	4	3	54	5	3	4	5	4	4	5	6	5	5	4	5	5	4	5	6	4	4	5	3	4	54	5	4	4	4	4	5	5	6	5	6
5	4	5	6	6	5	5	5	3	3	4	55	5	4	5	5	4	5	4	6	5	5	5	5	6	5	5	5	5	4	4	4	5	55	5	3	5	4	5	6	5	5	4	5
6	5	6	6	5	4	5	6	4	4	5	56	3	3	3	5	5	6	5	3	3	4	6	5	5	5	5	4	3	5	5	5	6	56	3	4	4	5	5	5	5	4	4	4
7	6	6	4	5	5	5	4	5	4	6	57	4	4	4	3	5	5	4	4	3	3	7	6	5	5	5	5	4	5	5	5	4	57	4	4	5	4	6	5	2	5	4	4
8	4	5	4	3	3	5	4	5	5	5	58	5	5	4	4	5	5	4	3	4	4	8	5	5	4	4	4	5	5	5	5	5	58	5	5	5	5	4	5	3	4	5	4
9	5	4	4	4	4	3	5	6	6	5	59	5	6	5	5	5	4	5	4	1	5	9	5	3	5	4	5	4	4	6	4	5	59	5	6	5	5	5	4	4	5	2	5
10	5	4	4	5	5	4	5	5	5	5	60	5	4	4	4	3	3	5	5	2	4	10	5	2	3	5	6	5	5	5	4	4	60	6	5	5	4	4	2	4	6	3	5
11	4	4	5	5	5	5	6	6	4	4	61	5	5	5	5	4	2	5	4	3	5	11	3	3	4	5	6	6	5	4	5	4	61	5	4	5	5	4	3	5	4	4	6
12	4	3	5	4	6	4	5	4	4	4	62	4	4	5	4	3	3	5	5	4	6	12	4	4	5	5	6	5	5	4	4	4	62	5	4	3	5	4	4	6	5	5	4
13	4	4	5	5	6	5	4	4	4	3	63	5	4	5	4	4	4	4	6	5	5	13	5	5	6	6	4	5	5	3	5	4	63	5	2	4	5	5	5	5	6	5	5
14	5	5	6	6	5	5	4	4	3	4	64	4	4	3	4	5	5	5	4	4	5	14	4	6	6	5	5	4	4	3	3	5	64	4	3	4	4	6	6	6	5	4	4
15	5	6	5	4	6	4	4	5	4	4	65	4	4	4	4	4	6	5	5	4	3	15	5	5	5	4	4	5	3	4	4	5	65	4	4	5	4	5	6	3	4	5	4
16	5	6	4	4	4	4	5	4	5	5	66	4	5	4	5	5	6	4	3	5	3	16	5	6	3	4	4	4	4	4	5	5	66	5	4	3	5	5	6	4	4	4	4
17	5	5	3	5	5	4	4	5	6	6	67	4	3	5	5	5	5	5	4	2	4	17	6	4	4	4	5	4	5	5	5	6	67	5	4	4	6	6	5	4	5	3	4
18	5	4	4	5	3	3	4	5	6	5	68	4	4	5	5	4	4	3	4	3	4	18	6	3	4	4	3	4	5	6	5	4	68	5	5	4	4	5	3	4	4	4	5
19	4	2	5	4	4	4	5	5	3	5	69	5	5	6	3	3	3	3	4	4	5	19	4	3	4	5	4	5	6	5	4	4	69	5	5	5	4	4	3	4	3	5	6
20	5	3	4	3	5	5	6	5	4	4	70	5	5	6	4	4	4	4	4	5	6	20	5	4	5	4	5	6	5	5	5	5	70	6	5	4	3	5	4	4	4	6	5
21	3	4	4	4	4	5	5	5	5	4	71	6	5	3	3	5	5	5	5	5	5	21	4	5	5	5	5	5	4	3	5	5	71	5	3	4	2	2	5	5	5	6	5
22	4	3	5	5	5	5	5	5	4	5	72	5	5	3	4	4	3	5	5	5	4	22	3	4	6	5	6	5	3	4	4	4	72	4	4	4	3	3	4	6	6	5	3
23	5	4	6	5	5	5	5	5	5	2	73	5	3	4	5	5	4	6	6	5	3	23	4	5	5	5	5	4	4	5	5	3	73	3	4	5	4	4	5	4	5	3	4
24	4	5	5	5	5	4	4	5	3	3	74	4	4	5	5	5	5	5	4	5	4	24	5	6	4	5	5	5	3	5	4	4	74	4	3	4	5	5	6	5	4	4	5
25	5	4	4	4	3	5	3	4	4	4	75	3	2	6	4	6	6	5	5	3	5	25	6	5	5	4	4	4	4	5	5	5	75	2	3	5	5	6	3	3	5	4	5
26	6	5	5	5	4	4	4	5	5	5	76	4	3	6	5	5	5	4	4	4	5	26	6	4	5	3	4	4	5	6	6	5	76	3	4	5	5	6	4	4	3	5	5
27	4	3	4	4	3	5	5	5	4	6	77	5	4	6	4	4	4	4	3	5	4	27	5	4	3	3	4	5	6	5	5	5	77	4	5	5	5	4	4	4	4	5	5
28	5	4	4	4	4	5	6	5	5	5	78	6	5	5	5	5	5	4	4	4	5	28	4	5	4	4	5	6	6	4	5	4	78	5	5	4	4	4	4	5	4	4	6
29	4	3	4	5	5	5	6	4	5	4	79	6	6	4	4	5	5	4	5	5	4	29	4	4	3	5	5	6	5	4	5	4	79	6	4	5	3	3	4	4	5	5	5
30	5	4	5	5	5	6	5	5	4	4	80	5	5	4	4	4	4	5	5	6	5	30	4	5	4	4	6	6	4	5	5	4	80	5	4	4	4	4	5	5	5	5	4
31	5	4	4	6	6	5	3	5	3	3	81	5	4	4	4	5	5	5	6	4	4	31	5	5	5	4	6	4	4	5	4	3	81	4	4	5	4	4	5	5	6	4	5
32	5	5	5	5	5	4	4	4	2	4	82	3	4	4	4	4	4	5	5	5	4	32	5	6	5	5	4	5	4	5	3	4	82	4	4	4	5	4	5	6	3	4	5
33	6	5	5	5	4	4	4	4	3	5	83	4	3	4	4	5	5	6	4	4	5	33	6	6	6	5	5	4	4	5	4	5	83	3	3	5	5	5	4	4	4	3	3
34	6	5	5	5	3	5	4	4	4	4	84	3	4	4	4	6	6	5	4	4	2	34	6	4	4	4	4	4	4	5	5	5	84	4	4	5	5	5	5	3	4	4	3
35	5	4	5	3	4	5	5	5	5	5	85	4	5	5	5	5	4	4	4	4	3	35	4	5	3	4	3	3	5	6	6	5	85	5	5	6	6	4	4	3	4	5	4
36	6	5	5	3	5	4	3	6	6	5	86	5	4	6	6	6	5	3	5	2	4	36	5	4	4	4	4	4	4	5	5	5	86	4	5	5	5	5	4	4	5	3	5
37	3	4	4	4	5	5	4	4	5	4	87	5	5	5	5	4	3	3	5	3	3	37	4	3	4	5	5	5	5	5	5	4	87	5	5	5	4	4	3	3	6	4	4
38	3	5	5	4	6	6	5	5	5	5	88	5	6	5	5	3	3	4	4	4	4	38	4	3	4	5	6	5	5	5	4	5	88	6	5	3	5	4	2	4	5	4	5
39	4	4	3	5	4	5	4	5	4	4	89	5	5	5	4	4	4	4	5	5	5	39	5	3	4	5	5	5	4	4	3	4	89	5	4	4	5	5	3	5	6	5	5
40	3	5	4	6	5	5	5	5	2	4	90	4	4	5	5	5	5	5	6	6	5	40	4	4	5	6	5	5	5	4	3	5	90	4	3	3	4	5	4	6	4	5	5
41	4	5	5	5	5	5	2	5	3	4	91	5	4	4	3	4	3	6	5	4	6	41	5	5	5	4	5	5	3	4	4	5	91	4	4	3	4	5	4	5	4	4	4
42	5	6	5	4	4	5	3	5	4	5	92	4	5	4	4	5	4	6	5	5	3	42	6	5	5	5	5	4	4	5	5	5	92	5	5	4	5	6	5	4	5	3	4
43	5	5	5	4	5	4	4	5	5	6	93	5	4	2	5	6	5	5	4	5	4	43	5	4	4	4	4	4	4	5	5	6	93	3	5	3	5	5	5	4	4	4	5
44	6	5	2	2	5	5	4	5	6	4	94	5	4	3	4	4	4	4	4	3	5	44	5	5	3	3	5	5	5	6	6	5	94	4	5	4	5	5	5	4	5	4	5
45	4	5	3	3	4	4	5	5	6	5	95	5	5	4	5	5	4	4	5	4	4	45	5	4	4	4	4	3	6	6	6	4	95	5	5	5	5	4	4	4	5	4	4
46	4	3	4	4	4	5	5	6	4	4	96	3	6	5	4	4	4	4	5	3	5	46	5	4	4	5	5	4	5	5	4	5	96	4	6	4	5	3	3	5	4	4	5
47	4	4	4	4	5	6	5	6	4	5	97	4	5	6	4	4	5	4	5	4	6	47	4	4	4	5	6	5	5	4	3	4	97	5	5	5	4	4	4	5	5	5	5
48	2	4	5	5	5	6	6	5	3	5	98	5	5	4	4	4	5	5	5	5	5	48	3	4	5	6	6	4	5	4	4	5	98	4	4	4	3	3	5	5	5	6	4
49	3	4	5	6	4	4	3	5	4	4	99	5	5	4	4	4	4	6	6	5	5	49	4	5	5	5	5	5	4	4	4	5	99	4	4	4	4	4	4	6	5	5	4
50	4	5	5	5	5	4	4	2	5	3	100	5	3	3	4	5	5	4	6	6	4	50	5	5	6	5	3	5	4	3	4	4	100	4	3	3	5	5	5	4	4	4	1
6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

II. 49

8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	4	4	5	6	6	5	3	4	5
2	3	4	3	5	5	4	4	3	3	4
3	4	5	4	5	5	5	3	4	3	4
4	5	5	5	4	4	3	4	3	4	5
5	6	5	5	5	4	4	4	4	5	5
6	5	6	4	5	3	4	5	4	5	4
7	5	5	5	4	3	5	5	5	6	5
8	2	4	4	5	3	6	6	5	4	5
9	3	4	5	4	4	5	5	4	5	5
10	4	3	4	5	5	5	5	4	4	5
11	4	4	5	6	6	4	4	5	4	4
12	5	4	5	5	5	2	4	3	5	5
13	5	5	6	5	3	3	5	4	5	5
14	5	5	5	4	4	4	3	4	4	5
15	6	5	5	3	4	5	4	4	5	6
16	3	5	2	3	4	5	5	5	5	5
17	4	5	3	3	5	4	5	5	6	4
18	4	4	4	4	4	5	5	5	5	4
19	4	4	3	4	5	5	4	6	4	3
20	4	4	4	4	6	3	5	4	4	4
21	3	5	5	5	4	4	4	4	4	3
22	4	5	5	5	5	5	4	5	4	4
23	5	5	5	4	5	5	4	5	5	4
24	4	5	3	4	4	5	4	5	5	5
25	5	2	4	4	5	5	5	6	6	4
26	5	3	4	4	5	5	5	6	4	5
27	2	4	4	4	5	6	5	5	4	4
28	3	3	5	5	5	4	6	3	4	4
29	2	4	4	6	5	5	4	2	4	4
30	3	5	5	5	5	5	4	3	4	3
31	4	6	5	5	5	4	3	4	5	4
32	5	6	3	5	3	4	4	5	4	5
33	6	3	4	5	4	3	5	5	4	5
34	6	4	4	5	4	4	5	6	5	5
35	3	5	4	5	4	3	6	6	5	5
36	4	4	5	5	4	4	5	4	5	5
37	3	4	4	6	5	5	3	3	4	5
38	4	4	5	5	6	4	4	4	3	4
39	5	4	5	6	5	3	4	4	4	5
40	5	5	4	6	4	4	3	5	4	5
41	6	4	5	3	3	3	4	5	5	6
42	4	5	5	4	4	4	5	5	6	5
43	4	5	3	2	4	4	5	6	6	6
44	5	5	4	3	5	5	6	4	6	4
45	4	4	3	4	5	4	4	4	5	3
46	5	4	4	5	6	5	5	5	4	4
47	4	4	5	5	6	4	5	5	4	3
48	4	5	5	6	4	5	4	5	5	4
49	5	5	6	4	4	4	5	4	5	5
50	6	4	3	5	4	5	5	4	5	5
8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	5	5	4	3	5	5	3	4	6	5
52	6	3	5	3	5	4	4	5	5	5
53	5	4	4	4	4	5	5	5	4	4
54	3	3	3	5	5	4	6	5	3	5
55	4	4	4	5	5	5	6	4	3	4
56	3	5	3	6	5	6	5	3	4	5
57	4	4	4	4	5	4	3	4	4	4
58	5	5	4	5	5	4	4	3	5	5
59	5	6	4	4	4	3	4	4	3	6
60	5	4	5	4	5	3	4	5	4	5
61	6	5	5	5	4	4	5	5	5	4
62	4	4	4	5	5	4	5	4	4	5
63	4	3	5	5	5	5	5	5	3	4
64	2	4	4	4	6	6	4	4	4	5
65	3	5	5	5	5	5	4	4	4	5
66	4	5	4	5	4	4	4	4	4	5
67	5	5	5	5	5	4	4	5	4	5
68	5	5	5	4	3	3	5	4	5	6
69	6	3	6	3	4	4	5	4	5	5
70	5	4	4	3	4	5	5	5	5	5
71	5	3	5	3	3	6	6	5	4	5
72	3	4	4	3	4	5	5	5	5	4
73	4	5	5	4	5	5	5	5	4	5
74	5	4	4	5	5	5	5	5	5	4
75	3	4	5	4	5	4	4	4	5	5
76	4	5	6	5	4	2	5	4	4	6
77	5	4	4	4	4	3	5	5	5	6
78	6	5	5	4	3	4	4	5	4	5
79	6	4	4	4	4	5	5	5	5	4
80	4	5	3	4	5	5	6	6	5	4
81	3	4	4	4	5	5	4	4	4	5
82	4	4	5	5	5	6	5	4	4	5
83	4	4	4	5	6	5	4	4	4	4
84	5	5	5	5	4	3	4	4	4	4
85	4	5	5	4	5	4	4	4	5	4
86	5	6	5	3	4	4	3	5	4	5
87	4	4	5	4	5	2	4	6	5	5
88	5	4	2	5	5	3	5	4	5	3
89	4	3	3	5	5	4	5	5	5	4
90	5	2	4	5	3	5	6	5	4	4
91	3	3	4	5	4	5	5	5	3	5
92	4	2	5	6	5	4	5	3	4	5
93	3	3	4	5	5	4	4	3	5	5
94	4	4	4	4	3	5	4	4	5	4
95	5	5	5	4	4	3	4	5	5	5
96	5	4	3	4	4	4	5	5	5	4
97	4	4	4	4	4	4	6	6	5	5
98	5	3	4	4	4	5	6	6	4	5
99	4	4	5	4	5	4	5	6	4	5
100	3	3	4	5	5	5	5	3	4	2
8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	4	5	6	5	5	4	4	4	4
2	4	5	4	6	4	4	3	4	4	5
3	5	6	5	4	4	5	2	4	4	5
4	5	5	4	4	5	3	2	4	5	6
5	6	5	5	3	5	4	3	5	6	5
6	4	5	4	4	4	5	4	5	5	4
7	5	4	2	3	4	6	5	6	5	3
8	3	5	3	4	4	5	5	5	4	4
9	2	5	4	5	5	6	5	4	4	4
10	3	4	5	6	5	4	4	4	5	4
11	4	5	5	5	5	3	3	4	5	4
12	5	5	5	4	4	3	3	4	4	5
13	6	4	4	4	3	4	4	5	5	5
14	5	5	4	4	4	4	4	5	5	5
15	4	4	3	3	4	5	4	5	5	4
16	4	5	3	3	4	6	5	5	5	5
17	3	5	4	4	5	5	6	4	4	4
18	4	5	5	5	5	5	5	5	4	3
19	4	5	4	5	6	4	3	3	3	4
20	5	3	5	5	5	4	4	4	3	3
21	4	4	5	5	4	3	5	5	4	4
22	5	5	5	5	4	4	5	5	5	5
23	5	5	4	4	3	3	5	5	6	5
24	3	5	4	4	4	4	5	6	5	5
25	4	3	3	2	5	5	5	5	4	4
26	5	4	4	3	4	6	6	5	2	4
27	3	5	5	4	5	5	4	4	3	4
28	4	4	6	5	5	5	5	2	4	2
29	3	5	5	5	5	4	4	3	5	3
30	4	6	6	5	4	5	3	4	5	4
31	5	5	5	2	4	4	3	4	5	5
32	4	6	4	3	4	4	4	4	5	6
33	5	4	4	3	4	4	5	5	5	5
34	6	3	3	4	5	5	6	6	3	4
35	4	4	4	4	5	4	5	5	4	4
36	3	4	5	4	5	4	4	3	5	3
37	3	4	5	5	5	5	4	4	3	4
38	4	5	5	5	5	4	4	3	4	5
39	5	5	6	3	5	4	4	4	5	6
40	5	5	4	4	4	5	4	5	5	6
41	6	5	3	4	4	3	5	6	6	6
42	5	4	4	4	4	4	5	4	4	5
43	5	4	4	3	5	5	6	5	3	5
44	4	5	5	4	5	5	5	4	4	3
45	4	4	4	5	6	5	5	5	4	4
46	4	4	5	6	6	5	4	4	4	3
47	4	4	6	4	6	3	4	5	4	3
48	5	5	5	5	5	4	4	5	5	4
49	5	4	4	5	4	4	5	4	4	5
50	5	5	4	4	3	3	4	5	5	5
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	4	5	5	4	4	4	4	5	4	3
52	4	4	4	3	5	5	5	5	5	4
53	4	5	4	4	4	6	6	4	3	5
54	4	4	4	5	5	5	5	5	3	4
55	4	5	5	5	6	4	5	3	4	3
56	2	6	4	6	3	5	5	4	4	4
57	3	5	5	5	4	5	4	3	5	5
58	4	6	5	3	3	4	4	4	6	5
59	5	6	4	4	4	4	4	5	4	4
60	5	5	5	3	5	4	5	6	5	4
61	5	4	1	4	5	5	5	5	4	5
62	5	4	2	5	6	5	6	5	4	4
63	4	4	3	5	4	4	5	4	4	4
64	3	5	4	5	4	5	5	5	4	5
65	4	5	5	5	5	5	5	4	5	5
66	5	6	5	4	4	5	4	4	4	4
67	6	6	5	4	5	4	3	5	5	5
68	6	6	4	4	4	3	3	5	6	4
69	5	4	2	4	5	4	4	5	5	5
70	4	4	3	4	5	5	5	6	4	4
71	4	4	3	4	4	5	6	5	5	4
72	3	5	3	4	5	6	4	4	4	5
73	3	5	4	5	5	6	5	2	5	4
74	4	5	5	5	5	4	3	3	5	4
75	4	5	6	4	5	4	4	4	5	5
76	5	5	5	5	5	3	4	5	5	5
77	6	5	3	5	2	4	5	6	6	6
78	5	4	4	5	3	5	5	6	5	4
79	4	5	4	4	4	6	5	5	5	4
80	4	5	4	4	5	6	5	5	4	5
81	4	3	5	5	5	4	5	3	4	5
82	5	4	6	6	6	5	4	4	4	4
83	3	5	5	5	4	4	4	4	4	5
84	4	4	6	5	5	3	5	4	4	4
85	5	5	4	3	3	4	5	3	5	5
86	5	5	5	2	4	5	4	4	5	5
87	5	5	5	3	4	3	5	5	5	5
88	3	5	2	4	4	4	5	5	5	4
89	4	4	3	3	5	5	6	4	5	5
90	5	3	4	4	4	5	5	5	3	[illegible]
91	4	4	5	5	5	5	5	5	4	5
92	5	3	6	6	5	4	5	3	5	5
93	4	4	5	4	4	5	3	4	4	4
94	5	5	5	3	3	5	4	5	5	5
95	6	5	5	3	4	4	4	5	6	5
96	4	5	3	4	5	5	5	5	6	5
97	5	4	4	4	4	5	6	5	4	4
98	4	4	4	5	5	6	6	6	3	3
99	3	3	4	3	6	5	5	4	4	4
100	4	4	5	4	4	4	4	3	5	3
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	5	5	5	3	4	4	4	4	4
2	5	6	5	5	4	3	4	3	5	5
3	6	5	6	5	4	4	3	4	4	5
4	6	5	5	3	4	4	3	5	5	5
5	5	5	3	4	5	5	4	5	5	5
6	4	4	3	4	5	5	5	5	5	4
7	5	5	3	4	5	6	6	5	5	4
8	4	5	4	5	5	6	4	5	3	5
9	3	5	5	5	4	5	5	3	3	4
10	4	5	6	5	4	4	4	4	4	4
11	4	6	6	5	5	4	4	5	4	5
12	5	5	5	4	5	4	4	2	5	5
13	6	5	4	4	3	4	5	3	6	4
14	5	4	4	5	4	4	4	4	5	5
15	4	3	3	3	5	5	5	5	6	4
16	3	3	4	4	4	5	5	4	4	5
17	3	4	5	5	5	5	4	3	4	5
18	4	4	4	6	5	5	5	4	5	4
19	4	5	5	4	4	5	3	3	4	5
20	5	4	6	5	5	4	4	3	4	4
21	5	5	5	5	4	4	5	4	5	5
22	5	5	4	3	4	5	5	5	6	5
23	4	4	4	4	4	4	6	6	6	5
24	4	4	3	5	5	5	6	5	5	5
25	4	3	4	3	6	6	5	4	4	4
26	5	4	3	4	5	4	5	4	3	3
27	4	5	4	5	5	5	4	4	4	4
28	5	4	5	6	4	4	4	3	4	3
29	4	5	5	5	4	4	4	4	5	4
30	5	6	5	4	4	4	4	4	5	5
31	5	4	4	3	4	4	4	5	5	5
32	4	5	4	3	4	5	5	4	6	5
33	4	4	4	3	5	5	5	5	5	4
34	4	4	2	4	5	5	5	5	4	3
35	4	4	3	4	6	5	5	5	4	3
36	4	4	4	5	5	5	4	4	4	3
37	4	5	5	5	5	5	4	3	3	4
38	5	6	6	3	5	3	4	4	4	5
39	6	5	5	4	5	4	5	3	5	6
40	5	5	3	3	3	3	5	4	4	5
41	5	4	4	4	4	4	4	5	5	5
42	3	4	3	4	4	5	5	5	4	4
43	4	4	4	4	5	6	5	5	4	4
44	4	3	5	5	5	5	5	2	4	4
45	4	4	5	6	6	5	5	2	4	5
46	5	5	6	4	5	4	4	3	3	4
47	5	5	6	5	4	4	4	4	4	4
48	5	5	4	4	4	4	1	5	4	5
49	6	5	5	4	5	4	2	5	5	6
50	4	5	4	5	3	4	3	6	4	4
10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	5	5	4	4	4	5	4	5	5	4
52	5	4	4	4	5	6	5	3	4	4
53	3	5	4	5	4	5	5	3	4	4
54	3	5	5	5	5	4	5	4	4	5
55	4	5	6	4	5	3	5	4	5	2
56	3	6	5	5	4	4	2	4	5	3
57	4	5	6	5	3	5	3	4	5	4
58	5	5	4	4	4	4	4	5	5	5
59	4	5	5	3	4	5	5	5	5	5
60	3	4	5	4	5	5	6	4	5	3
61	4	5	2	5	5	5	6	4	5	3
62	4	4	3	4	6	5	3	5	4	4
63	5	4	4	5	4	4	4	5	5	3
64	4	5	5	6	5	5	3	4	2	4
65	5	6	5	4	4	4	4	4	3	5
66	6	6	5	4	5	4	4	4	4	5
67	5	4	4	4	4	4	4	5	5	5
68	4	5	5	4	4	4	4	5	6	4
69	4	3	3	5	5	4	5	5	3	4
70	4	4	4	5	6	5	4	5	3	5
71	3	4	3	5	5	5	5	3	4	4
72	4	5	4	5	5	4	4	3	3	5
73	4	6	5	5	5	5	4	2	4	5
74	5	6	6	5	5	5	4	3	5	5
75	5	5	5	5	5	4	2	4	5	5
76	4	5	4	5	5	4	3	3	6	4
77	5	4	4	5	3	3	4	4	4	5
78	5	4	4	5	4	4	5	5	4	5
79	4	4	4	4	5	5	5	4	5	5
80	4	4	5	5	5	5	4	4	4	5
81	4	4	6	6	6	5	4	3	4	5
82	5	5	5	5	5	4	5	4	5	3
83	4	6	6	5	5	4	3	4	4	4
84	5	5	5	5	4	4	4	3	5	5
85	5	4	3	4	3	4	5	4	5	5
86	5	4	4	3	4	5	5	5	5	6
87	4	4	4	3	4	4	4	4	6	4
88	4	5	3	4	5	5	5	5	5	4
89	4	4	4	3	6	6	4	4	5	2
90	5	4	4	4	5	5	5	5	4	3
91	5	5	5	5	5	4	4	5	3	2
92	5	4	5	5	5	2	5	4	4	3
93	5	5	4	5	4	3	4	4	5	4
94	6	4	4	4	4	4	5	5	5	4
95	5	5	5	4	5	5	5	5	6	4
96	4	4	4	4	5	5	6	5	4	5
97	4	2	4	4	5	6	5	4	4	3
98	4	3	3	5	6	6	5	4	3	4
99	4	4	4	4	6	5	5	4	4	3
100	4	5	5	5	5	3	5	3	5	4
10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	5	5	5	4	3	4	4	3	5
2	5	6	6	5	3	3	4	4	4	6
3	5	5	5	4	4	3	4	5	5	5
4	6	3	5	4	3	4	4	5	5	6
5	4	4	3	5	4	4	5	5	5	4
6	5	5	3	4	5	5	5	5	6	5
7	4	4	3	5	5	5	4	5	4	4
8	5	5	4	6	5	4	5	4	4	4
9	4	5	5	5	5	4	5	4	4	5
10	5	5	5	5	4	4	4	5	4	4
11	5	6	5	5	5	4	5	4	5	5
12	6	4	4	4	4	4	5	3	5	6
13	5	4	4	5	4	4	5	4	6	5
14	4	3	4	5	5	4	5	5	5	4
15	5	4	4	4	6	5	5	6	5	5
16	3	3	5	5	5	5	4	4	4	4
17	4	4	6	4	6	5	5	4	4	5
18	3	4	5	5	5	5	4	3	5	5
19	3	4	6	5	5	5	4	4	5	6
20	4	5	5	3	5	4	4	3	5	5
21	5	5	4	3	4	5	5	4	6	6
22	5	4	4	4	4	3	5	5	6	5
23	4	4	5	4	4	4	5	5	5	3
24	4	4	3	5	5	5	5	5	5	4
25	4	4	4	4	5	5	4	5	5	3
26	4	5	4	5	5	5	4	4	4	4
27	4	4	5	6	5	4	4	4	4	5
28	5	5	5	4	5	3	4	3	4	4
29	5	5	4	4	4	4	4	4	5	5
30	5	4	5	4	4	4	5	5	6	6
31	5	4	4	3	4	4	4	6	6	4
32	3	5	4	3	5	5	5	4	4	5
33	4	5	4	4	6	5	5	5	4	4
34	5	5	3	3	6	6	5	5	5	4
35	4	5	4	4	6	5	4	5	5	4
36	5	5	5	5	6	4	5	4	3	4
37	5	6	5	5	5	4	5	4	4	5
38	5	5	4	4	4	4	5	4	5	6
39	6	5	4	4	3	5	5	4	6	5
40	4	5	4	4	4	4	6	5	5	6
41	5	4	4	5	3	5	4	5	5	5
42	4	4	4	4	4	6	5	6	5	5
43	4	4	5	5	5	6	5	5	4	4
44	4	4	5	5	6	4	5	3	4	4
45	4	5	6	6	4	5	5	3	4	5
46	4	5	5	5	4	4	4	4	4	5
47	5	5	5	4	4	4	4	4	5	5
48	5	5	4	4	4	4	2	4	5	5
49	6	5	4	4	4	4	3	5	6	6
50	4	4	5	5	4	4	4	5	5	4
11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

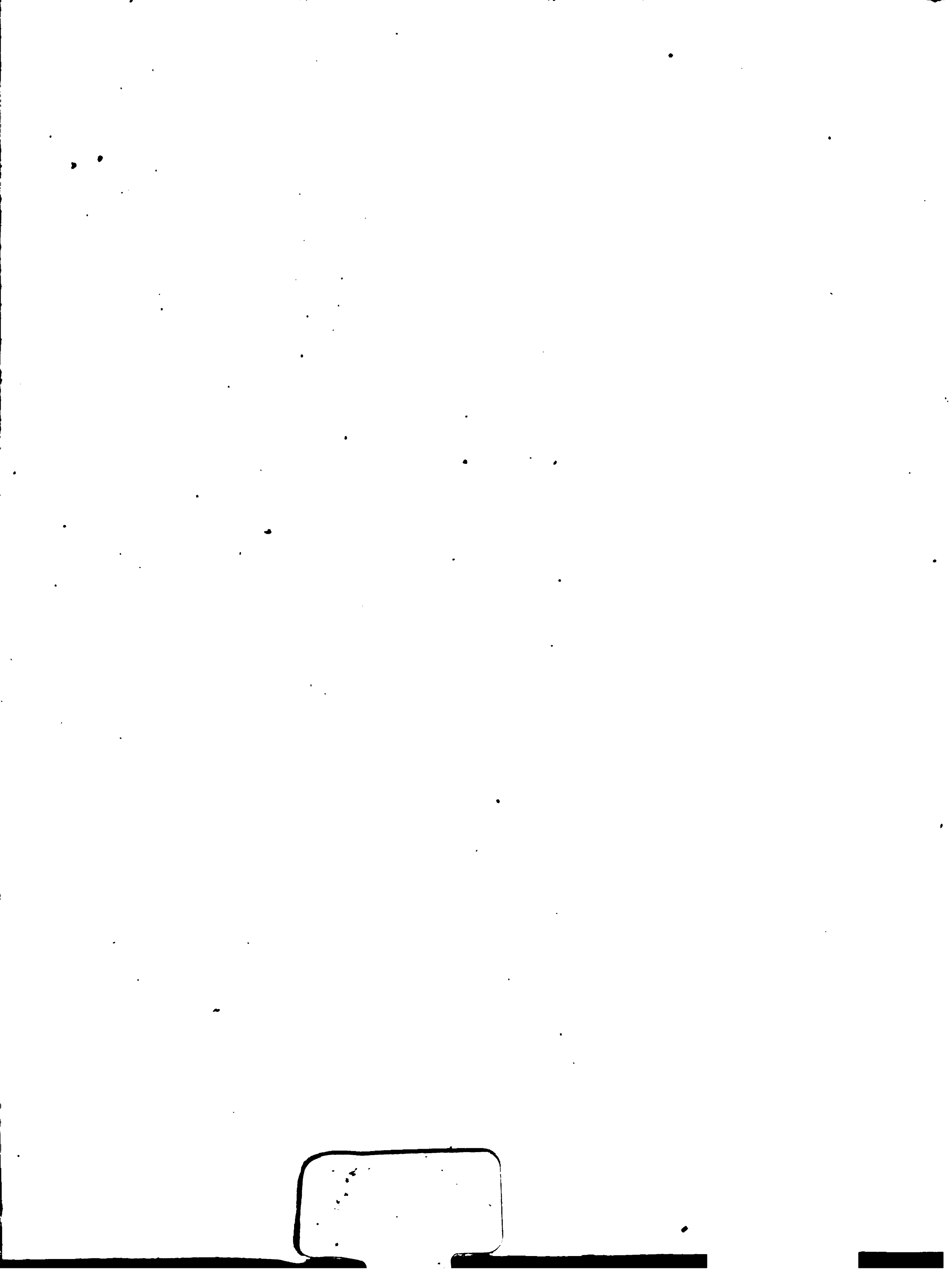
11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	4	4	4	5	5	5	5	5	5	3
52	4	4	5	5	6	5	5	4	5	4
53	3	5	3	6	5	5	4	3	4	4
54	4	5	4	5	5	3	5	4	5	4
55	3	6	5	5	5	4	4	4	5	3
56	4	5	3	5	3	5	3	5	5	4
57	5	3	3	5	4	4	4	5	5	5
58	5	4	4	4	2	5	5	6	6	5
59	3	5	3	4	3	6	6	5	5	4
60	4	2	4	5	4	6	5	5	5	4
61	4	3	3	4	5	6	5	4	5	4
62	4	4	4	4	5	4	4	5	5	3
63	4	5	5	5	5	5	3	5	4	4
64	5	6	4	5	4	4	2	5	3	5
65	6	4	4	5	5	3	3	4	4	6
66	5	5	5	5	3	4	4	5	5	6
67	4	5	4	5	3	3	5	6	6	5
68	5	3	5	5	4	4	5	4	6	4
69	4	4	4	5	4	5	4	4	4	4
70	5	5	4	5	5	5	5	4	4	3
71	4	3	4	6	6	4	4	4	4	4
72	5	4	5	6	4	5	3	2	4	5
73	5	5	5	4	3	4	4	3	5	6
74	6	4	6	5	3	5	3	4	5	5
75	5	5	4	2	4	4	3	5	6	6
76	5	4	5	3	5	5	4	4	6	5
77	5	4	4	2	4	4	4	5	5	5
78	5	4	4	3	5	5	5	5	4	4
79	5	4	4	4	6	5	4	5	4	2
80	3	4	4	5	5	6	4	3	3	3
81	4	5	5	4	4	4	5	4	4	4
82	4	5	4	4	4	4	4	4	5	4
83	4	5	4	3	4	3	4	4	5	5
84	5	4	4	4	5	4	3	4	6	5
85	4	4	3	3	3	5	4	5	5	4
86	4	4	4	4	4	4	5	6	4	4
87	3	3	5	4	5	5	5	5	3	3
88	3	4	4	5	5	6	5	4	4	3
89	4	4	5	4	5	5	4	3	3	3
90	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4
91	5	5	5	4	5	3	3	5	4	3
92	6	5	5	5	6	3	4	4	5	4
93	5	5	4	4	4	3	5	5	5	4
94	5	5	5	5	4	4	5	5	5	5
95	4	4	5	4	5	5	5	5	4	4
96	4	5	4	4	5	4	5	5	5	4
97	5	3	5	5	6	5	5	4	3	4
98	5	4	3	4	5	4	5	5	4	5
99	5	5	4	5	5	4	4	3	5	4
100	5	6	5	5	3	4	5	3	4	5
11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tabelle für die Zahlen bis 12000, [illegible]

1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1	2	1064	3059	5642	8512	3	359	731	1073	1464	1880	2287	2726	3060	3466	3871	[illegible]
8	9	1072	3087	5824	8576	10	368	736	1080	1466	1890	2288	2729	3067	3472	3888	[illegible]
27	16	1125	3197	5833	8587	17	371	738	1088	1468	1907	2304	2736	3071	3474	3895	[illegible]
64	28	1216	3256	5840	8729	24	375	745	1091	1483	1917	2323	2746	3085	3481	3914	[illegible]
125	35	1241	3376	5859	9000	29	378	750	1099	1485	1945	2325	2753	3086	3483	3926	[illegible]
216	54	1332	3383	5896	9009	36	397	755	1126	1513	1952	2330	2755	3088	3501	3933	[illegible]
343	65	1339	3402	5913	9056	43	405	757	1128	1520	1968	2332	2756	3095	3503	3934	[illegible]
512	72	1343	3439	5957	9207	55	408	762	1133	1522	1970	2339	2760	3114	3508	3951	[illegible]
729	91	1358	3456	6048	9262	62	415	764	1136	1536	1971	2343	2772	3123	3520	3952	[illegible]
1000	126	1395	3473	6119	9269	66	433	775	1149	1539	1978	2349	2773	3142	3527	3960	[illegible]
1331	128	1456	3500	6175	9288	73	434	783	1152	1548	2001	2355	2779	3151	3529	3968	[illegible]
1728	133	1458	3528	6244	9325	80	440	792	1161	1555	2008	2358	2787	3174	3536	3985	[illegible]
2197	152	1512	3591	6293	9331	81	459	794	1189	1559	2017	2365	2789	3176	3537	3989	[illegible]
2744	189	1547	3718	6344	9386	92	466	801	1197	1574	2024	2386	2792	3184	3540	3993	[illegible]
3375	217	1674	3744	6561	9477	99	469	811	1198	1576	2027	2395	2798	3186	3555	4012	[illegible]
4096	224	1729	3887	6641	9603	118	471	820	1217	1581	2059	2403	2800	3198	3564	4040	[illegible]
4913	243	1736	3925	6750	9604	127	476	853	1224	1583	2061	2414	2809	3205	3571	4050	[illegible]
5832	250	1755	4075	6832	9728	129	495	856	1240	1584	2064	2421	2816	3212	3581	4059	[illegible]
6859	280	1792	4097	6840	9773	134	496	857	1242	1611	2068	2440	2834	3221	3592	4061	[illegible]
8000	341	1843	4104	6860	9826	136	514	862	1243	1637	2069	2447	2835	3224	3598	4076	[illegible]
9261	344	1853	4123	6867	9928	141	521	863	1249	1672	2072	2456	2843	3240	3599	4083	[illegible]
10648	351	1944	4160	6886	9990	153	528	881	1250	1675	2079	2458	2853	3257	3618	4087	[illegible]
	370	2000	4221	6923	10197	155	532	882	1268	1682	2087	2465	2870	3261	3625	4098	[illegible]
	407	2060	4312	6984	10234	160	540	902	1280	1686	2098	2477	2872	3264	3653	4102	[illegible]
	432	2071	4375	7075	10261	179	547	918	1288	1701	2124	2484	2877	3269	3655	4103	[illegible]
	468	2198	4394	7110	10592	190	557	919	1305	1730	2125	2512	2878	3275	3662	4105	[illegible]
	513	2205	4439	7163	10649	192	560	944	1333	1737	2135	2521	2883	3283	3672	4112	[illegible]
	520	2224	4472	7202	10656	197	566	946	1340	1738	2160	2538	2896	3303	3689	4124	[illegible]
	539	2240	4608	7371	10675	218	567	953	1341	1744	2185	2541	2925	3320	3709	4131	[illegible]
	559	2261	4706	7471	10712	225	577	972	1344	1753	2186	2547	2927	3322	3716	4139	[illegible]
	576	2322	4825	7560	10744	232	584	979	1347	1756	2187	2548	2933	3331	3719	4141	[illegible]
	637	2331	4914	7588	10745	244	586	980	1351	1763	2196	2567	2934	3377	3726	4150	[illegible]
	686	2413	4921	7657	10773	251	593	1002	1359	1782	2199	2572	2944	3381	3728	4161	[illegible]
	728	2457	4940	7859	10864	253	603	1009	1366	1793	2206	2582	2953	3384	3745	4168	[illegible]
	730	2540	4941	8001	10955	258	623	1016	1367	1799	2213	2583	2961	3391	3752	4185	[illegible]
	737	2662	4977	8008	10989	270	638	1025	1370	1800	2216	2604	2968	3403	3768	4187	[illegible]
	756	2709	5038	8027	10991	277	640	1028	1385	1801	2225	2629	2969	3410	3771	4197	[illegible]
	793	2728	5096	8029	11160	281	645	1029	1396	1819	2232	2663	2987	3413	3782	4200	[illegible]
	854	2745	5103	8064	11375	288	648	1032	1403	1844	2241	2665	2990	3429	3788	4202	[illegible]
	855	2752	5129	8125	11377	307	664	1035	1407	1851	2248	2670	2994	3430	3799	4222	[illegible]
	945	2771	5256	8190	11458	314	684	1051	1415	1854	2251	2673	3000	3438	3807	4224	[illegible]
	1001	2808	5425	8192	11648	342	687	1054	1422	1855	2262	2674	3005	3440	3808	4229	[illegible]
	1008	2869	5427	8216	11664	345	694	1065	1432	1856	2267	2689	3024	3447	3816	4230	[illegible]
	1024	2926	5488	8288	11772	349	701	1070	1457	1861	2269	2710	3051	3457	3843	4248	[illegible]
	1027	2960	5572	8343	11979	352	713	1071	1459	1870	2276	2717	3052	3464	3869	4256	[illegible]
1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Summen von 2 oder 3 Cuben sind.

3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
5554	5958	6335	6824	7171	7589	8037	8370	8758	9234	9584	9991	10387	10809	11207	11663
5573	5960	6336	6831	7174	7596	8054	8371	8792	9241	9587	9992	10389	10826	11224	11665
5580	5965	6345	6833	7175	7615	8056	8372	8793	9263	9602	9998	10401	10837	11234	11672
5599	5977	6352	6841	7183	7622	8065	8386	8800	9270	9605	10000	10413	10846	11253	11674
5608	5984	6357	6848	7190	7624	8072	8406	8802	9271	9611	10009	10440	10865	11256	11675
5613	5985	6369	6856	7200	7641	8075	8407	8803	9272	9612	10016	10450	10869	11257	11684
5615	6000	6371	6857	7203	7652	8081	8408	8838	9277	9619	10017	10457	10870	11259	11691
5636	6021	6391	6861	7210	7658	8091	8413	8854	9289	9630	10042	10477	10872	11261	11712
5641	6037	6408	6868	7216	7665	8093	8432	8855	9296	9631	10053	10485	10891	11285	11718
5643	6038	6418	6875	7227	7675	8100	8441	8859	9305	9667	10054	10502	10898	11298	11720
5650	6040	6425	6887	7229	7684	8110	8468	8863	9307	9668	10056	10538	10926	11320	11728
5653	6049	6427	6894	7235	7685	8126	8471	8891	9315	9674	10060	10540	10928	11321	11744
5669	6056	6434	6896	7244	7687	8128	8478	8919	9316	9693	10071	10555	10934	11331	11745
5670	6075	6460	6903	7262	7713	8133	8490	8921	9326	9719	10115	10577	10935	11332	11753
5697	6082	6462	6904	7266	7714	8152	8494	8930	9332	9729	10116	10593	10936	11334	11773
5704	6084	6469	6913	7288	7721	8154	8504	8945	9333	9736	10125	10600	10956	11376	11780
5706	6096	6488	6924	7290	7750	8163	8513	8947	9339	9738	10144	10603	10960	11378	11789
5725	6103	6509	6931	7291	7769	8169	8520	8988	9343	9755	10169	10604	10961	11383	11799
5767	6112	6518	6950	7293	7776	8171	8533	9001	9352	9757	10198	10619	10963	11385	11800
5768	6120	6553	6957	7300	7782	8189	8535	9008	9358	9774	10205	10650	10982	11402	11801
5770	6122	6560	6965	7326	7804	8191	8539	9010	9360	9781	10206	10657	10990	11404	11836
5788	6127	6562	6966	7327	7814	8193	8541	9017	9385	9785	10207	10662	10992	11439	11864
5803	6129	6569	6973	7344	7832	8198	8559	9024	9387	9792	10215	10664	10997	11441	11880
5825	6146	6572	6985	7352	7839	8200	8560	9027	9389	9800	10224	10676	10999	11456	11887
5831	6154	6587	6987	7370	7840	8202	8568	9029	9394	9819	10226	10683	11016	11459	11889
5834	6156	6588	6992	7372	7847	8217	8577	9036	9395	9820	10235	10702	11018	11466	11897
5841	6167	6591	7011	7379	6860	8219	8584	9037	9399	9827	10240	10709	11019	11467	11923
5848	6173	6625	7022	7398	7867	8224	8588	9057	9413	9834	10242	10713	11032	11473	11925
5851	6176	6631	7048	7418	7873	8232	8595	9064	9423	9837	10262	10717	11053	11474	11951
5858	6183	6636	7056	7435	7883	8243	8603	9072	9450	9843	10269	10719	11055	11485	11955
5860	6200	6642	7073	7450	7886	8245	8614	9073	9456	9853	10271	10720	11059	11500	11962
5867	6202	6649	7076	7453	7892	8250	8631	9083	9458	9854	10285	10728	11080	11501	11970
5886	6217	6668	7083	7472	7903	8254	8637	9088	9478	9890	10288	10737	11087	11502	11980
5888	6239	6669	7093	7479	7923	8256	8640	9099	9485	9898	10298	10739	11088	11503	11987
5897	6245	6686	7102	7496	7931	8280	8651	9120	9494	9907	10304	10746	11104	11522	11988
5904	6252	6687	7109	7498	7972	8289	8657	9125	9504	9918	10315	10752	11114	11528	11989
5914	6256	6705	7111	7506	7983	8296	8686	9134	9511	9920	10322	10753	11116	11554	11991
5915	6264	6751	7118	7535	7984	8315	8701	9181	9512	9929	10325	10771	11157	11565	
5921	6271	6756	7119	7545	8002	8316	8702	9190	9521	9936	10331	10772	11161	11567	
5923	6272	6758	7137	7552	8009	8317	8704	9192	9523	9944	10332	10774	11168	11583	
5937	6294	6766	7138	7561	8016	8341	8712	9199	9541	9946	10333	10776	11171	11591	
5939	6300	6777	7139	7568	8021	8344	8728	9208	9547	9947	10338	10781	11187	11592	
5940	6301	6805	7153	7569	8028	8351	8730	9215	9550	9951	10340	10784	11197	11593	
5941	6308	6814	7155	7575	8030	8352	8737	9216	9568	9955	10359	10800	11205	11649	
5949	6320	6819	7164	7587	8035	8369	8756	9225	9576	9989	10386	10808	11206	11656	
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3



4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	5	4	5	4	4	5	5	4	6
2	5	3	3	5	3	5	6	6	5	4
3	5	3	4	4	4	3	5	7	4	5
4	4	2	5	5	4	4	5	5	3	4
5	4	3	4	6	5	4	4	5	4	5
6	5	4	5	7	5	5	4	2	5	3
7	6	5	6	5	4	4	5	3	4	4
8	5	6	4	5	5	4	2	4	4	5
9	5	5	4	5	5	5	3	4	4	6
10	6	4	4	4	4	5	3	5	5	5
11	5	4	5	4	5	4	4	6	5	4
12	3	3	4	2	5	5	5	4	4	4
13	4	4	5	3	4	5	5	5	4	1
14	5	4	4	4	5	6	4	3	4	2
15	4	5	5	5	5	4	4	4	3	3
16	4	5	5	6	4	5	3	4	4	4
17	5	5	5	6	4	4	4	5	5	5
18	5	4	5	4	3	5	4	3	6	6
19	6	5	6	4	4	3	5	4	6	5
20	4	4	5	3	5	4	5	5	5	5
21	5	5	2	4	3	5	6	5	5	2
22	5	5	3	4	4	4	5	4	5	3
23	4	2	4	5	5	5	5	5	4	4
24	4	3	3	6	5	4	4	5	3	5
25	5	4	4	4	5	5	4	5	2	3
26	6	5	5	5	4	4	5	4	3	4
27	5	6	4	4	5	4	5	5	4	5
28	5	5	4	4	5	3	4	4	5	5
29	5	4	3	5	4	4	5	5	6	3
30	5	4	3	5	4	4	5	5	5	4
31	5	3	4	4	5	5	5	5	3	4
32	4	4	4	4	6	5	5	6	4	5
33	5	5	5	5	6	6	5	3	3	4
34	6	6	6	5	5	5	4	4	4	4
35	6	5	5	5	5	5	3	4	5	5
36	6	6	5	4	5	3	4	4	5	6
37	6	4	4	5	3	4	4	3	5	4
38	5	5	4	5	4	5	5	4	6	5
39	4	3	5	3	2	6	6	5	4	5
40	3	4	4	4	3	4	5	5	5	2
41	4	3	5	5	4	5	5	4	4	2
42	5	4	6	6	5	5	5	4	4	3
43	5	5	5	5	5	4	4	5	4	4
44	6	6	6	5	5	4	4	3	5	5
45	6	5	5	5	4	4	5	4	6	5
46	6	6	5	3	4	4	5	5	4	6
47	5	4	5	4	3	5	5	5	5	6
48	4	5	3	5	4	5	6	6	5	3
49	4	4	4	4	5	5	5	5	5	3
50	3	3	5	5	5	6	6	5	5	3
4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	4	4	4	6	6	5	4	6	4	3
52	4	5	5	5	5	4	5	4	3	4
53	4	6	6	5	5	5	4	5	4	4
54	5	6	5	4	4	5	3	6	5	5
55	6	5	5	4	4	4	3	5	6	6
56	5	5	3	5	3	5	4	5	6	4
57	4	5	3	4	4	5	5	6	6	4
58	4	4	4	5	3	6	6	6	4	4
59	3	4	5	5	4	6	5	5	3	4
60	4	2	6	6	5	5	6	4	4	4
61	3	3	4	6	5	5	4	4	5	5
62	4	4	5	5	5	4	4	5	4	6
63	5	5	6	5	4	4	4	5	5	6
64	5	5	4	5	4	3	5	4	6	5
65	5	4	4	5	5	4	5	5	5	5
66	5	4	4	4	3	5	6	6	5	5
67	4	4	5	5	4	4	6	6	4	3
68	5	3	3	6	5	5	5	4	4	3
69	4	4	4	7	6	5	5	4	4	4
70	5	5	5	6	6	5	5	3	4	4
71	4	6	6	6	4	4	5	4	4	5
72	5	6	5	6	2	4	3	5	5	6
73	6	5	5	4	3	4	4	5	5	6
74	6	4	5	5	4	5	4	6	6	6
75	2	4	4	2	5	5	5	7	5	4
76	3	4	4	3	6	6	6	5	5	4
77	4	4	4	4	5	6	5	5	5	2
78	5	5	5	5	6	6	5	4	5	3
79	5	6	6	6	5	5	5	4	4	4
80	5	6	4	6	3	5	4	4	5	5
81	6	6	5	4	4	4	4	5	6	6
82	6	5	6	4	4	5	4	3	7	7
83	3	5	4	3	4	4	5	4	5	5
84	4	4	4	4	4	5	6	5	6	3
85	4	3	3	5	4	6	6	6	5	3
86	4	4	4	5	5	5	5	5	4	4
87	3	3	5	6	6	3	5	3	3	5
88	4	4	4	7	4	4	3	4	4	6
89	5	5	5	5	5	5	4	5	3	4
90	6	6	5	3	5	5	5	4	4	5
91	4	6	3	4	5	3	6	5	5	6
92	5	5	4	5	5	4	5	5	6	4
93	4	4	4	4	4	5	6	6	5	4
94	5	5	4	2	5	5	6	6	5	4
95	4	4	4	3	6	4	6	4	4	4
96	1	5	5	4	5	5	4	5	5	5
97	2	3	6	5	4	3	4	4	4	4
98	3	4	6	4	5	4	5	5	5	4
99	4	5	4	3	3	4	4	4	6	5
100	5	3	4	4	3	4	5	5	6	5
4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	5	3	5	4	5	5	5	5	5
2	5	3	4	5	4	6	6	5	5	5
3	4	2	5	5	5	4	6	5	3	5
4	3	3	6	6	5	4	5	3	4	3
5	3	4	5	7	6	5	5	4	5	4
6	4	5	6	7	3	4	5	3	5	4
7	5	5	6	5	4	5	4	4	5	5
8	6	6	5	5	4	5	3	5	5	6
9	5	4	4	4	4	5	4	5	5	6
10	6	4	5	4	5	4	4	6	6	6
11	4	3	4	4	5	4	5	6	4	5
12	4	4	5	3	5	5	6	4	5	4
13	4	4	5	4	5	6	3	4	5	2
14	4	5	5	5	4	5	4	4	5	3
15	4	6	6	5	5	3	3	5	4	3
16	5	6	6	4	5	4	4	5	5	4
17	5	5	5	5	4	4	5	4	6	5
18	6	5	3	4	4	4	4	4	7	4
19	5	4	4	3	5	4	5	5	5	5
20	4	3	4	3	6	5	6	5	6	4
21	5	4	3	4	4	6	4	4	5	3
22	5	4	4	5	5	5	4	5	4	4
23	5	3	5	6	5	4	4	5	5	3
24	5	4	4	4	5	5	5	4	2	4
25	5	4	5	5	2	5	5	3	3	4
26	6	5	4	4	3	5	4	4	4	5
27	5	5	4	4	2	4	4	5	5	6
28	5	4	3	4	3	4	5	5	5	4
29	5	2	4	5	4	5	5	5	4	4
30	5	3	4	6	5	5	5	4	4	4
31	4	4	4	5	6	4	5	4	3	4
32	4	5	4	5	6	5	4	5	1	5
33	5	5	5	6	3	4	5	4	2	5
34	5	6	5	5	4	5	5	4	3	5
35	6	6	5	5	3	4	4	5	4	6
36	5	5	4	4	4	4	3	5	5	5
37	5	3	5	3	4	5	4	4	5	3
38	2	4	5	4	5	5	5	4	5	4
39	3	4	5	4	3	5	6	5	4	3
40	4	5	5	5	4	5	4	4	2	3
41	3	4	6	5	4	5	3	5	3	3
42	4	5	6	6	5	4	2	5	4	4
43	5	6	6	4	4	5	3	5	5	5
44	6	5	5	5	4	4	4	4	6	6
45	6	4	4	3	4	5	5	5	6	4
46	3	5	5	4	3	5	6	5	5	5
47	4	4	5	4	4	6	6	5	5	4
48	4	5	4	4	5	6	5	5	3	4
49	3	5	4	5	5	6	4	4	4	3
50	4	4	5	6	6	3	3	5	4	4
5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	5	5	5	5	5	4	4	5	3	4
52	5	5	6	5	3	3	5	4	4	4
53	5	5	5	4	3	4	3	5	5	5
54	4	6	3	5	3	3	4	6	5	5
55	5	5	4	5	4	4	4	6	5	5
56	5	3	2	5	4	5	5	6	4	4
57	4	3	3	5	5	6	5	5	4	2
58	5	4	4	5	4	4	4	5	3	3
59	4	5	5	6	5	5	5	6	2	4
60	5	3	6	6	4	4	5	5	3	3
61	4	4	5	5	4	4	4	4	4	4
62	5	5	4	6	4	4	4	5	5	5
63	6	3	5	5	4	5	4	6	5	6
64	5	4	3	4	5	4	5	5	5	4
65	3	4	4	5	5	5	6	5	5	3
66	3	4	5	5	4	5	5	4	4	4
67	4	3	6	6	5	5	5	3	3	4
68	4	3	4	6	5	5	4	3	4	4
69	4	4	5	6	5	5	3	4	4	5
70	5	5	5	5	4	5	3	3	5	5
71	5	4	6	4	5	4	4	4	5	6
72	6	5	4	4	3	2	4	5	6	5
73	4	5	5	4	4	3	5	6	6	4
74	4	4	5	5	5	4	5	5	5	5
75	3	4	5	3	6	5	4	4	4	5
76	4	4	5	4	6	6	5	4	5	4
77	5	5	5	5	6	4	4	5	5	3
78	5	6	6	6	5	4	4	4	4	4
79	5	5	7	4	4	4	4	5	5	4
80	4	6	5	5	4	3	4	5	6	5
81	5	6	4	3	4	4	5	5	6	5
82	5	5	4	4	5	5	5	4	6	5
83	4	4	3	4	5	5	5	5	5	4
84	5	3	3	4	5	6	6	5	5	3
85	5	4	4	5	5	5	5	5	4	3
86	5	5	5	6	6	5	5	5	3	4
87	4	4	6	5	5	4	5	4	4	4
88	5	5	4	5	2	4	4	3	3	5
89	6	5	5	4	3	5	5	4	4	5
90	6	4	5	4	4	6	5	5	5	6
91	5	4	4	5	3	4	5	6	5	5
92	4	4	4	4	4	5	6	6	4	4
93	4	3	4	5	5	6	6	5	4	4
94	5	4	4	3	6	6	6	4	4	5
95	5	4	5	4	6	5	5	4	4	5
96	2	5	5	5	3	5	4	4	2	4
97	3	4	6	5	4	4	3	4	3	5
98	4	5	6	5	5	5	4	5	4	5
99	4	5	4	4	4	3	5	5	5	6
100	5	4	5	4	4	4	4	5	5	3
5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9